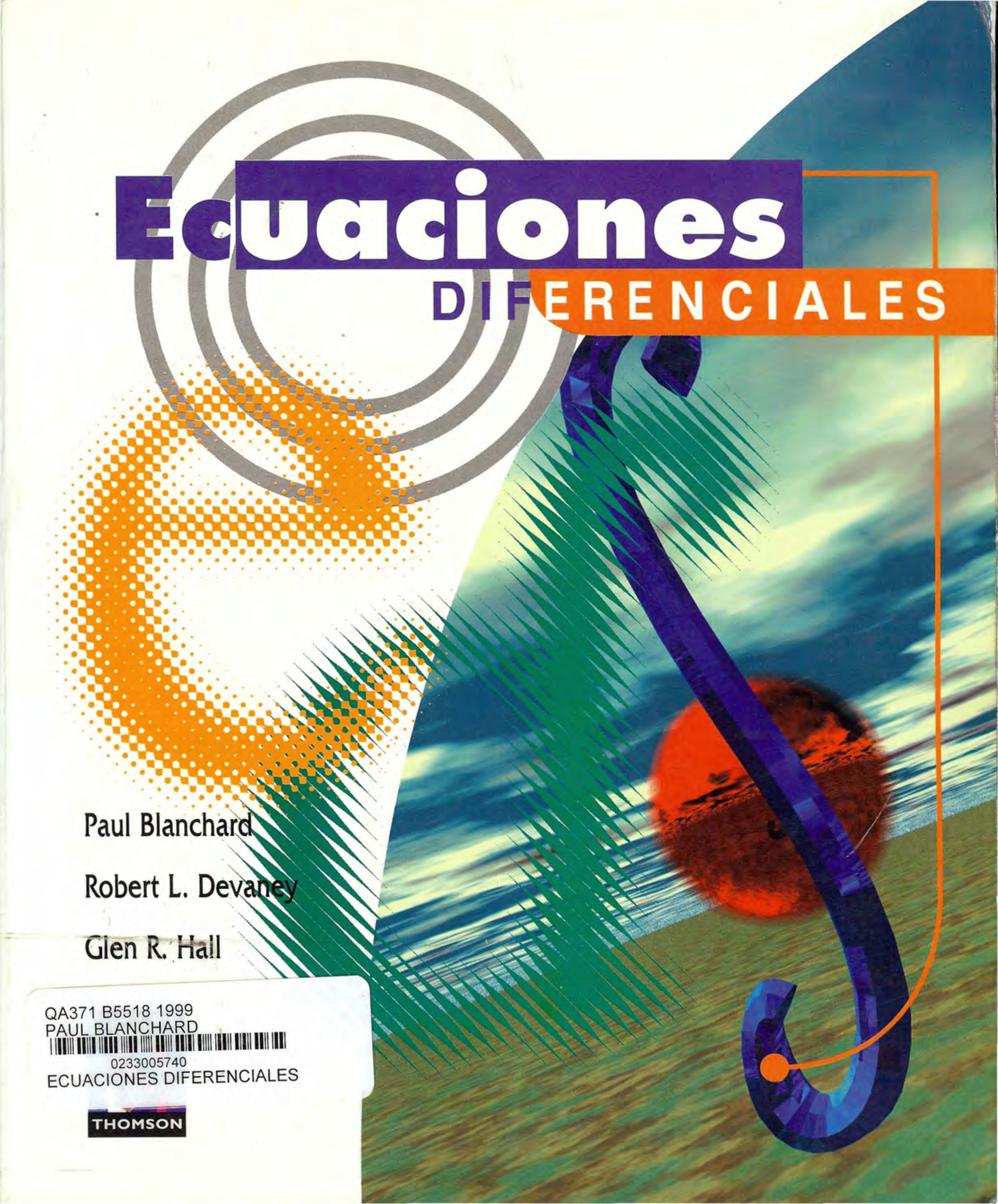

Ecuaciones
DIFERENCIALES
Paul Blanchard
Robert L. Devaney
Glen R. Hall
THOMSON

ECUACIONES DIFERENCIALES

Paul Blanchard

Robert L. Devaney

Glen R. Hall

Boston University



International Thomson Editores

An International Thomson Publishing Company I(T)P

México • Albany • Bonn • Boston • Johannesburgo • Londres • Melbourne • Nueva York
París • San Francisco • San Juan, PR • Santiago • São Paulo • Singapur • Tokio •
Toronto • Washington

Traducción de libro: *Differential Equations*, publicado en inglés por Brooks/Cole Publishing.

ISBN 0-534-34550-6

Ecuaciones diferenciales
ISBN 968-7529-63-6

I(T)P International Thomson Editores, S. A. de C. V. es una empresa
de *International Thomson Publishing*. La marca registrada ITP se usa bajo licencia.

México y América Central
Séneca 53, Colonia Polanco
México, D. F. 11560
Tel. (525) 281-2906
Fax (525) 281-2656
clientes@mail.internet.com.mx
MÉXICO

El Caribe
Tel. (787) 758-7580
Fax (787) 758-7573
102154.1127@compuserve.com
Hato Rey, PUERTO RICO

América del Sur
sdeluque@ba.net
Buenos Aires, ARGENTINA

España
Tel. (3491) 446-3350
Fax (3491) 445-6218
itesparaninfo.pedidos@mad.servicom.es
Madrid, ESPAÑA

Editora de desarrollo: Leticia Medina
Editor de producción: René Garay Argueta
Director editorial y de producción: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Corrección de estilo: Martha Alvarado
Diseño de portada: Iztac/Kooji Nishi
Tipografía: Pag & Tips
Lecturas: Carlos Zúñiga y Roberto Alfaro

987654321 9II9

Impreso en México
Printed in Mexico

Traducción
José de la Cera Alonso
Universidad Autónoma Metropolitana, Azcapotzalco

Revisión técnica
Edmundo Palacios Pastrana
Universidad Iberoamericana

SOBRE LOS AUTORES

Paul Blanchard

Paul Blanchard creció en Sutton, Massachusetts, hizo su licenciatura en Brown University y recibió su Ph.D. de la Yale University. Ha enseñado matemáticas universitarias durante veinte años, principalmente en la Boston University. Ha sido coautor de varios libros y contribuido con capítulos a cuatro libros de texto diferentes. Su principal área de investigación matemática son los sistemas dinámicos complejos analíticos y los conjuntos punto asociados, los conjuntos Julia y el conjunto Mandelbrot. Recientemente su interés se ha centrado en reformar el curso tradicional de ecuaciones diferenciales, y preside el Boston University Differential Equations Project y dirige los talleres de este innovativo enfoque para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales.

Robert L. Devaney

Robert L. Devaney creció en Methuen, Massachusetts. Recibió su grado de licenciatura del Holy Cross College y su Ph.D. de la Universidad de California en Berkeley. Ha impartido cátedra en la Boston University desde 1980. Su principal área de investigación son los sistemas dinámicos complejos y ha dado conferencias en todo el mundo sobre este tema. En 1996 recibió el National Excellence in Teaching Award de la Asociación Matemática de América.

Glen R. Hall

Glen R. Hall pasó la mayor parte de su juventud en Denver, Colorado. Su grado de Licenciatura lo recibió del Carleton College y su Ph.D. de la University of Minnesota. Sus intereses de investigación son principalmente la dinámica de bajas dimensiones y la mecánica celeste. Ha publicado numerosos artículos sobre la dinámica de mapeos circulares y anulares. Por sus investigaciones, la National Science Foundation y la Sloan Foundation le han otorgado becas posdoctorales.

PREFACIO

El estudio de las ecuaciones diferenciales es una hermosa aplicación de las ideas y procedimientos del cálculo a nuestra vida cotidiana. Podría decirse que el cálculo fue desarrollado básicamente para que los principios que gobiernan muchos fenómenos pudieran ser expresados en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales. Desafortunadamente, fue difícil transmitir la belleza del tema en el tradicional primer curso sobre ecuaciones diferenciales, porque el número de ecuaciones que pueden tratarse con procedimientos analíticos es muy limitado. En consecuencia, el curso se enfocó más en los procedimientos que en los conceptos.

Este libro es una consecuencia de nuestra opinión de que ahora podemos efectuar una revisión radical y abordamos nuestro curso actualizado con varias metas en mente. En primer lugar, el énfasis tradicional en ardides y procedimientos especializados para resolver ecuaciones diferenciales ya no es apropiado, dada la tecnología disponible. En segundo lugar, muchas de las ecuaciones diferenciales más importantes no son lineales y los procedimientos numéricos y cualitativos son más efectivos que los analíticos para estos casos. Finalmente, el curso de ecuaciones diferenciales es uno de los pocos cursos a nivel de licenciatura donde es posible dar a los estudiantes una breve visión de la naturaleza de la investigación matemática contemporánea.

Los enfoques cualitativo, numérico y analítico

De acuerdo con ello, este libro se desvía radicalmente del típico texto "recetario de cocina" sobre ecuaciones diferenciales. Hemos eliminado la mayor parte de los procedimientos especializados para obtener fórmulas de soluciones y los hemos reemplazado con temas que se centran en la formulación de ecuaciones diferenciales y la interpretación de sus soluciones. A fin de adquirir un entendimiento de éstas, resolvemos una ecuación desde tres puntos de vista diferentes.

El principal enfoque que adoptamos es cualitativo. Esperamos que los estudiantes sean capaces de visualizar las ecuaciones diferenciales y sus soluciones de muchas maneras geométricas. Por ejemplo, usamos campos de pendientes, gráficas de soluciones, campos vectoriales y curvas solución en el plano fase como herramientas para un mejor entendimiento de las soluciones. También pedimos a los estudiantes que adquieran destreza para moverse entre las representaciones geométricas y analíticas más tradicionales.

Como el estudio de las ecuaciones diferenciales resulta más fácil usando la computadora, también hacemos énfasis en los procedimientos numéricos. Suponemos que los estudiantes tienen algún acceso a procedimientos tecnológicos que facilitan la aproximación a las soluciones y a las gráficas de esas soluciones. Aun cuando podemos encontrar una

fórmula explícita para una solución, a menudo trabajamos numérica y cualitativamente con la ecuación para entender la geometría y el comportamiento a largo plazo de las soluciones. Cuando podemos encontrar soluciones explícitas fácilmente (como en el caso de ecuaciones separables de primer orden o sistemas lineales de coeficientes constantes), efectuamos los cálculos. Pero nunca dejamos de examinar las fórmulas resultantes que obtenemos también con los puntos de vista cualitativo y numérico.

Cambios específicos

Existen varios aspectos específicos en los que este libro difiere de otros en este nivel. Primero, incorporamos el modelado en forma integral. Esperamos que los estudiantes entiendan el significado de las variables y parámetros de una ecuación diferencial y que sean capaces de interpretarlo en términos de un modelo particular. Ciertos modelos aparecen repetidamente como temas secuenciales y son tomados de varias disciplinas, de manera que los estudiantes con diferente preparación curricular encuentren temas familiares.

También adoptamos un punto de vista dinámico para sistemas. Siempre estamos interesados en el comportamiento a largo plazo de las soluciones de una ecuación y, usando todos los enfoques apropiados delineados arriba, pedimos a los estudiantes predecir este comportamiento. Además, reiteramos el papel de los parámetros en muchos de nuestros ejemplos y estudiamos específicamente la manera en que cambia el comportamiento de las soluciones cuando esos parámetros son modificados.

Igual que en otros textos, comenzamos con las ecuaciones de primer orden, pero el único procedimiento analítico que usamos para encontrar soluciones en forma cerrada es el de separación de variables (y, al final de capítulo, uno o dos factores de integración para tratar ciertas ecuaciones lineales). Más bien, resaltamos el significado de una ecuación diferencial y sus soluciones en términos de su campo de pendientes y de las gráficas de sus soluciones. Si la ecuación diferencial es autónoma, también analizamos su línea fase. Este análisis sirve como una introducción elemental a la idea de un plano fase, que juega un papel fundamental en capítulos subsecuentes.

Pasamos directamente de las ecuaciones de primer orden a los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden. En vez de considerar las ecuaciones de segundo orden por separado, las convertimos a sistemas de primer orden. Cuando aquéllas se tratan como sistemas, podemos usar los procedimientos cualitativos y numéricos más fácilmente. Por supuesto, después empleamos la información obtenida con estos procedimientos, para recuperar información sobre las soluciones de la ecuación original.

También iniciamos nuestro aprendizaje de los sistemas con un enfoque general. No restringimos de inmediato nuestra atención a los sistemas lineales. Los procedimientos cualitativos y numéricos funcionan igualmente bien cuando un sistema no es lineal y puede avanzarse un largo trayecto hacia el entendimiento de los sistemas, sin tener que recurrir a los procedimientos algebraicos. Sin embargo, las ideas cualitativas no nos dan una visión completa del asunto, por lo que, en forma natural, llegamos a la idea de linearización. Con este antecedente en los conceptos geométricos y cualitativos fundamentales, procedemos a analizar los sistemas lineales con detalle. Como siempre, no sólo damos énfasis a la fórmula para la solución general de un sistema lineal, sino también a la geometría de sus curvas solución y de los eigenvectores y eigenvalores asociados.

Si bien nuestro estudio de sistemas requiere un uso mínimo del álgebra lineal, ésta no es un prerrequisito definitivo. Como tratamos principalmente con sistemas bidimensionales, desarrollamos todos los métodos algebraicos necesarios según avanzamos. En el proceso, prestamos mucha atención a la geometría relacionada con los eigenvectores y eigenvalores.

Estos temas forman el núcleo de nuestro enfoque. Sin embargo, hay muchos aspectos adicionales que nos gustaría tratar en el curso. En consecuencia, hemos incluido el análisis de ecuaciones forzadas de segundo orden, de sistemas no lineales, de las transformadas de Laplace, de métodos numéricos y de sistemas dinámicos discretos. Aunque algunos de esos temas son tradicionales, siempre los presentamos de manera consistente con el enfoque desarrollado en la primera mitad del texto.

Al final de cada capítulo hemos incluido varios "laboratorios". Nuestra más exitosa modificación del curso tradicional impartido en la Boston University ha sido efectuar experimentos numéricos detallados y escribir sus reportes. Los trabajos de laboratorio sobresalientes son difíciles de escribir y calificar, pero consideramos que el beneficio para los estudiantes es extraordinario.

Rutas a través de este libro

Hay varias rutas posibles que pueden seguir los profesores al usar este libro. Pensamos que los capítulos 1-3 forman el núcleo (con la posible excepción de las secciones 2.5 y 3.8 que tratan sistemas tridimensionales). La mayor parte de los últimos capítulos suponen que el lector está familiarizado con este material. Ciertas secciones como la 1.7 (bifurcaciones) y la 1.9 (cambio de variables) pueden pasarse por alto si se tiene cuidado al escoger el material de las secciones subsecuentes. Sin embargo, el material sobre las líneas y planos fase, análisis cualitativo y soluciones de sistemas lineales es de gran importancia.

Una ruta típica para un curso de ingeniería sería estudiar los capítulos 1-3 (dejando de ver tal vez las secciones 1.9, 2.5 y 3.8). Esos capítulos tomarán aproximadamente dos tercios de un semestre. En el tercio final del curso podrían verse las secciones 4.1-4.3 (ecuaciones lineales forzadas de segundo orden y resonancia), la sección 5.1 (linearización de sistemas no lineales) y el capítulo 6 (transformadas de Laplace). Los capítulos 4 y 5 son independientes uno del otro y pueden estudiarse en cualquier orden. En particular, la sección 5.1 sobre linearización de sistemas no lineales cerca de puntos de equilibrio forma un excelente remate para el material relativo a sistemas lineales del capítulo 3.

También es posible cubrir las secciones 6.1 y 6.2 (transformadas de Laplace para ecuaciones de primer orden) inmediatamente después del capítulo 1. Como hemos aprendido de nuestros colegas en el College of Engineering de la Boston University, algunos programas de ingeniería enseñan un curso sobre teoría de circuitos que usa la transformada de Laplace, antes de que sea conveniente. Por ello, las secciones 6.1 y 6.2 están escritas de manera que el curso sobre ecuaciones diferenciales y sobre circuitos eléctricos puedan proceder en paralelo. Sin embargo, de ser posible, recomendamos esperar a cubrir todo el capítulo 6 hasta que el material en las secciones 4.1-4.3 haya sido estudiado.

Algunos profesores tal vez desearían sustituir el material sobre dinámica discreta (capítulo 8) por las transformadas de Laplace. Un curso para estudiantes con una fuerte base en física podría ver más del capítulo 5, inclusive un tratamiento de los hamiltonianos (sección 5.3) y de los sistemas de gradiente (sección 5.4). Un curso dirigido hacia matemáticas aplicadas podría incluir un análisis más detallado de métodos numéricos (capítulo 7).

Cambios en la primera edición

Nos sentimos muy halagados por la recepción que ha tenido la edición preliminar de este libro desde su publicación en 1995. Nos sentimos especialmente endeudados con el gran número de lectores y profesores que nos han hecho comentarios sobre varios puntos de la edición previa. De acuerdo con ellos, hemos hecho algunos cambios en esta edición. Los más importantes están relacionados con tratamientos más completos de las ecuaciones

forzadas de segundo orden y de la resonancia, así como con un tratamiento revisado de las transformadas de Laplace. El material en el capítulo 2 se reescribió por completo para seguir más de cerca nuestra intención de presentar métodos analíticos, cualitativos y numéricos para sistemas en una etapa temprana. Se han agregado dos apéndices. El primero es un tratamiento alternativo de las ecuaciones lineales de primer orden y puede usarse en lugar de la sección 1.8. El segundo es un repaso de los números complejos y de la fórmula de Euler.

La mayor parte de los cambios restantes tienen que ver sólo con reajustes menores de temas, de manera que los profesores puedan evitar saltos dentro de un capítulo. Como con cualquier revisión importante de un curso existente, anticipamos que este libro continuará evolucionando en futuras ediciones. Recibimos comentarios, sugerencias y críticas. La mejor manera de hacerlo es enviar un e-mail a **odes@math.bu.edu**. Trataremos de responderle y definitivamente leeremos y consideraremos todo comentario.

Nuestro sitio en la Web y páginas auxiliares

Los lectores y profesores son invitados a hacer un extenso uso de nuestro sitio en la red.

http://math.bu.edu/odes

En estas páginas hemos colocado una guía *on-line* para los profesores, que incluye un análisis de cómo usar el texto. También hemos anexado muestras de planes de estudio proporcionados por los usuarios de varias instituciones, así como la información de talleres y seminarios relacionados con la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Además mantenemos una lista de fe de erratas. El *Instructor's Guide with Solutions*, disponible para los profesores que han adoptado el libro como texto, contiene una copia dura de la guía *on-line* junto con las soluciones para todos los problemas.

Nuestro editor, Brooks/Cole, mantiene también el DiffEQ Resource Center en

http://diffeq.brookscole.com

Estas páginas contienen información extensa acerca de la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, incluyendo un arreglo extenso de laboratorios e ideas de proyectos, así como conexiones con otras páginas relacionadas con dicha enseñanza.

El proyecto de ecuaciones diferenciales de la Universidad de Boston

Este libro es un producto del ahora completo Proyecto sobre Ecuaciones Diferenciales de la Universidad de Boston, patrocinado por la National Science Foundation (NSF Grant DUE-9352833) y la Universidad de Boston. La meta de ese proyecto fue reestructurar a nivel mundial el curso tradicional sobre ecuaciones diferenciales. Estamos especialmente agradecidos por ese apoyo.

Paul Blanchard
Robert L. Devaney
Glen R. Hall
Boston University

RECONOCIMIENTOS

Al pasar de los escritos preliminares a la primera edición, la lista de gente a la que tenemos el privilegio de dar nuestras gracias ha crecido exponencialmente. Para esta edición, nuestra máxima deuda es con **Gareth Roberts**. Como director del proyecto, él supervisó la producción del texto y gráficas. Como matemático y profesor, ha sido un crítico y asistente invaluable. Igual que su predecesor Sam Kaplan, quien fue el director del proyecto para la edición preliminar, Gareth dejó su marca en este texto en muchas maneras positivas. Gracias, Gareth.

Con excepción de unas cuantas figuras dibujadas profesionalmente, este libro fue producido en su totalidad en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Boston usando el macropaquete ASTEX de Alex Kasman en conjunción con LATEX2$_\epsilon$. Alex es un verdadero mago del TEX y cualquiera que esté escribiendo un libro de texto podría tomar en cuenta su paquete. De hecho, las gráficas macros de Alex son sumamente útiles en muchos contextos (vea la página web de Alex disponible en el sitio **http://math.bu.edu**).

Gran parte del trabajo de producción, solución de ejercicios, revisión de la exactitud e interpretación de las figuras fue hecho por nuestro equipo de estudiantes graduados: Bill Basener, Lee DeVille y Stephanie Ruggiano. Ellos invirtieron largos días y noches en el laboratorio de cómputo para terminar este libro. Dependimos mucho del trabajo hecho por Adrian Iovita, Kinya Ono, Adrian Vajiac y Nuria Fagella durante la producción de la edición preliminar.

Muchas otras personas en la Universidad de Boston hicieron contribuciones importantes. En particular, nuestros profesores asistentes Duff Campbell, Michael Hayes, Eileen Lee y Clara Bodelon tuvieron que soportar los dolores de cabeza asociados con nuestra experimentación.

Recibimos apoyo de muchos de nuestros colegas en la Universidad de Boston y de otras instituciones. Nuestro presidente, Marvin Freedman, nos apoyó a todo lo largo del proyecto. Fue un placer especial para todos nosotros trabajar íntimamente con colegas del College of Engineering: Michael Ruane (quien coordina el curso de circuitos), Moe Wasserman (quien permitió a uno de los autores asistir a su curso) y John Baillieul (miembro de nuestra junta directiva). Damos las gracias también a Donna Molinek (del Davidson College), Carolyn Narasimhan (DePaul University) y James Walsh (Oberlin College) por organizar talleres para profesores en sus campus.

Como se mencionó en el prefacio, este libro no existiría si nuestro proyecto no hubiese recibido apoyo de la División de educación a nivel de licenciatura de la National Science Foundation, y agradecemos a los directores del programa en esta institución por su entusiasmo y apoyo. Damos las gracias también a los miembros de la junta directiva

John Baillieul, Morton Brown, John Franks, Deborah Hughes Hallett, Philip Holmes y Nancy Kopell. Todos contribuyeron con su valioso tiempo durante los talleres y viajes a la Universidad de Boston.

Nos sentimos halagados de que muchos de nuestros colegas fuera de la Universidad de Boston estuviesen dispuestos a ayudarnos con este proyecto. Bill Krohn nos dio valiosos consejos respecto a nuestra presentación de las transformadas de Laplace, y Bruce Elenbogen leyó en forma total las primeras pruebas de los capítulos iniciales. Las primeras pruebas de nuestras notas originales fueron probadas en clase bajo diferentes situaciones por Gregory Buck, Scott Sutherland, Kathleen Alligood, Diego Benedette, Jack Dockery, Mako Haruta, Jim Henle, Ed Packel y Ben Pollina.

Estamos halagados con la recepción dada a la edición preliminar de este texto, y particularmente agradecidos por la paciencia con que los estudiantes y profesores por igual han aceptado nuestro primer intento. Muchos nos han escrito excelentes comentarios y sugerencias. A todos les damos las gracias. En la dirección de la página web citada en el prefacio puede encontrarse una lista actualizada.

En la creación de ambas ediciones del texto se han hecho revisiones concienzudas y exhaustivas que han proporcionado una gran ayuda. Las de la edición preliminar fueron hechas por Charles Boncelet, de la University of Delaware; Dean R. Brown, de la Youngstown State University; Michael Colvin, de la California Polytechnic State University; Peter Colwell, de la Iowa State University; James P. Fink, del Gettysburg College; Michael Frame, del Union College; Donnie Hallstone, del Green River Community College; Stephen J. Merrill, de la Marquette University; LTC Joe Myers, de la U.S. Military Academy; Carolyn C. Narasimhan, de la DePaul University; Roger Pinkham, del Stevens Institute of Technology; T. G. Proctor, de la Clemson University; Tim Sauer, de la George Mason University; Monty J. Strauss, de la Texas Tech University, y Paul Williams, del Austin Community College.

Los revisores de esta edición fueron David Arnold, del College of the Redwoods; Steven H. Izen, de la Case Western Reserve University; Joe Marlin, de la North Carolina State University; Kenneth Meyer, de la University of Cincinnati; Joel Robbin, University of Wisconsin en Madison; Clark Robinson, de la Northwestern University, y Jim Walsh, del Oberlin College.

Finalmente, como todo autor sabe, escribir un libro requiere considerables sacrificios de la familia. Gracias especiales a Lori, Kathy y Dottie.

G.R.H., R.L.D., P.B.

NOTA AL ESTUDIANTE

Este libro probablemente es diferente a la gran parte de sus textos de matemáticas. Si lo hojea, verá que hay muy pocas fórmulas "enmarcadas", ninguna nota al margen y muy pocos procedimientos de n pasos. Lo hemos escrito de esta manera porque pensamos que usted está ahora en una etapa de su educación en que debe aprender a identificar y trabajar efectivamente con las matemáticas inherentes de la vida cotidiana. En el desempeño de su carrera profesional, nadie le pedirá que haga todos los ejercicios impares al final de algún manual para empleados, sino que le darán algún problema cuya composición matemática puede ser difícil de identificar y le pedirán que haga lo más que pueda con él. Uno de nuestros objetivos en este libro es comenzar a prepararlo para este tipo de trabajo evitando ejercicios algorítmicos artificiales.

Nuestra intención es que lea este libro como cualquier otro texto, trabaje con los ejercicios, releyendo las secciones y ejemplos conforme sea necesario. Aunque no contiene ejemplos modelo, encontrará los análisis llenos de ejemplos. Puesto que una de nuestras metas principales es demostrar cómo se usan las ecuaciones diferenciales para modelar sistemas físicos, solemos comenzar con la descripción de un sistema físico, construimos un modelo y luego lo estudiamos para hacer conclusiones y predicciones acerca del sistema original. En muchos de los ejercicios se le pide producir o modificar un modelo de un sistema físico, analizarlo y explicar sus conclusiones. Esto es material difícil y tendrá que practicar. Como los días en que se podía uno ganar la vida enfrascándose en difíciles cálculos han pasado a la historia (en la actualidad, esto lo hacen las computadoras), tendrá que aprender esas habilidades y esperamos que este libro lo ayude a desarrollarlas.

Otra manera en que este libro puede diferir de sus textos previos es que esperamos que haga un uso razonable de una calculadora gráfica o de una computadora al intentar resolver los ejercicios y tareas de laboratorio. La computadora no hará los razonamientos, pero le proporcionará la evidencia numérica que esencialmente es imposible obtener de otra manera. Una de nuestras metas es darle práctica como consumidor sofisticado de ciclos de computadora, así como un sano escepticismo respecto a los resultados proporcionados por ésta.

A propósito de lo anterior, sabe que uno de los autores cometió uno o dos errores en su vida que los otros dos autores no detectaron. Por esto, mantenemos una lista muy corta de erratas en nuestro sitio en la web **http://math.bu.edu/odes**. Por favor consulte esta página si piensa usted que algo que ha leído no es correcto.

Finalmente, usted debe saber que los autores toman el estudio de las ecuaciones diferenciales muy en serio. Sin embargo, nosotros mismos no nos tomamos muy en serio (y

ciertamente, tampoco a los otros dos autores). Hemos tratado de expresar tanto la belleza de las matemáticas así como parte de la alegría que implica trabajar con ellas. Si piensa que algunas de las bromas son viejas o estúpidas, tal vez tenga razón.

Todos los que hemos trabajado en este libro aprendimos algo acerca de las ecuaciones diferenciales a lo largo del camino, y esperamos ser capaces de comunicar nuestra apreciación por la belleza del tema y rango de aplicaciones. Nos gustaría oír sus comentarios. Siéntase libre de enviarnos un e-mail a **odes@math.bu.edu**. Algunas veces estamos ocupados y no siempre podemos responder, pero lo leeremos y apreciaremos su retroalimentación.

Nos dio gran gusto escribir este libro. Esperamos que se diviertan leyéndolo.

G.R.H., R.L.D., P.B.

CONTENIDO

1 ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Este libro trata de cómo podemos predecir el futuro. Para ello, de todo lo que disponemos es el conocimiento de cómo son las cosas y cuáles son las reglas que gobiernan los cambios que ocurrirán. Del cálculo sabemos que el cambio es medido por la derivada, y usarla para describir cómo se modifica una cantidad es de lo que tratan las ecuaciones diferenciales.

Convertir las reglas que gobiernan la evolución de una cantidad en una ecuación diferencial se llama modelación, y en este capítulo estudiaremos muchos modelos. Nuestra meta es emplear la ecuación diferencial para predecir el valor futuro de la cantidad que se está modelando.

Existen tres tipos básicos de técnicas para efectuar esas predicciones. Las técnicas analíticas implican encontrar fórmulas para los valores futuros de la cantidad. Los métodos cualitativos se apoyan en un esbozo burdo de la gráfica de la cantidad como función del tiempo, y en la descripción de su comportamiento a largo plazo. Las técnicas numéricas requieren que efectuemos cálculos aritméticos (o bien que los haga una computadora) que den aproximaciones de los valores futuros de la cantidad. En este capítulo presentaremos y usaremos estos tres procedimientos.

1.1 MODELACIÓN POR MEDIO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

La parte más difícil al usar las matemáticas para estudiar una aplicación es la conversión de los fenómenos de la vida real al formalismo matemático. Por lo general esto es complicado porque implica la conversión de hipótesis imprecisas en fórmulas muy precisas. No hay manera de evitarlo. La modelación no es fácil y la mejor manera de lograrla es la misma requerida para tocar en Carnegie Hall: practicar, practicar y practicar.

¿Qué es un modelo?

Es importante recordar que los modelos matemáticos son como otros tipos de modelos. El objetivo no es producir una copia exacta del objeto "real", sino más bien representar algunas características de la cosa real. Por ejemplo, un retrato de una persona, un maniquí y un cerdo pueden ser modelos de un ser humano. Y aunque ninguno es una copia perfecta de éste, sí poseen ciertos aspectos en común con un ser humano. La pintura describe la apariencia física de un individuo en particular; el maniquí porta ropa tal como una persona y el cerdo está vivo. Cuál de los tres modelos es "mejor" depende de cómo usemos el modelo: para recordar viejos amigos, para comprar ropa o para estudiar biología.

Los modelos matemáticos que estudiaremos son sistemas que evolucionan con el tiempo, pero con frecuencia también están supeditados a otras variables. De hecho, los sistemas del mundo real pueden ser notoriamente complicados; la población de conejos en Wyoming depende del número de coyotes, del número de linces, del número de leones de montaña, del número de ratones (alimento alternativo para los depredadores), de las prácticas usuales agrícolas, del clima, de varias enfermedades típicas de los conejos, etc. Podemos elaborar un modelo de la población de conejos suficientemente simple para que sea entendible, sólo haciendo hipótesis simplificadoras y englobando los efectos que puedan o no ser comunes.

Una vez elaborado el modelo, debemos comparar las predicciones de éste con los datos del sistema. Si el modelo y el sistema concuerdan, tendremos confianza en que las hipótesis hechas al crear el modelo son razonables y que podemos usarlo para hacer predicciones; si no concuerdan, entonces debemos estudiar y mejorar nuestras suposiciones. En todo caso, aprendemos más acerca del sistema al compararlo con el modelo.

Los tipos de predicciones que son razonables dependen de nuestras hipótesis. Si nuestro modelo se basa en reglas precisas como las leyes de Newton sobre el movimiento o las reglas del interés compuesto, entonces podemos usarlo para hacer predicciones cuantitativas muy exactas. Si las hipótesis son menos precisas o si el modelo es una versión simplificada del sistema, entonces sería absurdo tratar de obtener predicciones cuantitativas exactas. En este caso, deberíamos usar el modelo para hacer predicciones cualitativas, tales como "la población de conejos en Wyoming aumentará. . .". La línea divisoria entre predicciones cualitativas y cuantitativas es en sí misma imprecisa, pero veremos que con frecuencia es mejor y más fácil usar cualitativamente aun el más preciso de los modelos.

Algunas sugerencias para la construcción de modelos

Los pasos básicos para elaborar un modelo son:

Paso 1 Establezca claramente las hipótesis en que se basará el modelo. Éstas deben describir las relaciones entre las cantidades por estudiarse.

Paso 2 Defina completamente las variables y parámetros que se usarán en el modelo.

Paso 3 Use las hipótesis formuladas en el paso 1 para obtener ecuaciones que relacionen las cantidades del paso 2.

En el paso 1, o paso "científico", describimos cómo creemos que funciona el sistema físico o, por lo menos, cuáles son sus aspectos más importantes. En algunos casos, esas hipótesis son bastante especulativas, por ejemplo, "a los conejos no les preocupa su sobrepoblación". En otros casos, las hipótesis son bastante precisas y bien aceptadas, como "la fuerza es igual al producto de la masa y la aceleración". La calidad de las hipótesis determina la validez del modelo y las situaciones en que el modelo es pertinente. Por ejemplo, algunos modelos de población se aplican sólo a pequeñas poblaciones en grandes entornos, mientras que otros consideran espacios y recursos limitados. Muy importante es evitar "hipótesis ocultas" que hagan al modelo parecer misterioso o mágico.

El paso 2 es donde nombramos las cantidades que se estudiarán y, en caso necesario, describimos las unidades y escalas implicadas. Pasar por alto este paso es como decidir que usted hablará un idioma propio sin decirle a nadie qué significan las palabras.

Las cantidades en nuestros modelos se agrupan en tres categorías básicas: la **variable independiente**, las **variables dependientes** y los **parámetros.** En este libro, la variable independiente es (casi) siempre el tiempo. El tiempo es "independiente" de cualquier otra cantidad en el modelo. Por otra parte, las variables dependientes son cantidades que son funciones de la variable independiente. Por ejemplo, en la frase "la posición es una función del tiempo", queremos decir que la posición es una variable que depende del tiempo. Es posible enunciar vagamente el objetivo de un modelo expresado en términos de una ecuación diferencial como "describa el comportamiento de la variable dependiente conforme cambie la variable independiente". Por ejemplo, podemos preguntar si la variable dependiente aumenta o disminuye o si oscila o tiende a un límite.

Los parámetros son cantidades que no cambian con el tiempo (o con la variable independiente) pero que pueden ajustarse (por causas naturales o por un científico efectuando el experimento). Por ejemplo, si estamos estudiando el movimiento de un misil, la masa inicial de éste es un parámetro. Si estamos analizando la cantidad de ozono en las capas superiores de la atmósfera, entonces la velocidad con que se liberan los fluorocarbonos de los refrigeradores es un parámetro. El aspecto más importante del estudio de un modelo consiste en determinar la manera en que cambian las variables dependientes cuando ajustamos los parámetros.

En el paso 3 formulamos las ecuaciones. La mayor parte de los modelos que consideraremos son expresados como ecuaciones diferenciales. En otras palabras, esperamos encontrar derivadas en nuestras ecuaciones. Ponga atención a frases como "razón de cambio de..." o "tasa de crecimiento de...", ya que razón de cambio es sinónimo de derivada. Por supuesto, ponga atención también a "velocidad" (derivada de la posición) y "aceleración" (derivada de la velocidad) en modelos de física. La palabra *es* significa "es igual" e indica dónde se encuentra la igualdad. La frase "A es proporcional a B" significa $A = kB$, donde k es una constante de proporcionalidad (a menudo un parámetro en el modelo).

Una importante regla empírica que usamos al formular modelos es: *Simplifique siempre que pueda el álgebra.* Por ejemplo, al modelar la velocidad v de un gato al caer de un edificio alto, podríamos suponer que:

- La resistencia del aire crece al aumentar la velocidad del gato.

Esta hipótesis supone que la resistencia del aire proporciona una fuerza que se opone a la fuerza de la gravedad y crece conforme aumenta la velocidad v del gato. Podríamos escoger kv o kv^2 para el término de la resistencia del aire, donde k es el coeficiente de fricción,

es decir, un parámetro. Ambas expresiones crecen cuando v se incrementa, por lo que satisfacen la hipótesis. Sin embargo, muy probablemente ensayaríamos primero kv porque es la expresión más simple que satisface la hipótesis. De hecho, resulta que kv genera un buen modelo para la caída de cuerpos de pequeña densidad, como los copos de nieve, pero kv^2 es un modelo más apropiado para objetos densos como gotas de lluvia.

Veremos ahora una serie de modelos de crecimiento de poblaciones, basados en varias suposiciones acerca de las especies implicadas. Nuestra meta aquí es estudiar cómo pasar de un conjunto de suposiciones a un modelo. Esos ejemplos no son modelos del "estado del arte" de la ecología de poblaciones, pero son apropiados para considerarlos inicialmente. También empezaremos a describir las técnicas analíticas, cualitativas y numéricas que usaremos para hacer predicciones basadas en esos modelos. Nuestro acercamiento pretende ser sólo ilustrativo; analizaremos esas técnicas matemáticas con mucho mayor detalle a lo largo de todo el libro.

Crecimiento ilimitado de la población

Un modelo elemental del crecimiento de una población se basa en la hipótesis de que

- La velocidad de crecimiento de la población es proporcional al tamaño de la población.

Observe que la razón de cambio de una población sólo depende del tamaño de ésta. En particular, las limitaciones de espacio o recursos no tienen efecto. Esta hipótesis es razonable para pequeñas poblaciones en grandes entornos, por ejemplo, los primeros brotes de moho en una pieza de pan o los primeros colonizadores de Estados Unidos.

Como la hipótesis es tan simple, esperamos que el modelo también lo sea. Las cantidades implicadas son

t = tiempo (variable independiente),
P = población (variable dependiente) y
k = constante de proporcionalidad (parámetro) entre la tasa de crecimiento de la población y el tamaño de ésta.

El parámetro k suele llamarse "coeficiente de velocidad de crecimiento".

Las unidades para esas cantidades dependen de la aplicación. Si estamos modelando el crecimiento de moho en el pan, entonces t podría medirse en días y $P(t)$ sería el área cubierta por el moho o bien el peso del moho. Si estamos hablando de la población europea en Estados Unidos, entonces t probablemente se medirá en años y $P(t)$ en millones de personas. En este caso haríamos corresponder $t = 0$ a cualquier tiempo que quisiéramos. El año 1790 (el año del primer censo) es una opción conveniente.

Expresemos ahora nuestra hipótesis usando esta notación. La tasa de crecimiento de la población P es la derivada dP/dt. Puesto que ésta es proporcional a la población, se expresa como el producto, kP, de la población P y la constante k de proporcionalidad. Por consiguiente, nuestra hipótesis se expresa por la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP.$$

En otras palabras, la razón de cambio de P es proporcional a P.

Éste es nuestro primer ejemplo de una ecuación diferencial. Asociada con ella hay varios adjetivos que describen su tipo. En particular, se trata de una ecuación de **primer**

orden porque contiene sólo primeras derivadas de la variable dependiente, y es una **ecuación diferencial ordinaria** porque no contiene derivadas parciales. En este libro trataremos sólo con ecuaciones diferenciales ordinarias.

Hemos escrito esta ecuación diferencial usando la notación de Leibniz, es decir, dP/dt, y es la que tenderemos a usar. Sin embargo, hay muchas otras maneras de expresar la misma ecuación diferencial. En particular, también podríamos escribirla como $P' = kP$ o como $\dot{P} = kP$. La notación "punto" suele utilizarse cuando la variable independiente es el tiempo t.

¿Qué predice el modelo?

Más importante que los adjetivos o cómo se escribe la ecuación es preguntar qué nos dice acerca de la situación que se está modelando. Como $dP/dt = kP$ para alguna constante k, $dP/dt = 0$ si $P = 0$. Entonces la función constante $P(t) = 0$ es una solución de la ecuación diferencial. A este tipo especial se le denomina **solución de equilibrio** porque es constante para siempre. En términos del modelo de población, corresponde a una especie que es no existente.

Si $P(t_0) \neq 0$ en algún tiempo t_0, entonces en el tiempo $t = t_0$

$$\frac{dP}{dt} = k\,P(t_0) \neq 0.$$

En consecuencia, la población no es constante. Si $k > 0$ y $P(t_0) > 0$, tenemos

$$\frac{dP}{dt} = kP(t_0) > 0,$$

en el tiempo $t = t_0$ y la población está creciendo (como era de esperarse). Conforme t crece, $P(t)$ se vuelve mayor, por lo que dP/dt aumenta. A su vez, $P(t)$ crece aún más rápidamente. Es decir, la velocidad de crecimiento crece en relación directa con la población. Podemos esperar por lo tanto que la gráfica de la función $P(t)$ tenga la forma mostrada en la figura 1.1.

El valor de $P(t)$ en $t = 0$ se llama una **condición inicial**. Si comenzamos con una condición inicial diferente obtenemos una función $P(t)$ distinta, como se indica en la figura 1.2. Si $P(0)$ es negativa (recordando que $k > 0$), tenemos entonces $dP/dt < 0$ para

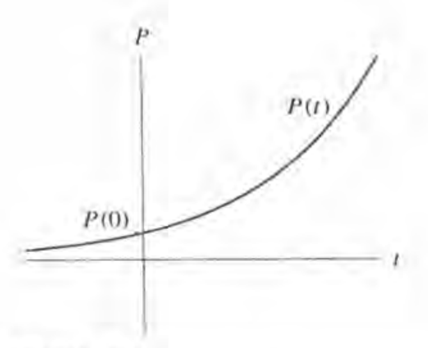


Figura 1.1
La gráfica de una función que satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP.$$

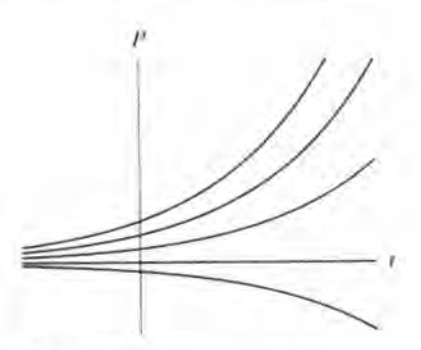


Figura 1.2
Las gráficas de diversas funciones que satisfacen la ecuación diferencial $dP/dt = kP$. Cada una tiene un valor diferente en $t = 0$.

$t = 0$, por lo que $P(t)$ inicialmente está disminuyendo. Al crecer t, $P(t)$ se vuelve más negativa. La imagen debajo del eje t es la reflexión de la imagen superior, aunque esto no es "físicamente importante" porque una población negativa no tiene sentido.

Nuestro análisis de la manera en que $P(t)$ crece cuando t aumenta se llama **análisis cualitativo** de la ecuación diferencial. Si todo lo que nos interesa es saber si el modelo predice "explosiones de población", entonces podemos responder que "sí, en tanto que $P(0) > 0$".

Soluciones analíticas de la ecuación diferencial

Si, por otra parte, conocemos el valor exacto P_0 de $P(0)$ y queremos predecir el valor de $P(10)$ o $P(100)$, entonces necesitamos información más precisa sobre la función $P(t)$. El par de ecuaciones

$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad P(0) = P_0,$$

se llama **problema de valor inicial**. Y una **solución** al problema de valor inicial es una función $P(t)$ que satisface ambas ecuaciones. Es decir

$$\frac{dP}{dt} = kP \text{ para toda } t \qquad \text{y} \qquad P(0) = P_0.$$

En consecuencia, para solucionar esta ecuación diferencial debemos hallar una función $P(t)$ cuya derivada sea el producto de k con $P(t)$. Una manera (no muy sutil) de encontrarla es hacer una conjetura. En este caso, es relativamente fácil ver cuál es la forma correcta para $P(t)$, porque sabemos que la derivada de una función exponencial es esencialmente ella misma. (Podemos eliminar este proceso de conjeturar usando el método de separación de variables que describiremos en la sección siguiente. Pero por ahora ensayaremos el método exponencial y veamos a qué nos conduce.) Después de un par de intentos con varias formas de dicha función, vemos que

$$P(t) = e^{kt}$$

su derivada, $dP/dt = ke^{kt}$, es el producto de k con $P(t)$. Pero existen otras soluciones posibles, ya que $P(t) = ce^{kt}$ (donde c es una constante) da $dP/dt = c(ke^{kt}) = k(ce^{kt}) = kP(t)$. Así $dP/dt = kP$ para toda t y para cualquier valor de la constante c.

Existe un número infinito de soluciones para la ecuación diferencial, uno para cada valor de c. Para determinar cuál de ésas es la correcta para la situación considerada, usamos la condición inicial dada. Tenemos

$$P_0 = P(0) = c \cdot e^{k \cdot 0} = c \cdot e^0 = c \cdot 1 = c.$$

En consecuencia, debemos escoger $c = P_0$, por lo que una solución del problema del valor inicial es

$$P(t) = P_0 e^{kt}.$$

Hemos obtenido una fórmula para nuestra solución, no solamente una imagen cualitativa de su gráfica.

La función $P(t)$ se llama solución al problema del valor inicial así como **solución particular** de la ecuación diferencial. El conjunto de funciones $P(t) = ce^{kt}$ se llama **solu-**

ción general de la ecuación general, porque podemos usarla para encontrar la respuesta particular correspondiente a cualquier problema de valor inicial. La figura 1.2 consiste en las gráficas de funciones exponenciales de la forma $P(t) = ce^{kt}$ con varios valores de la constante c, es decir, con diferentes valores iniciales. En otras palabras, es una imagen de la solución general de la ecuación diferencial.

La población de Estados Unidos

Para ejemplificar cómo puede usarse este modelo, consideremos las cifras de los censos de Estados Unidos desde 1790 dadas en la tabla 1.1.

Veamos qué tan bien se ajusta el modelo de crecimiento ilimitado a estos datos. Medimos el tiempo en años y la población $P(t)$ en millones de personas. Hacemos que $t = 0$ sea el año 1790, por lo que la condición inicial es $P(0) = 3.9$. El problema correspondiente de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad P(0) = 3.9,$$

tiene $P(t) = 3.9\, e^{kt}$ como solución. Pero no podemos usar este modelo para hacer predicciones porque no conocemos el valor de k. Sin embargo, sabemos que la población en el año 1800 era de 5.3 millones y podemos usar este valor para determinar k. Si hacemos

$$5.3 = P(10) = 3.9\, e^{k\cdot 10}$$

tenemos entonces

$$e^{k\cdot 10} = \frac{5.3}{3.9}$$

$$10k = \ln\left(\frac{5.3}{3.9}\right)$$

$$k \approx 0.03067.$$

Tabla 1.1
Cifras de los censos de Estados Unidos, en millones de personas (véase Funk y Wagnalls, *Almanaque Mundial de 1994*)

Año	t	Real	$P(t) = 3.9e^{0.03067t}$	Año	t	Real	$P(t) = 3.9e^{0.03067t}$
1790	0	3.9	3.9	1930	140	122	286
1800	10	5.3	5.3	1940	150	131	388
1810	20	7.2	7.2	1950	160	151	528
1820	30	9.6	9.8	1960	170	179	717
1830	40	12	13	1970	180	203	975
1840	50	17	18	1980	190	226	1 320
1850	60	23	25	1990	200	249	1 800
1860	70	31	33	2000	210		2 450
1870	80	38	45	2010	220		3 320
1880	90	50	62	2020	230		4 520
1890	100	62	84	2030	240		6 140
1900	110	75	114	2040	250		8 340
1910	120	91	155	2050	260		11 300
1920	130	105	210				

Nuestro modelo predice entonces que la población de Estados Unidos está dada por

$$P(t) = 3.9e^{0.03067t}$$

Como vemos en la figura 1.3, este modelo de $P(t)$ predice razonablemente bien la población hasta aproximadamente 1860, pero después de este año la predicción resulta muy grande. (La tabla 1.1 incluye una comparación de los valores predichos con los datos reales.)

Nuestro modelo es bastante bueno siempre que la población sea relativamente pequeña. Sin embargo, con el paso del tiempo el modelo predice que la población continuará creciendo sin límite, y obviamente esto no sucede en el mundo real. En consecuencia, si queremos un modelo que sea exacto sobre una escala grande de tiempo, debemos tomar en cuenta el hecho de que las poblaciones existen en una cantidad finita de espacio y con recursos limitados.

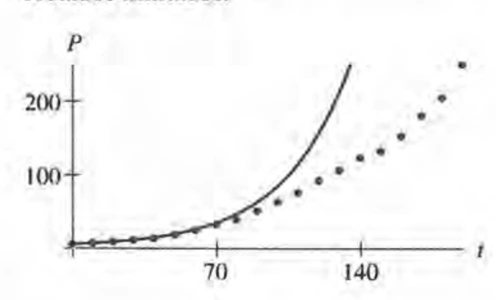


Figura 1.3
Los puntos representan datos reales del censo y la línea continua es la solución del modelo de crecimiento exponencial

$$\frac{dP}{dt} = 0.03067\,P.$$

El tiempo t se mide en años desde el año 1790.

Modelo logístico de la población

Para ajustar el modelo de crecimiento exponencial de la población que tome en cuenta un entorno y recursos limitados, agregamos las hipótesis:

- Si la población es pequeña, la razón de crecimiento de la población es proporcional a su tamaño.
- Si la población es demasiado grande para ser soportada por su entorno y recursos, la población disminuirá. Es decir, la razón de crecimiento es negativa.

Para este modelo usamos de nuevo

t = tiempo (variable independiente),
P = población (variable dependiente),
k = coeficiente de la razón de crecimiento para poblaciones pequeñas (parámetro).

Sin embargo, nuestra hipótesis acerca de recursos limitados introduce otra cantidad, el tamaño de la población que corresponde a ser "demasiado grande". Esta cantidad es un segundo parámetro, denotado por N, que llamamos la "capacidad de soporte" del entorno. En términos de la capacidad de soporte, estamos suponiendo que $P(t)$ crece si $P(t) < N$. No obstante, si $P(t) > N$, suponemos que $P(t)$ está decreciendo.

Usando esta notación, podemos reescribir nuestras hipótesis como:

- $\dfrac{dP}{dt} \approx kP$ si P es pequeña (primera hipótesis).
- Si $P > N$, $\dfrac{dP}{dt} < 0$ (segunda hipótesis).

Queremos también que el modelo sea "algebraicamente simple" o por lo menos tan simple como sea posible, por lo que tratamos de modificar el modelo exponencial lo menos posible. Por ejemplo, podríamos intentar una expresión de la forma

$$\frac{dP}{dt} = k \cdot (\text{algo}) \cdot P.$$

Queremos que el factor "algo" sea cercano a 1 si P es pequeña, pero si $P > N$, queremos que "algo" sea negativo. La expresión más simple que tienen estas propiedades es la función

$$(\text{algo}) = \left(1 - \frac{P}{N}\right).$$

Note que esta expresión es igual a 1 si $P = 0$ y es negativa si $P > N$. Nuestro modelo es entonces

$$\frac{dP}{dt} = k\left(1 - \frac{P}{N}\right)P.$$

Éste se llama el **modelo logístico de la población** con velocidad de crecimiento k y capacidad N de soporte. Se trata de otra ecuación diferencial de primer orden. Se dice que esta ecuación es **no lineal** porque su lado derecho no es una función lineal de P como lo era en el modelo de crecimiento exponencial.

Análisis cualitativo del modelo logístico

Aunque la ecuación diferencial logística es ligeramente más complicada que la del modelo de crecimiento exponencial, no hay modo de que podamos conjeturar soluciones. El método se separación de variables analizado en la sección siguiente produce una fórmula para la solución de esta ecuación diferencial particular. Pero por ahora nos apoyaremos meramente en métodos cualitativos para ver qué anticipa este modelo a largo plazo.

Primero, sea

$$f(P) = k\left(1 - \frac{P}{N}\right)P$$

el lado derecho de la ecuación diferencial. En otras palabras, la ecuación diferencial puede escribirse como

$$\frac{dP}{dt} = f(P) = k\left(1 - \frac{P}{N}\right)P.$$

Podemos obtener información cualitativa sobre las soluciones a la ecuación diferencial si sabemos cuándo dP/dt es cero, dónde es positiva y dónde es negativa.

Si trazamos la gráfica de la función cuadrática f (vea la figura 1.4), observamos que ella corta al eje P en exactamente dos puntos, $P = 0$ y $P = N$. En cualquier caso, tenemos

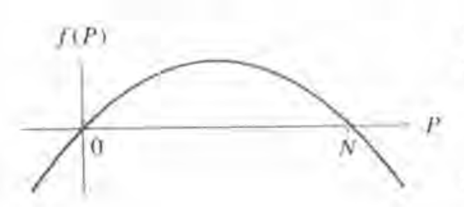


Figura 1.4
Gráfica del lado derecho

$$f(P) = k\left(1 - \frac{P}{N}\right)P$$

de la ecuación diferencial logística.

$dP/dt = 0$. Como la derivada de P desaparece para toda t, la población permanece constante si $P = 0$ o $P = N$. Es decir, las funciones constantes $P(t) = 0$ y $P(t) = N$ resuelven la ecuación diferencial. Esas dos soluciones constantes tienen mucho sentido: si la población es cero, permanecerá en cero indefinidamente; si la población es exactamente la asociada con la capacidad de soporte, ni crecerá ni disminuirá. Igual que antes, decimos que $P = 0$ y $P = N$ son *puntos de equilibrio*. Las funciones constantes $P(t) = 0$ y $P(t) = N$ son llamadas *soluciones de equilibrio* (vea la figura 1.5).

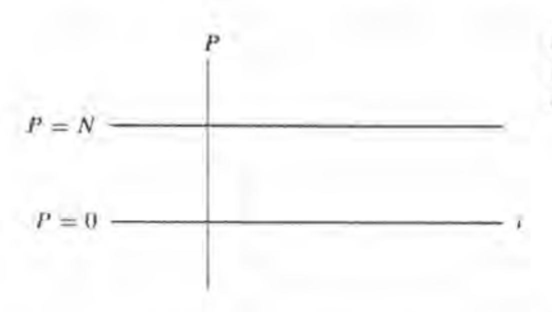


Figura 1.5
Las soluciones de equilibrio de la ecuación diferencial logística

$$\frac{dP}{dt} = k\left(1 - \frac{P}{N}\right)P.$$

El comportamiento a largo plazo de la población es muy diferente para otros valores. Si la población inicial se encuentra entre 0 y N, tenemos entonces $f(P) > 0$. En este caso, la razón de crecimiento $dP/dt = f(P)$ es positiva y en consecuencia la población $P(t)$ está creciendo. En tanto que $P(t)$ se encuentre entre 0 y N, la población continúa incrementándose. Sin embargo, cuando tiende a la capacidad de soporte N, $dP/dt = f(P)$ se acerca a cero, por lo que esperamos que la población se nivele cuando tienda a N (vea la figura 1.6).

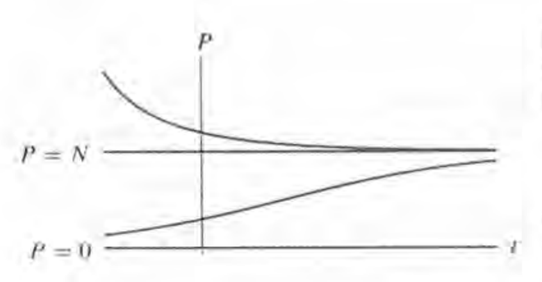


Figura 1.6
Soluciones de la ecuación diferencial logística

$$\frac{dP}{dt} = k\left(1 - \frac{P}{N}\right)P$$

aproximándose a la solución de equilibrio $P = N$.

Si $P(0) > N$, entonces $dP/dt = f(P) < 0$ y la población está disminuyendo. Y cuando tiende a la capacidad de soporte N, dP/dt se aproxima a cero y esperamos de nuevo que la población se nivele en N.

Finalmente, si $P(0) < 0$ (que no tiene sentido en términos de poblaciones), tenemos también $dP/dt = f(P) < 0$. Vemos de nuevo que $P(t)$ disminuye, pero esta vez no se nivela a ningún valor particular ya que dP/dt se vuelve más y más negativa conforme $P(t)$ decrece.

Así, a partir sólo del conocimiento de la gráfica de f, podemos esbozar varias diferentes soluciones con condiciones iniciales diferentes, todas sobre los mismos ejes. La única información que necesitamos es el hecho de que $P = 0$ y $P = N$ son soluciones de equilibrio; $P(t)$ crece si $0 < P < N$, y $P(t)$ disminuye si $P > N$ o $P < 0$. Por supuesto, los valores exactos de $P(t)$ en cualquier tiempo dado t dependerán de los valores de $P(0)$, k y N (vea la figura 1.7).

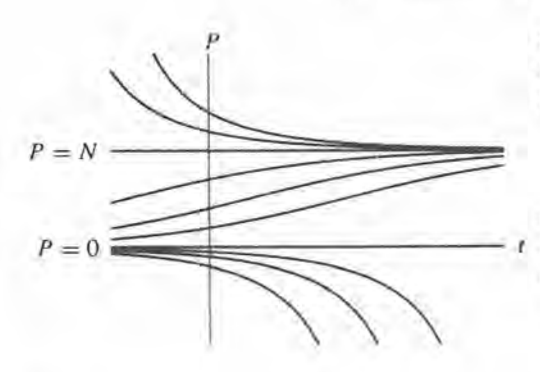


Figura 1.7
Soluciones de la ecuación diferencial logística

$$\frac{dP}{dt} = k\left(1 - \frac{P}{N}\right)P$$

aproximándose a la solución de equilibrio $P = N$ y alejándose de la solución de equilibrio $P = 0$.

Sistemas depredador-presa

Ninguna especie vive aislada y las interacciones entre especies proporcionan algunos de los modelos más interesantes por estudiar. Concluimos esta sección presentando un simple sistema depredador-presa de ecuaciones diferenciales donde una especie "se come" a la otra. La diferencia más obvia entre éste y los modelos previos es que tenemos *dos* cantidades que dependen del tiempo. Nuestro modelo tiene entonces dos variables dependientes que son ambas funciones del tiempo. En este caso llamaremos a la presa "conejos" y a los depredadores "zorros", y denotaremos la presa por C y a los depredadores por Z. Las hipótesis de nuestro modelo son:

- Si no hay zorros presentes, los conejos se reproducen a una tasa proporcional a su población y no les afecta la sobrepoblación.
- Los zorros se comen a los conejos y la razón a la que los conejos son devorados es proporcional a la tasa a la que los zorros y conejos interactúan.
- Sin conejos qué comer, la población de zorros declina a una razón proporcional a ella misma.
- La tasa de nacimientos de los zorros va en proporción al número de conejos comidos por zorros que, por la segunda hipótesis, es proporcional a la razón a la que los zorros y conejos interactúan.

Para formular este modelo en términos matemáticos, necesitamos cuatro parámetros adicionales a nuestra variable independiente t y a nuestras dos variables dependientes Z y C. Los parámetros son:

α = coeficiente de la razón de crecimiento de conejos,

β = constante de proporcionalidad que mide el número de interacciones conejos-zorros en las que el conejo es devorado,

γ = coeficiente de la razón de muertes de zorros,

δ = constante de proporcionalidad que mide el beneficio a la población de zorros de un conejo devorado.

Cuando formulamos nuestro modelo, seguimos la convención de que α, β, γ y δ son todos positivos.

Nuestras primera y tercera hipótesis anteriores son similares a la que plantea el modelo del crecimiento ilimitado, visto antes en esta sección. En consecuencia, ellos dan términos de la forma αC en la ecuación dC/dt y $-\gamma Z$ (ya que la población de zorros declina) en la ecuación para dZ/dt.

La razón a la que los conejos son devorados es proporcional a la razón de interacción entre los zorros y los conejos, por lo que necesitamos un término que modele la razón de interacción de ambas poblaciones; que crezca si C o Z aumenta, pero que desaparezca si $C = 0$ o $Z = 0$. Una notación que incorpora esas hipótesis es CZ. Modelamos así los efectos de las interacciones conejo-zorro sobre dC/dt por medio de un enunciado de la forma $-\beta CZ$. La cuarta hipótesis da un término similar en la ecuación para dZ/dt. En este caso, cazar conejos ayuda a los zorros, por lo que añadimos un término de la forma δCZ.

Al plantear esas hipótesis, obtenemos el modelo

$$\frac{dC}{dt} = \alpha C - \beta CZ$$

$$\frac{dZ}{dt} = -\gamma Z + \delta CZ.$$

Consideradas juntas, este par de expresiones se llama **sistema de primer orden** de ecuaciones diferenciales ordinarias (sólo primeras derivadas, pero más de una variable dependiente). Se dice que el sistema es *acoplado* porque las razones de cambio de C y Z dependen tanto de C como de Z.

Es importante notar los signos de los términos en este sistema. Como $\beta > 0$, el término "$-\beta CZ$" es no positivo, por lo que un incremento en el número de zorros disminuye la razón de crecimiento de la población de conejos. Además, como $\delta > 0$, el término "δCZ" es no negativo. En consecuencia, un incremento en el número de conejos incrementa la tasa de crecimiento de la población de zorros.

Aunque este modelo puede parecer relativamente simple, ha sido la base de algunos interesantes estudios ecológicos. En particular, Volterra y D'Ancona usaron con éxito el modelo para explicar el incremento en la población de tiburones en el mar Mediterráneo durante la Primera Guerra Mundial, cuando la pesca de las especies "presa" decreció. El modelo puede también usarse como base para el estudio de los efectos de los pesticidas en la población de insectos depredadores e insectos presas.

Una *solución* para este sistema de ecuaciones es, a diferencia de nuestro modelos previos, un par de funciones, $C(t)$ y $Z(t)$, que describen las poblaciones de conejos y zorros como funciones del tiempo. Como el sistema es acoplado, no podemos determinar cada una de esas funciones en forma aislada. Más bien, debemos resolver ambas ecuaciones diferenciales en forma simultánea. Desafortunadamente, para la mayor parte de los valores de los parámetros, es imposible determinar de modo explícito fórmulas para $C(t)$ y $Z(t)$. Esas funciones no pueden expresarse en términos de funciones conocidas tales como polinomios, senos, cosenos, exponenciales y otras parecidas. Sin embargo, como veremos en el capítulo 2, esas soluciones existen, aunque no hay esperanzas de encontrarlas jamás exactamente. Como los métodos analíticos para resolver este sistema están destinados a fallar, debemos usar procedimientos cualitativos o numéricos para "encontrar" $C(t)$ y $Z(t)$.

Los enfoques analítico, cualitativo y numérico

Nuestro análisis de los tres modelos de población en esta sección ilustra tres enfoques diferentes para el estudio de las soluciones de las ecuaciones diferenciales. El enfoque **analítico** busca fórmulas explícitas que describan el comportamiento de las soluciones. Vimos aquí que las funciones exponenciales dan soluciones explícitas al modelo del crecimiento exponencial. Desafortunadamente, un gran número de ecuaciones importantes no pueden

tratarse con el método analítico; simplemente no hay manera de encontrar una fórmula exacta que describa la situación. Nos vemos entonces forzados a recurrir a métodos alternativos.

Un procedimiento particularmente poderoso para describir el comportamiento de las soluciones es el enfoque **cualitativo**. Éste implica usar la geometría para tener un panorama del comportamiento del modelo, tal como lo hicimos con el modelo logístico del crecimiento de la población. No lo utilizamos para dar valores precisos de la solución en tiempos específicos, pero sí para determinar su comportamiento a largo plazo. Con frecuencia, ésta es justamente la clase de información que requerimos.

El tercer enfoque para resolver ecuaciones diferenciales es **numérico**. La computadora aproxima la solución que buscamos. Aunque no ilustramos ninguna técnica de aproximación numérica en esta sección, veremos pronto que son una herramienta poderosa para darnos ideas respecto a las soluciones que deseamos.

Los tres métodos que usamos tienen sus ventajas y también desventajas. Algunas veces ciertos métodos son útiles mientras que otros no lo son. Una de nuestras principales tareas al estudiar las soluciones de ecuaciones diferenciales será determinar qué método, o combinación de éstos, funciona bien en cada caso específico. En las siguientes tres secciones veremos con más detalle esos tres enfoques.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 1.1

1. Considere el modelo de población

$$\frac{dP}{dt} = 0.4P\left(1 - \frac{P}{230}\right),$$

donde $P(t)$ es la población en el tiempo t.

(a) ¿Para qué valores de P está en equilibrio la población?
(b) ¿Para qué valores de P está creciendo la población?
(c) ¿Para qué valores de P está decreciendo la población?

2. Considere el modelo de población

$$\frac{dP}{dt} = 0.3\left(1 - \frac{P}{200}\right)\left(\frac{P}{50} - 1\right)P,$$

donde $P(t)$ es la población en el tiempo t.

(a) ¿Para qué valores de P está en equilibrio la población?
(b) ¿Para qué valores de P está creciendo la población?
(c) ¿Para qué valores de P está decreciendo la población?

3. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y^3 - y^2 - 12y.$$

(a) ¿Para qué valores de y está $y(t)$ en equilibrio?
(b) ¿Para qué valores de y está $y(t)$ creciendo?
(c) ¿Para qué valores de y está $y(t)$ decreciendo?

4. La siguiente tabla proporciona el área de terreno en Australia colonizada por el sapo marino americano *(Bufo marinis)* cada cinco años desde 1939 hasta 1974. Modele la migración de este sapo usando un modelo de crecimiento exponencial

$$\frac{dA}{dt} = kA,$$

donde $A(t)$ es el área de terreno ocupada en el tiempo t. Haga predicciones acerca de la superficie de terreno ocupada en los años 2010, 2050 y 2100. Hágalo

(a) resolviendo el problema de valor inicial,
(b) determinando la constante k,
(c) calculando las áreas predichas, y
(d) comparando su solución con los datos reales. ¿Cree usted en su predicción?

Año	Área ocupada acumulativa (km^2)
1939	32 800
1944	55 000
1949	73 600
1954	138 000
1959	202 000
1964	257 000
1969	301 000
1974	584 000

(Observe que hay muchos modelos de crecimiento exponencial que puede usted formar usando estos datos. ¿Hay un modelo más razonable que los otros? Note también que el área de Queensland es de 1 728 000 km^2 y que el área de Australia es de 7 619 000 km^2.)*

Observación: El sapo marino americano fue introducido a Australia para controlar los escarabajos de la caña de azúcar y, en las palabras de J. W. Hedgpath (véase *Science*, julio de 1993 y *The New York Times*, 6 de julio de 1993),

> Desafortunadamente los sapos comen en la noche y los escarabajos están ausentes durante el día, mientras los sapos duermen bajo rocas, troncos de madera y en surcos. Por la noche, estos batracios medran, se reproducen fenomenalmente bien y devoran todo lo que encuentran. Los cultivadores de caña de azúcar fueron advertidos por Walter W. Froggart, presidente de la Sociedad Naturalista de Nueva Gales del Sur, que la introducción no era una buena idea y que los sapos se comerían la fauna nativa. Froggart fue inmediatamente denunciado como un entrometido ignorante. Pero él tenía razón.

*Todos los datos fueron tomados de "Cumulative Geographical Range of *Bufo marinis* in Queensland, Australia from 1935 to 1974", por Michael D. Sabath, Walter C. Boughton y Simon Easteal, en *Copeia*, Núm. 3, 1981, pp. 676-680.

Los ejercicios 5 al 7 consideran un modelo elemental del proceso de aprendizaje: si bien el aprendizaje humano es un proceso extremadamente complicado, es posible construir modelos de ciertos tipos simples de memorización. Por ejemplo, considere una persona a quien se le da una lista para estudiar, y posteriormente se le hacen pruebas periódicas para determinar exactamente qué tanto de la lista ha memorizado. (Por lo general las listas consisten en sílabas sin sentido, números de tres dígitos generados al azar o entradas de tablas de integrales.) Si $L(t)$ es la fracción de la lista aprendida en el tiempo t, donde $L = 0$ corresponde a no saber nada del listado y $L = 1$ corresponde a saberlo por completo, podemos entonces formar un simple modelo de este tipo de aprendizaje con base en las hipótesis:

- La tasa dL/dt es proporcional a la fracción que queda por aprender.

Como $L = 1$ corresponde a saber la lista entera, el modelo es

$$\frac{dL}{dt} = k(1 - L),$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

5. ¿Para qué valor de L, $0 \leq L \leq 1$, ocurre más rápidamente el aprendizaje?

6. Suponga que dos estudiantes memorizan listas de acuerdo con el mismo modelo:

$$\frac{dL}{dt} = 2(1 - L).$$

(a) Si uno de los estudiantes aprende la mitad de la lista en el tiempo $t = 0$ y el otro no memoriza nada de ella, ¿qué estudiante está aprendiendo más rápidamente en este instante?

(b) ¿Alcanzará el estudiante que comienza sin saber nada de la lista al estudiante que empieza sabiendo la mitad de la lista?

7. Considere las dos siguientes ecuaciones diferenciales que modelan las tasas de memorización de un poema por dos estudiantes. La tasa de Juan es proporcional a la cantidad por aprender, con una constante de proporcionalidad de $k = 2$. La tasa de Berta es proporcional al cuadrado de la cantidad por aprender y cuya constante de proporcionalidad es $k = 3$. Las ecuaciones diferenciales correspondientes son

$$\frac{dL_J}{dt} = 2(1 - L_J) \quad \text{y} \quad \frac{dL_B}{dt} = 3(1 - L_B)^2,$$

donde $L_J(t)$ y $L_B(t)$ son las fracciones del poema memorizadas en el tiempo t por Juan y Berta, respectivamente.

(a) ¿Qué estudiante tiene una tasa más rápida de aprendizaje en $t = 0$, si ambos empiezan la memorización juntos y nunca antes han visto el poema?

(b) ¿Qué estudiante tiene una tasa más rápida de aprendizaje en $t = 0$, si ambos comienzan a memorizar juntos habiendo aprendido la mitad del poema?

(c) ¿Qué estudiante tiene una tasa más rápida de aprendizaje en $t = 0$, si ambos comienzan la memorización juntos y habiendo aprendido un tercio del poema?

En los ejercicios 8 a 12, consideramos el fenómeno de la desintegración radiactiva que, por experimentación, sabemos que se comporta de acuerdo con la ley siguiente:

> La tasa a la que una cantidad de un isótopo radiactivo se desintegra es proporcional a la cantidad del isótopo presente. La constante de proporcionalidad depende sólo de la partícula radiactiva considerada.

8. Modele la desintegración radiactiva usando la notación

t = tiempo (variable independiente),

$r(t)$ = cantidad del isótopo radiactivo particular presente en el tiempo t (variable dependiente),

$-\lambda$ = tasa de desintegración (parámetro).

Observe que el signo menos se usa para que $\lambda > 0$.

(a) Usando esta notación, escriba un modelo para la desintegración de un isótopo radiactivo particular.

(b) Si la cantidad del isótopo presente en $t = 0$ es r_0, establezca el problema de valor inicial correspondiente para el modelo en la parte (a).

9. La **vida media** de un isótopo radiactivo es la cantidad de tiempo que toma a una cantidad de material radiactivo desintegrarse a la mitad de su cantidad original.

(a) La vida media del carbono 14 (C-14) es de 5 230 años. Determine el parámetro λ de tasa de desintegración del C-14.

(b) La vida media del iodo 131 (I-131) es de 8 días. Calcule el parámetro de tasa de desintegración del I-131.

(c) ¿Cuáles son las unidades de los parámetros de tasa de desintegración en las partes (a) y (b)?

(d) Para estimar la vida media de un isótopo, podríamos comenzar con 1000 átomos del isótopo y medir la cantidad de tiempo que le toma a 500 de ellos desintegrarse o podríamos comenzar con 10 000 átomos del isótopo y medir la cantidad de tiempo que le toma desintegrarse a 5 000 de ellos. ¿Obtendremos la misma respuesta? Explíquelo.

10. El fechado por carbono es un método para determinar el tiempo transcurrido desde la muerte del material orgánico. Las hipótesis implícitas en el fechado por carbono son que

- El carbono 14 (C-14) constituye una proporción constante del carbono que la materia viva ingiere según una base regular, y
- una vez que la materia muere, el C-14 presente se desintegra, pero ningún átomo nuevo es agregado a la materia.

Entonces, al medir la cantidad de C-14 que aún permanece en la materia orgánica y al compararla con la cantidad de C-14 encontrada en la materia viva, puede calcularse el "tiempo desde la muerte". Usando el parámetro de la tasa de desintegración que usted estimó en el ejercicio 9, determine el tiempo desde la muerte si

(a) 88% del C-14 original aún está presente en el material.

(b) 12% del C-14 original aún está presente en el material.

(c) 2% del C-14 original aún está presente en el material.
(d) 98% del C-14 original aún está presente en el material.

Observación: Se ha especulado que la cantidad de C-14 disponible en los seres vivos no ha sido exactamente constante durante largos periodos (miles de años). Esto hace que un fechado preciso sea mucho más difícil de determinar.

11. Para aplicar la técnica del fechado por carbono del ejercicio 10, debemos medir la cantidad de C-14 en una muestra. Químicamente, el carbono 14 (C-14) y el carbono regular se comportan idénticamente. ¿Cómo podemos determinar la cantidad de C-14 en una muestra? [*Sugerencia:* Vea el ejercicio 8.]

12. El isótopo radiactivo I-131 se usa en el tratamiento de la hipertiroides. El I-131 administrado a un paciente se acumula en forma natural en la glándula tiroides, donde se desintegra y acaba con parte de la glándula.

(a) Suponga que se requieren 72 horas para enviar el I-131 del productor al hospital. ¿Qué porcentaje de la cantidad originalmente enviada llega al hospital? (Vea el ejercicio 9.)
(b) Si el I-131 es almacenado en el hospital 48 horas adicionales antes de ser usado, ¿qué tanto queda de la cantidad original enviada por el productor cuando el material radiactivo se utilice?
(c) ¿Qué tiempo le tomará al I-131 desintegrarse *completamente* de manera que el hospital pueda deshacerse de los residuos sin precauciones especiales?

13. Suponga que una especie de pez en un lago específico tiene una población que sigue el modelo logístico de población con razón k de crecimiento, capacidad N de soporte y tiempo t medido en años. Ajuste el modelo para tomar en cuenta cada una de las situaciones siguientes.

(a) 100 peces son cultivados cada año.
(b) Un tercio de la población de peces es cultivada anualmente.
(c) El número de peces cultivados cada año es proporcional a la raíz cuadrada del número de peces en el lago.

14. Suponga el parámetro $k = 0.3$ de razón de crecimiento y la capacidad $N = 2\,500$ de soporte en el modelo logístico de población del ejercicio 13. Y también que $P(0) = 2\,500$.

(a) Si 100 peces son cultivados cada año, ¿qué predice el modelo para el comportamiento a largo plazo de la población de peces? En otras palabras, ¿qué da un análisis cualitativo del modelo?
(b) Si cada año se cultiva una tercera parte de los peces, ¿qué predice el modelo para el comportamiento a largo plazo de dicha población?

15. El rinoceronte es actualmente muy raro. Suponga que se aparta suficiente terreno para su preservación y que hay entonces suficiente espacio para muchos más territorios de rinocerontes que rinocerontes. En consecuencia, no habrá peligro de una sobrepoblación. Sin embargo, si la población es muy pequeña, los adultos fértiles tendrán dificultad en encontrarse cuando sea el tiempo de apareamiento. Escriba una ecuación diferencial que modele la población de rinocerontes con base en esas hipótesis. (Note que hay más de un modelo razonable que se ajusta a esas suposiciones.)

16. Considere las siguientes hipótesis respecto a la fracción de una pieza de pan cubierta por moho.

- Las esporas de moho caen sobre el pan a una razón constante.
- Cuando la proporción cubierta es pequeña, la fracción del pan cubierto por el moho se incrementa a una razón proporcional a la cantidad de pan cubierto.
- Cuando la fracción de pan cubierto por el moho es grande, la razón de crecimiento disminuye.
- Para sobrevivir, el moho debe estar en contacto con el pan.

Usando estas hipótesis, escriba una ecuación diferencial que modele la proporción de una pieza de pan cubierta por moho. (Observe que hay más de un modelo razonable que se ajuste a esas hipótesis.)

17. La siguiente tabla contiene datos sobre la población de búhos amarillos (autillos) en Wyman Woods, Oxford, Inglaterra (recopilados por Southern).*

(a) ¿Qué modelo de población usaría usted para modelar esta población?
(b) ¿Puede usted calcular (o por lo menos hacer estimaciones razonables) los valores del parámetro?
(c) ¿Qué predice su modelo para la población actual?

Año	Población	Año	Población
1947	34	1954	52
1948	40	1955	60
1949	40	1956	64
1950	40	1957	64
1951	42	1958	62
1952	48	1959	64
1953	48		

18. Para los siguientes sistemas depredador-presa, identifique qué variable dependiente, x o y, es la población presa y cuál es la población depredadora. ¿Está limitado el crecimiento de la población presa por otros factores ajenos al número de depredadores? ¿Tienen los depredadores fuentes de alimento aparte de las presas? (Suponga que los parámetros α, β, γ, δ y N son todos positivos.)

(a) $$\frac{dx}{dt} = -\alpha x + \beta xy$$
$$\frac{dy}{dt} = \gamma y - \delta xy$$

(b) $$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \alpha \frac{x^2}{N} - \beta xy$$
$$\frac{dy}{dt} = \gamma y + \delta xy$$

19. En los siguientes modelos de población depredador-presa, x representa la presa y y representa los depredadores.

(i) $$\frac{dx}{dt} = 5x - 3xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -2y + \tfrac{1}{2}xy$$

(ii) $$\frac{dx}{dt} = x - 8xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -2y + 6xy$$

*Vea J. P. Dempster, *Animal Population Ecology*, Academic Press, 1975, p. 99.

(a) ¿En qué sistema se reproduce más rápidamente la presa cuando no hay depredadores (cuando $y = 0$) e igual número de presas?

(b) ¿En qué sistema tienen los depredadores más exito de cazar presas? En otras palabras, si el número de depredadores y presas son iguales para los dos sistemas, ¿en qué sistema tienen los depredadores un mayor efecto sobre la razón de cambio de las presas?

(c) ¿Qué sistema requiere más presas para que los depredadores logren una tasa de crecimiento dada (suponiendo números idénticos de depredadores en ambos casos)?

20. El sistema

$$\frac{dx}{dt} = ax - by\sqrt{x}$$
$$\frac{dy}{dt} = cy\sqrt{x}$$

ha sido propuesto como un modelo para un sistema depredador-presa de dos especies particulares de microorganismos (donde a, b y c son parámetros positivos).

(a) ¿Qué variable, x o y, representa la población depredadora? ¿Qué variable representa la población presa?

(b) ¿Qué pasa a la población depredadora si la presa se extingue?

21. Los siguientes sistemas son modelos de las poblaciones de parejas de especies que *compiten* por recursos (un incremento en una especie disminuye la tasa de crecimiento de la otra) o *cooperan* (un incremento en una especie aumenta la razón de crecimiento de la otra). Para cada sistema identifique las variables (independiente o dependiente) y los parámetros (capacidad de soporte, medidas de interacción entre las especies, etc.). ¿Compiten o cooperan las especies? (Suponga que todos los parámetros son positivos.)

(a)
$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \alpha\frac{x^2}{N} + \beta xy$$
$$\frac{dy}{dt} = \gamma y + \delta xy$$

(b)
$$\frac{dx}{dt} = -\gamma x - \delta xy$$
$$\frac{dy}{dt} = \alpha y - \beta xy$$

1.2 TÉCNICA ANALÍTICA: SEPARACIÓN DE VARIABLES

¿Qué es una ecuación diferencial y qué es una solución?

Una ecuación diferencial de primer orden es una ecuación para una función desconocida en términos de su derivada. Como vimos en la sección previa, hay tres tipos de "variables" en las ecuaciones diferenciales: la variable independiente (casi siempre el tiempo t en nuestros ejemplos), una o más variables dependientes (que son funciones de la variable independiente) y los parámetros. Esta terminología es estándar pero un poco confusa. La variable dependiente es en realidad una función, por lo que técnicamente debería llamarse función dependiente.

La forma estándar para una ecuación diferencial de primer orden es

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y).$$

Aquí el lado derecho depende por lo común tanto de la variable dependiente como de la independiente, aunque a menudo encontramos casos en que t o y están ausentes.

Una **solución** de la ecuación diferencial es una función de la variable independiente que, al ser sustituida en la ecuación como la variable dependiente, satisface todos los valores de la variable independiente en la ecuación. Es decir, una función $y(t)$ es una solución si satisface la relación $dy/dt = y'(t) = f(t, y(t))$. Esta terminología no nos dice cómo encontrar soluciones, pero sí cómo verificar si una función candidato es o no una solución. Por ejemplo, considere la simple ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y$$

Podemos comprobar fácilmente que la función $y_1(t) = 3e^t$ es una respuesta, mientras que $y_2(t) = \text{sen}\, t$ no lo es. La función $y_1(t)$ es una solución porque

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{d(3e^t)}{dt} = 3e^t = y_1 \quad \text{para toda } t.$$

Por otra parte, $y_2(t)$ no lo es ya que

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{d(\text{sen}\, t)}{dt} = \cos t,$$

y ciertamente la función $\cos t$ no es la misma función que $y_2(t) = \text{sen}\, t$.

Verificación de que una función es una solución para una ecuación

Si nos fijamos en una ecuación más complicada tal como

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y^2 - 1}{t^2 + 2t},$$

tenemos entonces considerablemente más trabajo en encontrar una solución. Por otra parte, si alguien nos propone una función $y(t)$, sabemos cómo verificar si se trata o no de una solución.

Por ejemplo, suponga que encontramos tres autores de textos sobre ecuaciones diferenciales, digamos, Pablo, Roberto y Juan, en la cafetería de la Universidad y les pedimos que encuentren soluciones para esta ecuación diferencial. Después de algunos minutos de furioso calcular, Pablo afirma que

$$y_1(t) = 1 + t$$

es una solución. Juan dice que

$$y_2(t) = 1 + 2t$$

es una solución. Después de varios minutos más, Roberto dice que

$$y_3(t) = 1$$

es una solución. ¿Cuál de esas funciones es una solución? Veamos quién tiene razón sustituyendo cada función en la ecuación diferencial.

Primero ensayamos la función de Pablo. Calculamos el lado izquierdo de la ecuación diferenciando $y_1(t)$. Tenemos

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{d(1+t)}{dt} = 1.$$

Sustituyendo $y_1(t)$ en el lado derecho, encontramos

$$\frac{(y_1(t))^2 - 1}{t^2 + 2t} = \frac{(1+t)^2 - 1}{t^2 + 2t} = \frac{t^2 + 2t}{t^2 + 2t} = 1.$$

El lado izquierdo y el lado derecho de la ecuación diferencial son idénticos, por lo que Pablo está en lo correcto.

Para verificar la función de Juan, calculamos de nuevo la derivada

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{d(1+2t)}{dt} = 2.$$

Con $y_2(t)$, el lado derecho de la ecuación diferencial es

$$\frac{(y_2(t))^2 - 1}{t^2 + 2t} = \frac{(1+2t)^2 - 1}{t^2 + 2t} = \frac{4t^2 + 4t}{t^2 + 2t} = \frac{4(t+1)}{t+2}.$$

El lado izquierdo de la ecuación diferencial no es igual al lado derecho para toda t ya que el lado derecho no es la función constante 2. La función de Juan *no* es una solución.

Finalmente, revisamos la función de Roberto de la misma manera. El lado izquierdo es

$$\frac{dy_3}{dt} = \frac{d(1)}{dt} = 0$$

ya que $y_3(t) = 1$ es una constante. El lado derecho es

$$\frac{y_3(t)^2 - 1}{t^2 + t} = \frac{1 - 1}{t^2 + t} = 0.$$

Tanto el lado izquierdo como el derecho de la ecuación diferencial desaparecen para toda t. Por consiguiente, la función de Roberto *es* una solución de la ecuación diferencial.

Las lecciones que aprendemos de este ejemplo son que una ecuación diferencial puede tener soluciones que se ven algebraicamente muy diferentes una de otra y que, por supuesto, no toda función es una solución. Dada una función, podemos comprobar si ésta es una solución sustituyéndola en la ecuación diferencial y viendo si el lado izquierdo es idéntico al lado derecho. Éste es un buen aspecto de las ecuaciones diferenciales: *siempre podemos verificar nuestras respuestas*. Entonces, nunca deberíamos equivocarnos en esto.

Problemas de valor inicial y la solución general

Cuando encontramos ecuaciones diferenciales en la práctica, suelen aparecer con **condiciones iniciales**. Buscamos una solución de la ecuación que presupone un valor dado en un tiempo particular. Una ecuación diferencial junto a una condición inicial se llama **problema de valor inicial.** La forma usual de un problema de valor inicial es

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

Buscamos aquí una función $y(t)$ que sea una solución de la ecuación diferencial y que tenga el valor y_0 en el tiempo t_0. A menudo, el tiempo particular considerado es $t = 0$ (por ello el nombre de *condición inicial*), pero podría especificarse cualquier otro tiempo.

Por ejemplo,

$$\frac{dy}{dt} = t^3 - 2\,\mathrm{sen}\,t, \qquad y(0) = 3.$$

es un problema de valor inicial. Para resolverlo, observe que el lado derecho de la ecuación diferencial depende sólo de t y no de y. Debemos encontrar una función cuya derivada sea $t^3 - 2$ sen t. Éste es un problema común de antidiferenciación, por lo que todo lo que necesitamos es integrar esta expresión. Encontramos

$$\int (t^3 - 2\,\mathrm{sen}\,t)\,dt = \frac{t^4}{4} + 2\cos t + c,$$

donde c es una constante de integración. Entonces la solución de la ecuación diferencial debe tener la forma

$$y(t) = \frac{t^4}{4} + 2\cos t + c.$$

Usamos ahora la condición inicial $y(0) = 3$ para determinar c:

$$3 = y(0) = \frac{0^4}{4} + 2\cos 0 + c = 0 + 2 \cdot 1 + c = 2 + c.$$

Entonces, $c = 1$, y la solución de este problema de valor inicial es

$$y(t) = \frac{t^4}{4} + 2\cos t + 1.$$

La expresión

$$y(t) = \frac{t^4}{4} + 2\cos t + c$$

se llama **solución general** de la ecuación diferencial porque podemos usarla para resolver cualquier problema de valor inicial. Por ejemplo, si la condición inicial es $y(0) = \pi$, escogeríamos entonces $c = \pi - 2$ para resolver el problema de valor inicial $dy/dt = t^3 - 2$ sen t, $y(0) = \pi$.

Ecuaciones separables

Ahora que ya sabemos revisar si una función dada es una solución de una ecuación diferencial, la pregunta es: ¿cómo obtenemos una solución? Desafortunadamente, es raro el caso en que podemos encontrar soluciones explícitas para una ecuación diferencial. Puesto que muchas de estas igualdades tienen soluciones que no pueden expresarse en términos de funciones conocidas como polinomios, exponenciales o funciones trigonométricas. Sin embargo, existen unos pocos tipos especiales de ecuaciones diferenciales para las cuales podemos obtener soluciones explícitas, y en esta sección analizaremos uno de esos tipos de ecuaciones.

La ecuación diferencial de primer orden común es dada por la forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y).$$

El lado derecho de esta ecuación contiene generalmente tanto la variable independiente t como la variable dependiente y (aunque hay muchos ejemplos importantes en los que t o y están ausentes). Una ecuación diferencial se llama **separable** si la función $f(t, y)$ puede escribirse como el producto de dos funciones: una que dependa sólo de t y otra que dependa sólo de y. Es decir, una ecuación diferencial es separable si puede escribirse en la forma

$$\frac{dy}{dt} = g(t)h(y).$$

Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = yt$$

es claramente separable y la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = y + t$$

no lo es. Podríamos tener que trabajar un poco para evidenciar que una ecuación es separable. Por ejemplo,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t+1}{ty+t}$$

es separable ya que podemos escribir la ecuación como

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(t+1)}{t(y+1)} = \left(\frac{t+1}{t}\right)\left(\frac{1}{y+1}\right).$$

Dos importantes tipos de ecuaciones separables se presentan si t o y están ausentes en el lado derecho de la ecuación. La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = g(t)$$

es separable puesto que consideramos el lado derecho como $g(t) \cdot 1$, donde 1 constituye una función (muy simple) de y. De manera similar,

$$\frac{dy}{dt} = h(y)$$

es también separable. Este último tipo de ecuación diferencial se llama **autónoma**. Muchas de las ecuaciones diferenciales de primer orden más importantes que surgen en aplicaciones (incluidas todas las de nuestros modelos en la sección previa) son autónomas. Por ejemplo, el lado derecho de la ecuación logística

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{N}\right)$$

sólo depende de la variable P, por lo que esta ecuación es autónoma.

Cómo resolver ecuaciones diferenciales separables

Para encontrar soluciones explícitas de ecuaciones diferenciales separables, usamos un procedimiento común del cálculo. A fin de ilustrar el método, consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{y^2}.$$

Se antoja resolver esta ecuación simplemente integrando ambos lados de la ecuación con respecto a t. Esto da

$$\int \frac{dy}{dt}\, dt = \int \frac{t}{y^2}\, dt,$$

y, en consecuencia,

$$y(t) = \int \frac{t}{y^2}\, dt.$$

Ahora estamos atorados. No podemos evaluar la integral en el lado derecho porque no conocemos la función $y(t)$. De hecho, ésta es precisamente la función que queremos encontrar. Sólo hemos reemplazado la derivada por una *ecuación integral.*

Tenemos que hacerle algo a esta ecuación *antes* de tratar de integrarla. Volviendo a la ecuación diferencial original

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{y^2},$$

efectuamos algo de álgebra "informal" y reescribimos esta ecuación en la forma

$$y^2\, dy = t\, dt.$$

Es decir, multiplicamos ambos lados por $y^2\, dt$. Por supuesto, no tiene sentido escindir dy/dt multiplicándola por dt. Sin embargo, esto debe recordarle la técnica de cálculo integral conocida como sustitución-u. Veremos pronto que esa sustitución es exactamente lo que estamos haciendo aquí.

Integramos ahora ambos lados: el izquierdo con respecto a y, y el derecho con respecto a t. Tenemos

$$\int y^2\, dy = \int t\, dt,$$

lo que da

$$\frac{y^3}{3} = \frac{t^2}{2} + c.$$

Técnicamente, tenemos una constante de integración en ambos lados de esta ecuación, pero podemos agruparlas en una sola constante c a la derecha. Para ello, reescribimos esta expresión como

$$y(t) = \left(\frac{3t^2}{2} + 3c\right)^{1/3};$$

o como c es una constante arbitraria, podemos representarla más compactamente como

$$y(t) = \left(\frac{3t^2}{2} + k\right)^{1/3},$$

donde k es una constante arbitraria. El paso siguiente consiste en comprobar que esta expresión es realmente una solución de la ecuación diferencial, y a pesar de la dudosa separación que acabamos de efectuar, obtenemos al final una respuesta.

Vea que este proceso ofrece muchas formas de solucionar la ecuación diferencial. Cada valor de la constante k da un resultado diferente.

¿Qué pasa realmente en nuestra álgebra informal?

Si leyó usted atentamente el ejemplo previo, es probable que un punto de él lo ponga nervioso. El tratar dt como una variable es una advertencia de que realmente está ocurriendo algo más complicado.

Comenzamos con una ecuación separable

$$\frac{dy}{dt} = g(t)h(y),$$

que reescribimos como

$$\frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dt} = g(t).$$

Esta ecuación tiene en realidad una función de t en cada lado del signo de igual porque y es una función de t. Deberíamos entonces escribirla como

$$\frac{1}{h(y(t))}\frac{dy}{dt} = g(t).$$

En esta forma, podemos integrar ambos lados con respecto a t para obtener

$$\int \frac{1}{h(y(t))}\frac{dy}{dt}\,dt = \int g(t)\,dt.$$

Ahora el paso importante: hacemos una "sustitución-u", tal como en cálculo, reemplazando la función $y(t)$ por la nueva variable, digamos y. (En este caso, la sustitución es en realidad una sustitución-y.) Por supuesto, debemos también reemplazar la expresión $(dy/dt)\,dt$ por dy. El método de sustitución del cálculo nos dice que

$$\int \frac{1}{h(y(t))}\frac{dy}{dt}\,dt = \int \frac{1}{h(y)}\,dy,$$

y por tanto podemos combinar las dos últimas ecuaciones para obtener

$$\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(t)\,dt.$$

Por consiguiente, podemos integrar el lado izquierdo con respecto a y y el lado derecho con respecto a t.

Separar variables y multiplicar ambos lados de la ecuación diferencial por dt es simplemente una convención notacional que nos ayuda a recordar el método. Es justificable por el desarrollo anterior.

Soluciones faltantes

Si es posible separar las variables en una ecuación diferencial, parecería que resolver la ecuación se reduce a calcular varias integrales. Esto es cierto, pero hay algunos escollos ocultos, como lo veremos en el siguiente ejemplo. Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y^2.$$

Ésta es una ecuación autónoma y por tanto separable; su solución parece ser directa. Si separamos e integramos como es usual, tenemos

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dt$$

$$-\frac{1}{y} = t + c$$

$$y(t) = -\frac{1}{t+c}.$$

Se antoja decir que esta expresión para $y(t)$ es la solución general. Sin embargo, no podemos resolver todos los problemas de valor inicial con soluciones de este tipo. De hecho, tenemos $y(0) = -1/c$, por lo que no podemos usar esta expresión para resolver el problema de valor inicial $y(0) = 0$.

¿Dónde está el error? Observe que el lado derecho de la ecuación diferencial desaparece si $y = 0$. Entonces la función constante $y(t) = 0$ es una solución para esta ecuación diferencial. En otras palabras, además de las soluciones que obtuvimos usando el método de separación de variables, esta ecuación diferencial posee la solución de equilibrio $y(t) = 0$ para toda t, y con ello se satisface el problema de valor inicial $y(0) = 0$. Aun cuando está "ausente" de la familia de soluciones que obtuvimos al separar variables, es la que necesitamos si queremos resolver todo problema de valor inicial de esta ecuación diferencial. La solución general consiste entonces en funciones de la forma $y(t) = -1/(t+c)$ junto con la solución de equilibrio $y(t) = 0$.

Cayendo en un atolladero

Como ejemplo adicional, consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{1+y^2}.$$

Igual que antes, esta ecuación es autónoma. Separamos primero las variables para obtener

$$\left(\frac{1+y^2}{y}\right) dy = dt.$$

Luego integramos

$$\int \left(\frac{1}{y} + y\right) dy = \int dt,$$

lo que da

$$\ln|y| + \frac{y^2}{2} = t + c$$

Pero ahora estamos en problemas; no hay modo de resolver la ecuación

$$\ln|y| + \frac{y^2}{2} = t + c.$$

para y sola. No podemos generar una fórmula explícita para y. Sin embargo, tenemos una **forma implícita** para la solución que, para muchos fines, es perfectamente aceptable.

Aun cuando no obtenemos soluciones explícitas al separar variables en esta ecuación, podemos encontrar alguna. El lado derecho desaparece si $y = 0$. Así, la función constante $y(t) = 0$ es una solución de equilibrio. Note que esta solución de equilibrio no aparece en la solución implícita que obtuvimos con el método de separación de variables.

Hay otro problema que surge con este método. A menudo es imposible llevar a cabo las integraciones requeridas. Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \sec(y^2)$$

es autónoma. Al separar variables e integrar, obtenemos

$$\int \frac{1}{\sec(y^2)}\, dy = \int dt,$$

o en forma equivalente,

$$\int \cos(y^2)\, dy = \int dt.$$

La integral en el lado izquierdo es difícil, por no decir algo peor. (De hecho, hay una función especial definida justamente para darle un nombre a esta integral.) La lección es que, aun para ecuaciones especiales de la forma

$$\frac{dy}{dt} = f(y),$$

con frecuencia es imposible llevar a cabo el álgebra requerida. No podremos confiar meramente en herramientas analíticas y soluciones explícitas al estudiar ecuaciones diferenciales, aunque podamos separar las variables.

Un modelo de ahorro

Supongamos que depositamos \$5 000 en una cuenta de ahorro con interés incrementado a una tasa de 5% compuesto en forma continua. Si $A(t)$ denota la cantidad de dinero en la cuenta en el tiempo t, entonces la ecuación diferencial para A es

$$\frac{dA}{dt} = 0.05A.$$

Como vimos en la sección previa, la solución general para esta ecuación es la función exponencial

$$A(t) = ce^{0.05t},$$

donde $c = A(0)$. Entonces

$$A(t) = 5000e^{0.05t}$$

es nuestra solución particular.

Suponiendo que las tasas de interés nunca cambian, después de 10 años tendremos

$$A(10) = 5000e^{0.5} \approx 8244$$

dólares en esta cuenta. Ésta es una buena cantidad de dinero, por lo que decidimos tomar algo para divertirnos. Decidimos retirar \$1000 de la cuenta cada año, en forma continua, comenzando en el año 10. ¿Cuánto nos durará el dinero? ¿Perderemos alguna vez todo nuestro capital?

La ecuación diferencial para $A(t)$ debe cambiarse, pero sólo a partir del año 10. Para $0 \leq t \leq 10$, nuestro modelo previo funciona muy bien. Sin embargo, para $t > 10$, la ecuación diferencial toma la forma

$$\frac{dA}{dt} = 0.05A - 1000.$$

Tenemos realmente entonces una ecuación diferencial del tipo

$$\frac{dA}{dt} = \begin{cases} 0.05A & \text{para } t < 10; \\ 0.05A - 1000 & \text{para } t > 10, \end{cases}$$

cuyo lado derecho consiste en dos partes.

Para solucionar esta ecuación en dos partes, resolvemos la primera parte y determinamos $A(10)$. Esto ya lo hicimos y obtuvimos $A(10) \approx 8\,244$ como valor inicial. Luego la segunda ecuación nos da $A(10) \approx 8\,244$ como valor inicial. Esta ecuación también es separable, y tenemos

$$\int \frac{dA}{0.05A - 1000} = \int dt.$$

Calculamos esta integral usando la sustitución y la función logaritmo natural. Sea $u = 0.05A - 1000$. Entonces $du = 0.05\,dA$ o $20\,du = dA$ ya que $0.05 = 1/20$. Obtenemos

$$\int \frac{20\,du}{u} = t + c_1$$

$$20 \ln |u| = t + c_1$$

$$20 \ln |0.05A - 1000| = t + c_1,$$

para alguna constante c_1.

En $t = 10$, sabemos que $A \approx 8\,244$. Entonces, en $t = 10$,

$$\frac{dA}{dt} = 0.05A - 1000 \approx -587.8 < 0.$$

En otras palabras, estamos retirando a una tasa que excede a la tasa a la que ganamos interés. Como dA/dt en $t = 10$ es negativa, A disminuirá y $0.05A - 1000$ permanece negativa para toda $t > 10$. Si $0.05A - 1000 < 0$, entonces

$$|0.05A - 1000| = -(0.05A - 1000) = 1000 - 0.05A.$$

En consecuencia, tenemos

$$20 \ln(1000 - 0.05A) = t + c_1,$$

o

$$\frac{\ln(1000 - 0.05A)}{0.05} = t + c_1.$$

Multiplicando ambos lados por 0.05 y exponenciando, resulta

$$1000 - 0.05A = e^{0.05(t+c_1)}$$
$$1000 - 0.05A = c_2 e^{0.05t},$$

donde $c_2 = e^{0.05c_1}$. Despejando A, obtenemos

$$\begin{aligned} A &= \frac{1000 - c_2 e^{0.05t}}{0.05} \\ &= 20\left(1000 - c_2 e^{0.05t}\right) = 20000 - c_3 e^{0.05t}, \end{aligned}$$

donde $c_3 = 20c_2$. (Aunque hemos sido cuidadosos para indicar las relaciones entre las constantes c_1, c_2 y c_3, necesitamos sólo recordar que c_3 es una constante determinable a partir de las condiciones iniciales.)

Ahora usamos la condición inicial para determinar c_3. Sabemos que

$$8244 \approx A(10) = 20000 - c_3 e^{0.05(10)} \approx 20000 - c_3(1.6487).$$

Despejando c_3, obtenemos $c_3 \approx 7\,130$. Nuestra solución para $t \geq 10$ es

$$A(t) \approx 20000 - 7130e^{0.05t}.$$

Vemos que

$$A(11) \approx 7641$$
$$A(12) \approx 7008$$

etc. Nuestra cuenta se está agotando, pero no por mucho. De hecho podemos encontrar cuánto durarán los buenos tiempos preguntando cuándo se acabará nuestro dinero. En otras palabras, resolvemos la ecuación $A(t) = 0$ para toda t. Tenemos

$$0 = 20000 - 7130e^{0.05t},$$

lo que da

$$t = 20 \ln\left(\frac{20000}{7130}\right) \approx 20.63.$$

Después de dejar que \$5 000 acumulen interés durante diez años, podemos retirar \$1 000 anualmente por más de diez años.

Un problema de mezclado

El nombre *problema de mezclado* se refiere a una gran colección de problemas diferentes donde dos o más sustancias se mezclan entre sí a distintas velocidades. Los ejemplos varían del mezclado de contaminantes en un lago a la mezcla de productos químicos en un tanque, a la difusión de humo de cigarro en el aire en un cuarto, a la mezcla de especias en un platillo de curry.

Mezcla en un tanque

Consideremos un gran tanque que contiene azúcar y agua con lo que se prepararán refrescos embotellados (vea la figura 1.8). Suponga que:

- El tanque contiene 100 galones de líquido. Además, la cantidad que fluye hacia adentro es la misma que fluye hacia afuera, pero siempre hay 100 galones en el tanque.
- El tanque se mantiene bien mezclado, por lo que la concentración de azúcar es uniforme en todo el tanque.
- El agua azucarada que contiene 5 cucharadas de azúcar por galón entra al tanque a través del tubo A a razón de 2 galones por minuto.
- El agua azucarada que contiene 10 cucharadas de azúcar por galón entra al tanque a través del tubo B a razón de 1 galón por minuto.
- El agua azucarada sale del tanque a través del tubo C a razón de 3 galones por minuto.

Para elaborar el modelo, t es el tiempo medido en minutos (la variable independiente). Para la variable dependiente tenemos dos opciones. Podemos escoger la cantidad total de azúcar $S(t)$ en el tanque en el tiempo t medida en cucharadas, o bien $C(t)$, la concentración de azúcar en el tanque en el tiempo t medida en cucharadas por galón. Desarrollaremos el modelo para S, dejando el modelo para C como un ejercicio.

Usando el azúcar total $S(t)$ en el tanque como la variable dependiente, la razón de cambio de S es la diferencia entre la cantidad de azúcar que se añade y la cantidad de azúcar que se retira. El azúcar que entra al tanque llega por los tubos A y B y puede calcularse fácilmente, multiplicando el número de galones por minuto de la mezcla edulcorada que entra al tanque por la cantidad de azúcar por galón. La cantidad de azúcar que sale del tanque por el tubo C depende de la concentración de azúcar en el tanque en ese momento. La concentración está dada por $S/100$, por lo que el azúcar que sale del tanque es el producto del número de galones que salen por minuto (3 galones por minuto) y la concentración ($S/100$). El modelo es

$$\frac{dS}{dt} = \underbrace{2 \cdot 5}_{\substack{\text{entrada de} \\ \text{azúcar por el} \\ \text{tubo A}}} + \underbrace{1 \cdot 10}_{\substack{\text{entrada de} \\ \text{azúcar por} \\ \text{el tubo B}}} - \underbrace{3 \cdot \frac{S}{100}}_{\substack{\text{salida de} \\ \text{azúcar por} \\ \text{el tubo C}}}.$$

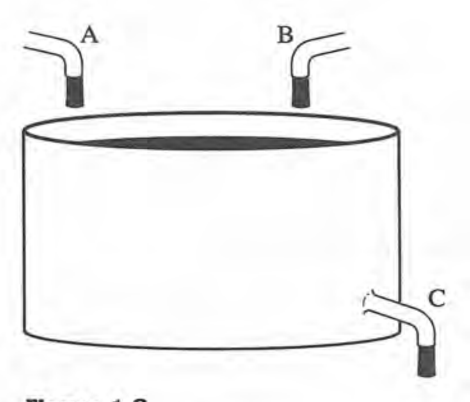


Figura 1.8
Tanque de mezclado.

Es decir,

$$\frac{dS}{dt} = 20 - \frac{3S}{100} = \frac{2000 - 3S}{100}.$$

Para resolver esta ecuación analíticamente, separamos las variables e integramos. Encontramos

$$\frac{dS}{2000 - 3S} = \frac{dt}{100}$$

$$\frac{\ln|2000 - 3S|}{-3} = \frac{t}{100} + c_1$$

$$\ln|2000 - 3S| = -\frac{3t}{100} - 3c_1$$

$$\ln|2000 - 3S| = -0.03t + c_2,$$

donde $c_2 = -3c_1$. Exponenciando, obtenemos

$$|2000 - 3S| = e^{(-0.03t + c_2)} = c_3 e^{-0.03t},$$

donde $c_3 = e^{c_2}$. Observe que esto significa que c_3 es una constante positiva. Ahora debemos tener cuidado. Quitando los signos de valor absoluto resulta

$$2000 - 3S = \pm c_3 e^{-0.03t},$$

donde escogemos el signo más si $S(t) < 2\,000/3$ y el signo menos si $S(t) > 2\,000/3$. Por tanto, podemos escribir esta ecuación en forma más sencilla como

$$2000 - 3S = c_4 e^{-0.03t},$$

donde c_4 es una constante arbitraria (positiva, negativa o cero). Despejando S obtenemos la solución general

$$S(t) = ce^{-0.03t} + \frac{2000}{3},$$

donde $c = -c_4/3$ es una constante arbitraria. Es posible determinar el valor preciso de c si conocemos la cantidad exacta de azúcar que se encuentra inicialmente en el tanque. Considere que, si $c = 0$, la solución es simplemente $S(t) = 2\,000/3$, es decir, una solución de equilibrio.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 1.2

1. Roberto, Juan y Pablo están nuevamente tomando café, cuando uno de sus estudiantes les pregunta cómo resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y+1}{t+1}.$$

Después de mucha discusión, Roberto dice $y(t) = t$, Juan dice $y(t) = 2t + 1$ y Pablo dice $y(t) = t^2 - 2$.

(a) ¿Quién tiene razón?

(b) ¿Qué solución debieron visualizar de inmediato?

2. Construya una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dt} = 2y - t + g(y)$$

que tenga la función $y(t) = e^{2t}$ como una solución.

3. Construya una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

que tenga la función $y(t) = e^{t^3}$, como una solución. (Trate de encontrar una cuyo lado derecho $f(t, y)$ dependa explícitamente de t y y.)

4. Escoja alguna función relativamente simple y construya una ecuación diferencial que tenga esa función como resultado. Luego pregunte a un compañero de clase que plantee una solución para la ecuación diferencial resultante sin decirle la solución que tiene usted en mente. (Sea considerado. Su compañero de clase le preguntará a usted lo mismo.)

(a) ¿Encontró su compañero una solución?
(b) ¿Fue la misma que tenía usted en mente?
(c) ¿Por qué es más fácil escribir problemas de ecuaciones diferenciales que resolverlos?

En los ejercicios 5-24, encuentre la solución general de la ecuación diferencial especificada. (Puede que no sea usted capaz de alcanzar la respuesta ideal de una ecuación con sólo la variable dependiente a la izquierda y sólo la variable independiente a la derecha, pero trate de llegar lo más lejos posible.)

5. $\frac{dy}{dt} = ty$

6. $\frac{dy}{dt} = t^4 y$

7. $\frac{dy}{dt} = 2y + 1$

8. $\frac{dy}{dt} = 2 - y$

9. $\frac{dy}{dt} = e^{-y}$

10. $\frac{dy}{dt} = (ty)^2$

11. $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{t^2 y + y}$

12. $\frac{dy}{dt} = t\sqrt[3]{y}$

13. $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2y + 1}$

14. $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{1 + y^2}$

15. $\frac{dy}{dt} = y(1 - y)$

16. $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{y}$

17. $\frac{dy}{dt} = t^2 y + 1 + y + t^2$

18. $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{ty + t + y + 1}$

19. $\frac{dy}{dt} = \frac{e^t y}{1 + y^2}$

20. $\frac{dy}{ds} = \sec y$

21. $\frac{dw}{dt} = \frac{w}{t}$

22. $\frac{dy}{dt} = \frac{2y + 1}{t}$

23. $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2 + 1}{y^4 + 3y}$

24. $\frac{dy}{dt} = 1 + \frac{1}{y^2}$

En los ejercicios 25-34, resuelva el problema de valor inicial dado.

25. $\dfrac{dy}{dt} = 2y + 1, \quad y(0) = 3$

26. $\dfrac{dy}{dt} = ty^2 + 2y^2, \quad y(0) = 1$

27. $\dfrac{dy}{dt} = -y^2, \quad y(0) = 1/2$

28. $\dfrac{dx}{dt} = -xt, \quad x(0) = 1/\sqrt{\pi}$

29. $\dfrac{dy}{dt} = -y^2, \quad y(0) = 0$

30. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t}{y - t^2 y}, \quad y(0) = 4$

31. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t^2}{y + t^3 y}, \quad y(0) = -2$

32. $\dfrac{dy}{dt} = 2ty^2 + 3t^2y^2, \quad y(1) = -1$

33. $\dfrac{dy}{dt} = (y^2 + 1)t, \quad y(0) = 1$

34. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2y + 3}, \quad y(0) = 1$

35. Una cubeta de 5 galones está llena de agua pura. Suponga que empezamos a añadir sal a la cubeta a razón de 1/4 de libra por minuto. Además, abrimos el grifo de manera que salga 1/2 galón por minuto de la cubeta, y agregamos agua pura para mantener llena la cubeta. Si la solución de agua salada está siempre bien mezclada, ¿cuál es la cantidad de sal en la cubeta después de

(a) 1 minuto? **(b)** 10 minutos? **(c)** 60 minutos?
(d) 1 000 minutos? **(e)** un tiempo muy grande?

36. Considere el modelo siguiente, muy simple, sobre los niveles de colesterol en la sangre, basado en el hecho de que el colesterol es fabricado por el cuerpo para usarse en la construcción de paredes celulares y es absorbido de alimentos que lo contienen: sea $C(t)$ la cantidad de colesterol en la sangre de una persona particular en el tiempo t (en miligramos por decilitro). Entonces

$$\frac{dC}{dt} = k_1(C_0 - C) + k_2 E,$$

donde

C_0 = nivel natural de colesterol en la persona,
k_1 = parámetro de producción,
E = razón diaria a la que se ingiere colesterol, y
k_2 = parámetro de absorción.

(a) Suponga $C_0 = 200$, $k_1 = 0.1$, $k_2 = 0.1$, $E = 400$ y $C(0) = 150$. ¿Cuál será el nivel de colesterol de la persona después de 2 días con esta dieta?

(b) Con las condiciones iniciales anteriores, ¿cuál será el nivel de colesterol en la persona después de 5 días con esta dieta?

(c) ¿Cuál será el nivel de colesterol en la persona después de un tiempo muy largo con esta dieta?

(d) Se sabe que los niveles muy altos de colesterol en la sangre son un factor de riesgo para las enfermedades del corazón. Suponga que, después de un tiempo largo con la dieta alta en dicho esteroide descrita antes, la persona recibe una dieta muy baja en colesterol, de manera que E cambia a $E = 100$. (El nivel inicial de colesterol en el tiempo inicial de esta dieta es el resultado obtenido en el inciso (c).) ¿Cuál será el nivel de colesterol en la persona después de 1 día, después de 5 días y después de un tiempo muy largo con la nueva dieta?

(e) Suponga que la persona se queda con la dieta alta en colesterol, pero toma medicamentos que bloquean parte de la absorción de dicha sustancia ingerida con los

alimentos, por lo que k_2 cambia a $k_2 = 0.075$. Con el nivel de colesterol del inciso (c), ¿cuál será la proporción del esteroide en la sangre de esta persona después de 1 día, de 5 días y después de un tiempo muy largo?

37. Una taza de chocolate caliente está inicialmente a 170 °F y se deja en un cuarto que tiene una temperatura ambiente de 70 °F. Suponga que a partir del tiempo $t = 0$ se enfría a razón de 20° por minuto.

(a) Suponga que es aplicable la ley de Newton sobre el enfriamiento: "La razón de enfriamiento es proporcional a la diferencia entre la temperatura en curso y la temperatura ambiente." Escriba un problema de valor inicial que modele la temperatura del chocolate caliente.

(b) ¿Cuánto tiempo le toma al chocolate caliente enfriarse a una temperatura de 110 °F?

38. En el problema de mezclado en esta sección tuvimos que hacer una selección de la variable dependiente. Usamos la cantidad de azúcar como la variable dependiente, pero podríamos haber usado la concentración de azúcar como la variable dependiente. Si $S(t)$ es la cantidad total de azúcar en el tanque en el tiempo t, entonces la concentración en el tiempo t está dada por $C(t) = S(t)/100$ y se mide en cucharadas por galón. Escriba una ecuación diferencial y modele las hipótesis en la sección utilizando $C(t)$ como variable dependiente.

39. Use los procedimientos de esta sección para resolver la ecuación diferencial en el ejercicio 38. ¿Hay soluciones de equilibrio para esta ecuación diferencial?

40. Suponga que va a tener una gran cena con un gran grupo de invitados. Usted decide cocinar 2 galones de chile con carne. La receta indica 2 cucharaditas de salsa picante por galón, pero usted lee mal las instrucciones y pone 2 cucharadas grandes de salsa picante por galón. (Como cada cucharada grande corresponde a 3 cucharaditas, usted ha puesto 6 de éstas por galón, lo que da un total de 12 cucharaditas de salsa picante en el guisado.) Usted no quiere tirar el chile con carne porque el menú no es muy variado (y algunas personas gustan comer este platillo con mucho picante), por lo que termina sirviéndolo. Sin embargo, conforme cada persona se sirve, usted llena la cazuela con frijoles y jitomates sin picante hasta que la concentración de salsa picante concuerda con la de la receta. Suponga que los invitados toman 1 taza de chile con carne por minuto de la cazuela (hay 16 tazas en un galón), ¿cuánto tiempo pasará hasta que el chile con carne tenga la concentración de salsa picante indicada en la receta? ¿Cuántas copas de chile con carne se habrán tomado de la cazuela?

41. Suponga que la señora Lee desea comprar una casa nueva y debe pedir prestado \$150 000. Ella quiere una hipoteca a 20 años y tiene dos opciones. Puede pedir prestado el dinero al 7% anual sin puntos o bien al 6.85% por año con un cargo de 3 puntos. (Un "punto" es una comisión del 1% de la cantidad del préstamo que debe pagarse al principio del préstamo. Por ejemplo, una hipoteca con 3 puntos requiere que la señora Lee pague \$4 500 adicionales para recibir el préstamo.) Como aproximación, suponemos que el interés es compuesto y que los pagos se hacen continuamente. Sea

$M(t)$ = cantidad adeudada en el tiempo t (medido en años),
i = tasa de interés anual, y
p = pago anual.

El modelo para la cantidad adeudada es entonces

$$\frac{dM}{dt} = iM - p.$$

(a) ¿Cuánto debe pagar la señora Lee en cada caso?
(b) ¿Qué opción es mejor sobre el tiempo del préstamo (suponiendo que la señora Lee no invierte el dinero que hubiese pagado en puntos)?
(c) Si la señora Lee puede invertir los $4 500 que hubiese pagado en puntos para la segunda hipoteca al 5% compuesto continuamente, ¿cuál es la mejor opción?

1.3 TÉCNICA CUALITATIVA: CAMPOS DE PENDIENTES

Encontrar una expresión analítica (es decir, una fórmula) para solucionar una ecuación diferencial a menudo es una manera útil de describir una solución de una ecuación diferencial. Sin embargo, hay otras maneras de representarlas y esas alternativas son con frecuencia más fáciles de entender y usar. En esta sección veremos los procedimientos geométricos para representar soluciones, y desarrollaremos un método para visualizar las gráficas de las soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y).$$

La geometría de $dy/dx = f(t, y)$

Si la función $y(t)$ es una solución de la ecuación $dy/dt = f(t, y)$ y si su gráfica pasa por el punto (t_1, y_1) donde $y_1 = y(t_1)$, entonces la ecuación diferencial dice que la derivada dy/dt en $t = t_1$ está dada por el número $f(t_1, y_1)$. Geométricamente, esta igualdad de dy/dt en $t = t_1$ con $f(t_1, y_1)$ significa que la pendiente de la línea tangente a la gráfica de $y(t)$ en el punto (t_1, y_1) es $f(t_1, y_1)$ (vea la figura 1.9). Note que no hay nada especial acerca del punto (t_1, y_1), aparte del hecho de que es un punto sobre la gráfica de la solución $y(t)$. La igualdad de dy/dt y $f(t, y)$ debe valer para toda t para la que $y(t)$ satisfaga a la ecuación diferencial. En otras palabras, con los valores del lado derecho de la ecuación diferencial se obtienen las pendientes de las tangentes en todos los puntos sobre la gráfica de $y(t)$ (vea la figura 1.10).

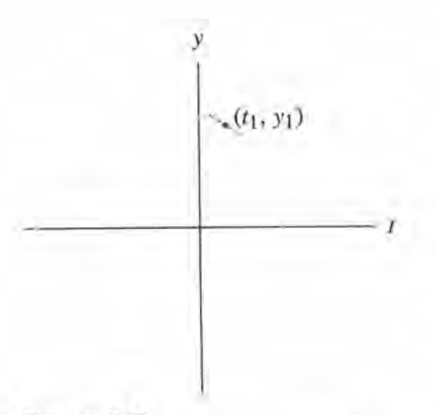


Figura 1.9
La pendiente de la tangente en el punto (t_1, y_1) está dada por el valor de $f(t_1, y_1)$.

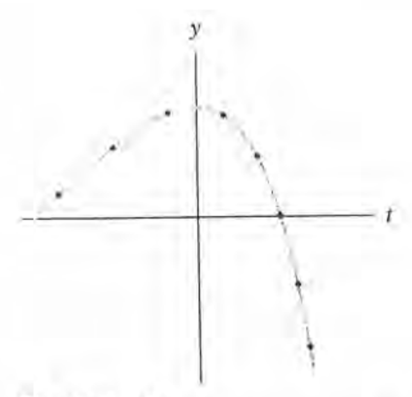


Figura 1.10
Si $y = y(t)$ es una solución, entonces la pendiente de cualquier tangente debe ser igual a $f(t, y)$.

Campos de pendientes

Esta simple observación geométrica conduce a nuestro recurso principal para visualizar las soluciones de una ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y).$$

Si nos dan la función $f(t, y)$, obtenemos una idea burda de las gráficas de las soluciones de la ecuación diferencial que bosquejan su correspondiente **campo de pendientes**. Hacemos este esbozo seleccionando puntos en el plano t-y y calculando los números $f(t, y)$ en esos puntos. En cada punto (t, y) seleccionado, usamos $f(t, y)$ para dibujar una línea minitangente cuya pendiente es $f(t, y)$ (vea la figura 1.11). Esas líneas minitangentes se llaman también **marcas de pendiente**. Una vez que tenemos una gran cantidad de dichas marcas, podemos visualizar las gráficas de las soluciones. Por ejemplo, considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y - t.$$

En otras palabras, el lado derecho de la ecuación diferencial está dado por la función $f(t, y) = y - t$. Para adquirir algo de práctica con la idea del campo de pendientes, delineamos su campo en forma manual con un pequeño número de puntos. Luego veremos una versión generada por computadora de este campo de pendientes.

Elaborar estas gráficas manualmente suele resultar tedioso, por lo que consideraremos sólo nueve puntos en el plano t-y. Por ejemplo, en el punto $(t, y) = (1, -1)$, tenemos $f(t, y) = f(1, -1) = -1 - 1 = -2$. Por tanto, esbozamos un "pequeño" segmento de línea con pendiente -2 con centro en el punto $(1, -1)$ (vea la figura 1.12). Para bosquejar el campo de pendientes en todos los nueve puntos usamos la función $f(t, y)$ para calcular las pendientes apropiadas. Los resultados se resumen en la tabla 1.2. Una vez que tenemos esos valores, los usamos para obtener un croquis aproximado del campo de pendientes para esta ecuación (vea la figura 1.12).

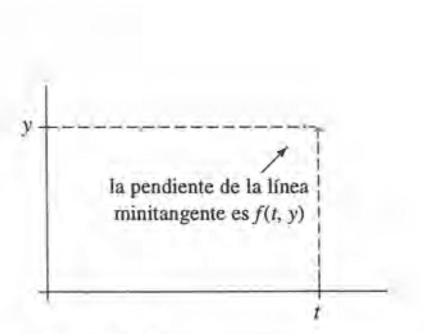


Figura 1.11
La pendiente de la minitangente en el punto (t, y) está determinada por el lado derecho $f(t, y)$ de la ecuación diferencial.

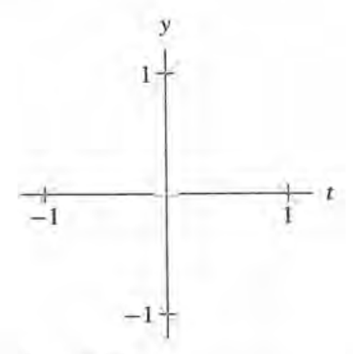


Figura 1.12
Un campo de pendientes "escaso" generado por la tabla 1.2.

El esbozo de campos de pendientes se hace más fácil si usamos una computadora. La figura 1.13 es un croquis del campo de pendientes para esta ecuación sobre la región $-3 \leq t \leq 3$ y $-3 \leq y \leq 3$ en el plano t-y. Calculamos valores de la función $f(t, y)$ sobre 25×25 (625 puntos) en esa región.

Tabla 1.2
Pendientes seleccionadas correspondientes a la ecuación diferencial $dy/dt = y - t$

(t, y)	$f(t, y)$	(t, y)	$f(t, y)$	(t, y)	$f(t, y)$
$(-1, 1)$	2	$(0, 1)$	1	$(1, 1)$	0
$(-1, 0)$	1	$(0, 0)$	0	$(1, 0)$	-1
$(-1, -1)$	0	$(0, -1)$	-1	$(1, -1)$	-2

Un vistazo a este campo de pendientes sugiere que la gráfica de una solución es una línea diagonal que pasa por los puntos $(-1, 0)$ y $(0, 1)$. Los resultados correspondientes a las condiciones iniciales que están debajo de esta línea parecen crecer hasta que alcanzan un máximo absoluto. Las soluciones correspondientes a condiciones iniciales que están por arriba de la línea parecen crecer más y más rápidamente.

En la sección 1.8 estudiaremos un procedimiento analítico para encontrar soluciones de esta ecuación. Veremos que la solución general consiste en la familia de funciones

$$y(t) = t + 1 + ce^t,$$

donde c es una constante arbitraria. (En este momento es importante hacer énfasis en que, si bien no hemos estudiado todavía el procedimiento que nos da esas soluciones, podemos sin embargo revisar que esas funciones son realmente soluciones. Si $y(t) = t + 1 + ce^t$, entonces $dy/dt = 1 + ce^t$. También $f(t, y) = y - t = (t + 1 + ce^t) - t = 1 + ce^t$. Por consiguiente, todas esas funciones son soluciones.)

En la figura 1.14 hemos esbozado las gráficas de esas funciones con $c = -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Observe que cada una de esas gráficas es tangente al campo de pendientes. Note también que, si $c = 0$, la gráfica es una línea recta cuya pendiente es 1. Ella pasa por los puntos $(-1, 0)$ y $(0, 1)$.

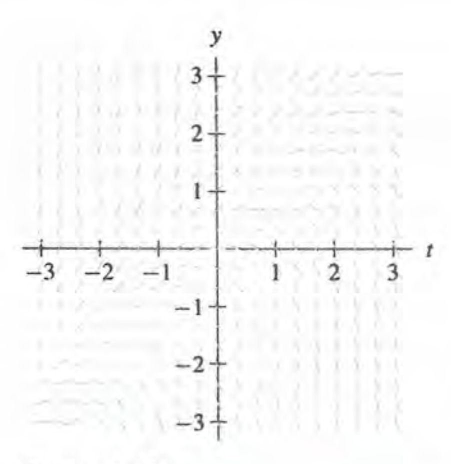


Figura 1.13
Una versión generada por computadora del campo de pendientes para $dy/dt = y - t$.

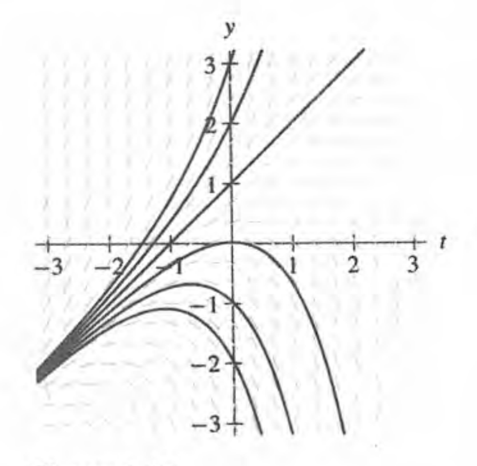


Figura 1.14
Las gráficas de seis soluciones para $dy/dt = y - t$ superpuestas sobre su campo de pendientes.

Casos especiales importantes

Desde un punto de vista analítico, las ecuaciones diferenciales de las formas

$$\frac{dy}{dt} = f(t) \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = f(y)$$

son algo más fáciles de considerar que las ecuaciones más complicadas, porque son separables. La geometría de sus campos de pendientes es igualmente especial.

Campos de pendientes para $dy/dt = f(t)$

Si el lado derecho de la ecuación diferencial en consideración es meramente una función de t o, en otras palabras, si

$$\frac{dy}{dt} = f(t),$$

la pendiente en cualquier punto es la misma que la de cualquier otro punto con la misma coordenada t (vea la figura 1.15).



Figura 1.15
Si el lado derecho de la ecuación diferencial sólo es una función de t, entonces las marcas de pendientes en el campo de pendientes únicamente están determinadas sólo por sus coordenadas t.

Geométricamente esto implica que todas las marcas de pendientes sobre cada línea vertical son paralelas. Siempre que un campo de pendientes tiene esta propiedad geométrica para todas las líneas verticales del dominio en consideración, sabemos que la ecuación diferencial correspondiente es realmente una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t).$$

(Note que encontrar soluciones para este tipo de ecuación diferencial es lo mismo que encontrar una antiderivada de $f(t)$ en el cálculo.)

Por ejemplo, considere el campo de pendientes mostrado en la figura 1.16. Generamos este campo de pendientes a partir de la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = 2t,$$

y del cálculo sabemos que

$$y(t) = \int 2t\, dt = t^2 + c,$$

donde c es la constante de integración. Por consiguiente, la solución general de la ecuación diferencial consiste en funciones de la forma

$$y(t) = t^2 + c.$$

En la figura 1.17 hemos superpuesto las gráficas de tales soluciones sobre este campo. Todas esas gráficas difieren sólo en una traslación vertical. Si una de ellas es tangente al campo de pendientes, podemos obtener un número infinito de gráficas, todas tangentes al campo de pendientes, trasladando la gráfica original hacia arriba o hacia abajo.

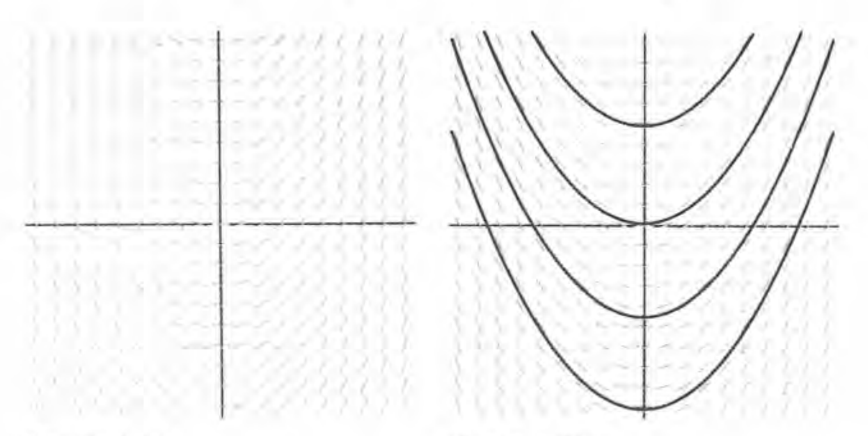


Figura 1.16
Un campo de pendientes con pendientes paralelas a lo largo de líneas verticales.

Figura 1.17
Gráficas de soluciones de $dy/dt = 2t$ superpuestas sobre su campo de pendientes.

Campos de pendientes para ecuaciones autónomas

En el caso de una ecuación diferencial autónoma

$$\frac{dy}{dt} = f(y),$$

el lado derecho de la ecuación no depende de la variable independiente t. El campo de pendientes en este caso es también algo especial. Aquí, las pendientes que corresponden a dos puntos diferentes con la misma coordenada y son iguales. Es decir, $f(t_1, y) = f(t_2, y) = f(y)$ ya que el lado derecho de la ecuación diferencial depende sólo de y. En otras palabras, el campo de pendientes de una ecuación autónoma es paralelo a lo largo de cada línea horizontal (vea la figura 1.18).

Por ejemplo, el campo de pendientes para la ecuación autónoma

$$\frac{dy}{dt} = 4y(1 - y)$$

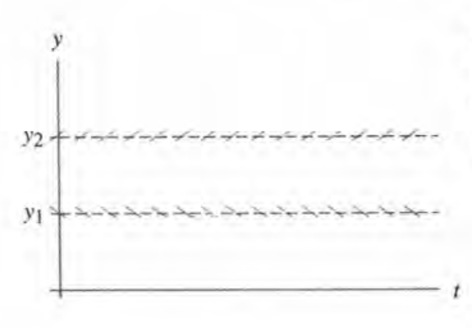


Figura 1.18
Si el lado derecho de la ecuación diferencial sólo es una función de y, entonces las marcas de pendientes en el campo de pendientes únicamente están determinadas por sus coordenadas y.

está dado en la figura 1.19. Compruebe que a lo largo de cada línea horizontal, las marcas de pendiente son paralelas. De hecho, si $0 < y < 1$, entonces dy/dt es positiva y las tangentes sugieren que una solución con $0 < y < 1$ es creciente. Por otra parte, si $y < -1$ o si $y > 1$, entonces dy/dt es negativa y cualquier solución con $y < -1$ o $y > 1$ es decreciente.

Tenemos soluciones de equilibrio en $y = 0$ y en $y = 1$ ya que el lado derecho de la ecuación diferencial desaparece a lo largo de esas líneas. El campo de pendientes es horizontal a todo lo largo de esas dos líneas horizontales y por tanto sabemos que ambas corresponden a las gráficas de soluciones. Las soluciones cuyas gráficas están entre esas dos líneas son crecientes; las que están arriba de la línea $y = 1$ o que están abajo de la línea $y = 0$ son decrecientes (vea la figura 1.20).

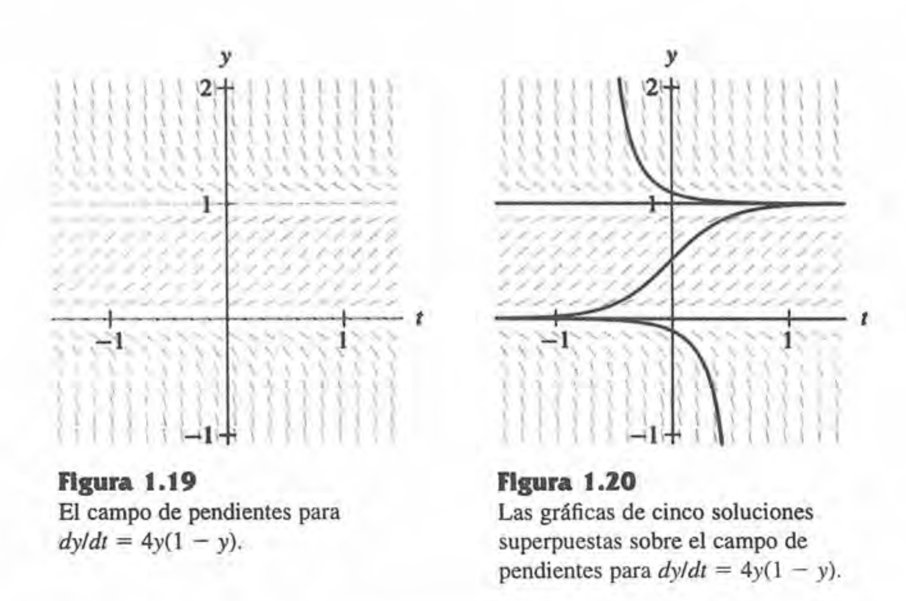


Figura 1.19
El campo de pendientes para $dy/dt = 4y(1 - y)$.

Figura 1.20
Las gráficas de cinco soluciones superpuestas sobre el campo de pendientes para $dy/dt = 4y(1 - y)$.

El hecho de que las ecuaciones autónomas producen campos de pendientes que son paralelos a lo largo de líneas horizontales, indica que podemos obtener un número infinito de soluciones a partir de una solución trasladando meramente la gráfica de la solución dada hacia la izquierda o hacia la derecha (vea la figura 1.21). En la sección 1.6 emplearemos extensamente esta observación geométrica para resolver las ecuaciones autónomas.

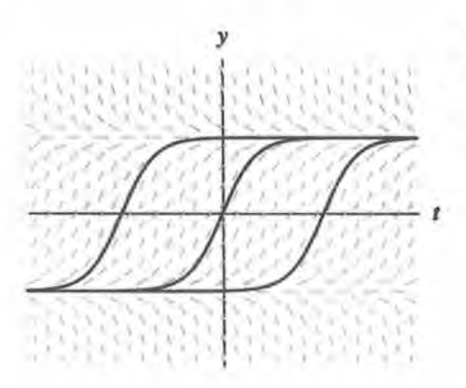


Figura 1.21
Las gráficas de tres soluciones para una ecuación autónoma. Observe que cada una es una traslación horizontal de las otras.

Análisis analítico *versus* cualitativo

Para la ecuación autónoma

$$\frac{dy}{dt} = 4y(1 - y),$$

podríamos haber usado los procedimientos analíticos de la sección previa para encontrar las fórmulas explícitas que la solucionaran. De hecho, podemos efectuar todas las integraciones requeridas para determinar la solución general (vea el ejercicio 15, p. 32). Sin embargo, esas integraciones son complicadas y las fórmulas que resultan no son fáciles de interpretar. Esto evidencia la fuerza de los métodos geométricos y cualitativos para resolver ecuaciones diferenciales. Con muy poco trabajo, ganamos mucha información sobre el comportamiento de las soluciones. Si bien no podemos usar métodos cualitativos para responder preguntas específicas, como cuál es el valor exacto de la solución en un tiempo dado, es posible utilizarlos para entender el comportamiento a largo plazo de una solución.

Estas ideas son especialmente importantes si la ecuación diferencial considerada no puede tratarse por procedimientos analíticos. Por ejemplo, consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = e^{y^2/10}\text{sen}^2\, y.$$

Esta ecuación es autónoma y por consiguiente separable. Para resolverla analíticamente, debemos evaluar las integrales

$$\int \frac{dy}{e^{y^2/10}\text{sen}^2\, y} = \int dt.$$

Sin embargo, la integral a la izquierda no puede evaluarse fácilmente. Recurrimos entonces a métodos cualitativos. El lado derecho de esta ecuación diferencial es positivo excepto si $y = n\pi$ para cualquier entero n. Esas líneas especiales corresponden a soluciones de equilibrio de la ecuación. Entre esas posiciones de equilibrio, las respuestas siempre deben ser crecientes. Del campo de pendientes, esperamos que sus gráficas se encuentren sobre una de las líneas horizontales $y = n\pi$ o que crezcan desde una de esas líneas a la siguiente superior cuando $t \to \infty$ (vea la figura 1.22). En consecuencia, podemos predecir el comportamiento a largo plazo de las soluciones aun cuando no sea posible resolver explícitamente la ecuación.

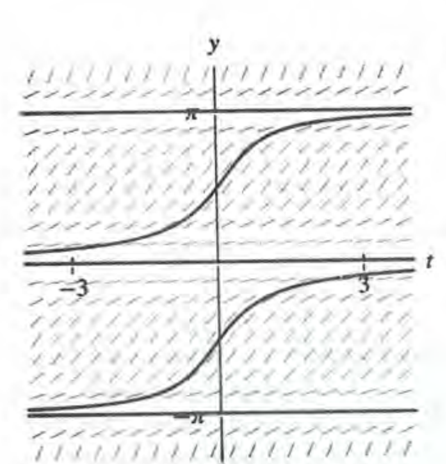


Figura 1.22
Campo de pendientes y gráficas de soluciones para

$$\frac{dy}{dt} = e^{y^2/10}\,\text{sen}^2\, y.$$

Las líneas $y = n\pi$ corresponden a soluciones de equilibrio y entre esas posiciones de equilibrio, las soluciones son crecientes.

Aunque las gráficas de computadora de soluciones de esta ecuación diferencial son convincentes, quedan algunas preguntas sutiles. Por ejemplo, ¿cómo sabemos *realmente* que esas gráficas son correctas? En particular, para $dy/dt = e^{y^2/10} \operatorname{sen}^2 y$, ¿cómo sabemos que las gráficas de soluciones no cortan las líneas horizontales correspondientes a las gráficas de las soluciones de equilibrio (vea la figura 1.22)? Tal respuesta no podría cortar esas líneas en un ángulo diferente de cero, puesto que sabemos que la línea tangente a la solución debe ser horizontal. ¿Pero qué impide que ciertas soluciones crucen esas líneas tangencialmente y luego continúen creciendo?

En la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 4y(1 - y)$$

podemos eliminar esas preguntas, porque podemos evaluar todas las integrales y verificar la exactitud de las gráficas usando procedimientos analíticos. Sin embargo, utilizar estos métodos para verificar nuestro análisis cualitativo tampoco funcionará, si no podemos encontrar soluciones explícitas. Además, tener que recurrir a procedimientos analíticos para comprobar los resultados cualitativos echa por tierra el propósito de usarlos en primer lugar. En la sección 1.5 analizaremos poderosos teoremas que responden muchas de esas preguntas sin gran esfuerzo.

Repaso del problema de mezclado

Recuerde que en la sección previa (p. 31) encontramos soluciones analíticas precisas para la ecuación diferencial

$$\frac{dS}{dt} = \frac{2000 - 3S}{100},$$

donde S describía la cantidad de azúcar en un tanque en el tiempo t. Encontramos que la solución general de esta ecuación es

$$S(t) = ce^{-0.03t} + \frac{2000}{3},$$

donde c es una constante arbitraria.

Usando el campo de pendientes de esta ecuación es posible obtener fácilmente una descripción cualitativa de esas soluciones. En la figura 1.23 mostramos el campo de pendientes y las gráficas de las respuestas seleccionadas. Observe que, como era de esperarse, el campo de pendientes es horizontal si $S = 2\,000/3$, la solución de equilibrio. Las pendientes son positivas si $S < 2\,000/3$ y negativas si $S > 2\,000/3$. Esperamos entonces que las soluciones tiendan hacia el equilibrio cuando t crece. Este análisis cualitativo indica que, independientemente de cuál sea la cantidad inicial de azúcar, la proporción de azúcar en el tanque tiende a $2\,000/3$ cuando $t \to \infty$. Por supuesto, obtenemos la misma información tomando el límite de la solución general cuando $t \to \infty$, pero es gratificante ver el mismo resultado en un despliegue geométrico. Además, en otros ejemplos, emplear dicho límite puede no ser tan fácil como en este caso, pero los métodos cualitativos pueden usarse aun para determinar el comportamiento a largo plazo de las soluciones.

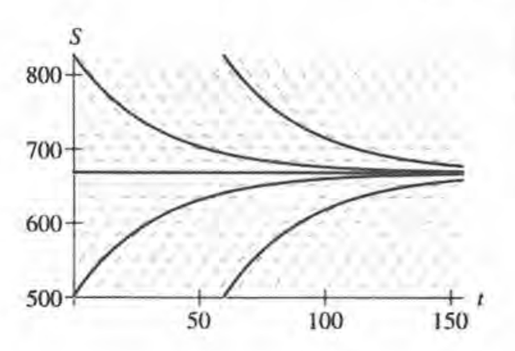


Figura 1.23
El campo de pendientes y gráficas de unas cuantas soluciones de

$$\frac{dS}{dt} = \frac{2\,000 - 3S}{100}.$$

Un circuito RC

El simple circuito eléctrico mostrado en la figura 1.24 contiene un capacitor, un resistor y una fuente de voltaje. El comportamiento del resistor es especificado por un parámetro positivo R ("la resistencia"), y el del capacitor es especificado por un parámetro positivo C ("la capacitancia"). La entrada de voltaje a través de la fuente de voltaje en el tiempo t es denotada por $V(t)$. Esta fuente de voltaje podría ser una fuente constante como una batería, o bien, una fuente variable con el tiempo como una corriente alterna. En cualquier caso, consideramos a $V(t)$ como una función especificada por el diseñador del circuito. En otras palabras, es parte del diseño del circuito.

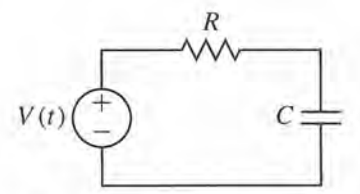


Figura 1.24
Diagrama de un circuito con resistor, capacitor y fuente de voltaje.

Las cantidades que especifican el comportamiento del circuito en un tiempo particular t son la corriente $i(t)$ y el voltaje que pasan por el capacitor v_c(t). En este ejemplo estamos interesados en el voltaje $v_c(t)$ a través del capacitor. De la teoría de los circuitos eléctricos, sabemos que $v_c(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$RC\frac{dv_c}{dt} + v_c = V(t).$$

Si reescribimos esta ecuación en nuestra forma estándar $dv_c/dt = f(t, v_c)$, tenemos

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{V(t) - v_c}{RC}.$$

Usamos los campos de pendientes para visualizar soluciones para cuatro tipos diferentes de fuentes de voltaje $V(t)$. (Si usted no sabe nada sobre circuitos eléctricos, no se preocupe; Pablo, Roberto y Juan tampoco. En ejemplos como éste, todo lo que tenemos que hacer es aceptar la ecuación diferencial e "ir con ella".)

Entrada nula

Si $V(t) = 0$ para toda t, la ecuación toma la forma

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{-v_c}{RC}.$$

En la figura 1.25 se muestra un campo de pendientes para una selección particular de R y C. Vemos claramente que todas las soluciones "decaen" hacia $v_c = 0$ cuando t aumenta. Si no hay fuente de voltaje, el voltaje a través del capacitor $v_c(t)$ decae a cero. Esta predicción para el voltaje concuerda con la que obtuvimos analíticamente, ya que la solución general de esta ecuación es $v_c(t) = v_0 e^{-t/RC}$, donde v_0 es el voltaje inicial del capacitor. (Observe que esta notación es esencialmente la misma que la del modelo del crecimiento exponencial estudiada en la sección 1.1 y, en consecuencia, podemos resolverla analíticamente conjeturando la forma correcta de una solución o por separación de variables.)

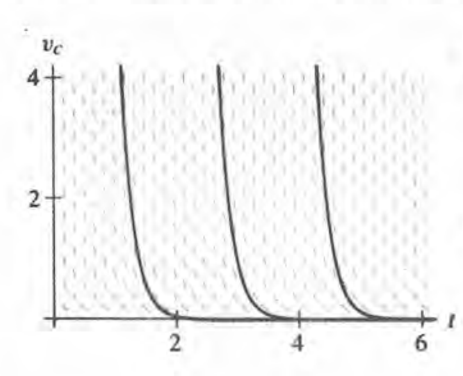


Figura 1.25
Campo de pendientes para

$$\frac{dv_c}{dt} = -\frac{v_c}{RC}$$

con $R = 0.2$, $C = 1$ y la gráfica de tres soluciones.

Fuente constante no nula de voltaje

Supongamos que $V(t)$ es una constante K no cero para toda t. La ecuación para el voltaje a través del capacitor es entonces

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{K - v_c}{RC}.$$

Esta ecuación es autónoma con una solución de equilibrio en $v_c = K$. El campo de pendientes para esta ecuación muestra que todas las soluciones tienden hacia este equilibrio cuando t crece (vea la figura 1.26). Dado cualquier voltaje inicial $v_c(0)$ en el capacitor, el voltaje $v_c(t)$ tiende al valor $v = K$ cuando se incrementa el tiempo.

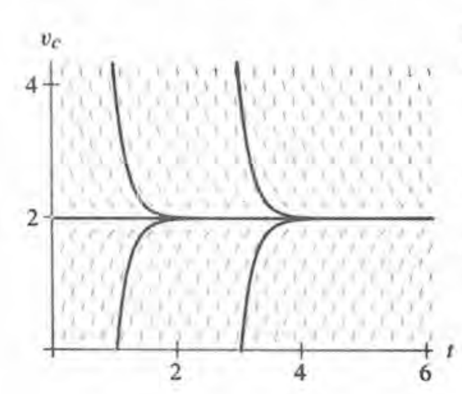


Figura 1.26
Campo de pendientes para

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{K - v_c}{RC}$$

para $R = 0.2$, $C = 1$ y $K = 2$, y las gráficas de varias soluciones con condiciones iniciales diferentes.

Podríamos encontrar una fórmula para la solución general separando variables e integrando, pero dejamos esto como un ejercicio.

Fuente de voltaje encendida-apagada (on-off)

Supongamos que $V(t) = K > 0$ para $0 \leq t < 3$, pero que en $t = 3$, este voltaje es "cancelado". Entonces, $V(t) = 0$ para $t > 3$. Nuestra ecuación diferencial es

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{V(t) - v_c}{RC} = \begin{cases} \dfrac{K - v_c}{RC} & \text{para } 0 \leq t < 3; \\ \dfrac{-v_c}{RC} & \text{para } t > 3. \end{cases}$$

El lado derecho está dado por dos fórmulas diferentes que dependen del valor de t. Podemos comprobarlo en el campo de pendientes para dicha ecuación (vea la figura 1.27). Éste se parece a los de las figuras 1.25 y 1.26 unidos a lo largo de $t = 3$. Como la ecuación diferencial no está definida en $t = 3$, debemos añadir una hipótesis adicional a nuestro modelo. Suponemos que el voltaje $v_c(t)$ es una función continua en $t = 3$

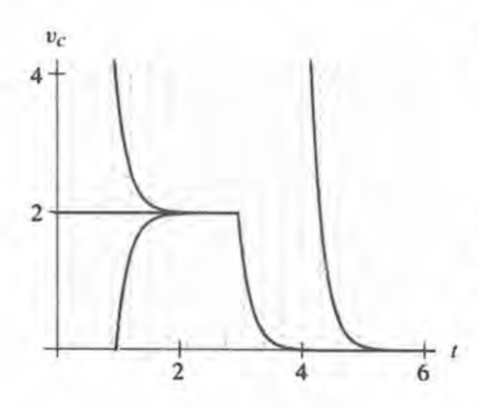


Figura 1.27
Campo de pendientes para

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{V(t) - v_c}{RC}$$

para $V(t)$, que se "apaga" en $t = 3$ para $R = 0.2$, $C = 1$ y $K = 2$, junto con las gráficas de varias soluciones con condiciones iniciales diferentes.

La solución particular con la condición inicial $v_c(0) = K$ es constante para $t < 3$, pero decae exponencialmente para $t > 3$. Las soluciones con $v_c(0) \neq K$ se mueven hacia K para $t < 3$, pero se aproximan a cero para $t > 3$. Podríamos encontrar las fórmulas adecuadas hallando primero la solución para $t < 3$ y luego la solución para $t > 3$ (vea la sección 1.2), pero dejaremos esto como un ejercicio.

Fuente de voltaje periódica encendida-apagada

Supongamos que $V(t)$ alterna periódicamente entre los valores K y cero cada tres segundos. Es decir,

$$V(t) = \begin{cases} K & \text{para } 0 \leq t < 3; \\ 0 & \text{para } 3 < t < 6; \\ K & \text{para } 6 < t < 9; \\ & \vdots \end{cases}$$

Esto corresponde a que alguien cancele el voltaje cada tres segundos y lo restituya tres segundos después. El campo de pendientes para la ecuación diferencial

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{V(t) - v_c}{RC}$$

está dado en la figura 1.28. Partes de los campos de pendientes en las figuras 1.25 y 1.26 se conectan entre sí cada tres segundos. Las soluciones también se correlacionan a partir de esas dos ecuaciones. Cuando $V(t) = K$, la solución se aproxima al valor de equilibrio $v_c = K$, y cuando $V(t) = 0$, la solución decae hacia cero.

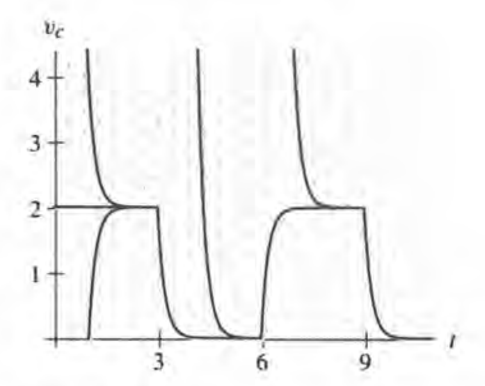


Figura 1.28
Campo de pendientes para

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{V(t) - v_c}{RC}$$

donde $V(t)$ alterna entre K y cero cada tres segundos para $R = 0.2$, $C = 1$ y $K = 2$, junto con las gráficas de varias soluciones con condiciones iniciales diferentes.

Combinación de resultados cualitativos con cuantitativos

Cuando sólo se requiere conocer el comportamiento cualitativo de la respuesta, pueden a veces ser suficientes los croquis de las soluciones obtenidas de los campos de pendientes. En otras aplicaciones es necesario conocer el valor exacto (o el más aproximado) de la solución con una condición inicial dada. En esas situaciones los métodos analíticos y/o numéricos no pueden evitarse. Pero aun en esos casos es conveniente tener una imagen de cómo se ven las soluciones.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 1.3

En los ejercicios 1-6, esboce los campos de pendientes para la ecuación diferencial dada. (Usted puede usar una computadora o calcular las pendientes a mano. Si éste fuera el caso, comience con una red de puntos (t, y) con $t = -2, -1, 0, 1, 2$ y $y = -2, -1, 0, 1, 2$.

Luego agregue más marcas de pendiente a otros puntos importantes en el plano t-y. Si utiliza una computadora, deberá calcular el campo de pendientes en muchos puntos más para obtener una gráfica más exacta.)

1. $\dfrac{dy}{dt} = t^2 - t$ **2.** $\dfrac{dy}{dt} = 1 - y$ **3.** $\dfrac{dy}{dt} = y + t + 1$

4. $\dfrac{dy}{dt} = t^2 + 1$ **5.** $\dfrac{dy}{dt} = 2y(1 - y)$ **6.** $\dfrac{dy}{dt} = 4y^2$

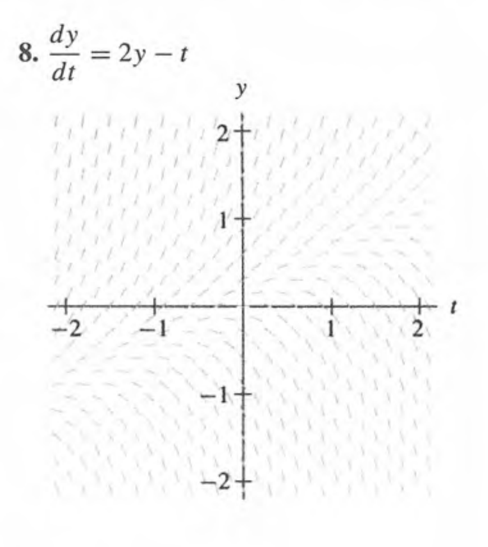
En los ejercicios 7-10 se dan una ecuación diferencial y su campo de pendientes asociado. Para cada ecuación,

(a) esboce varias soluciones diferentes sobre el campo de pendientes, y

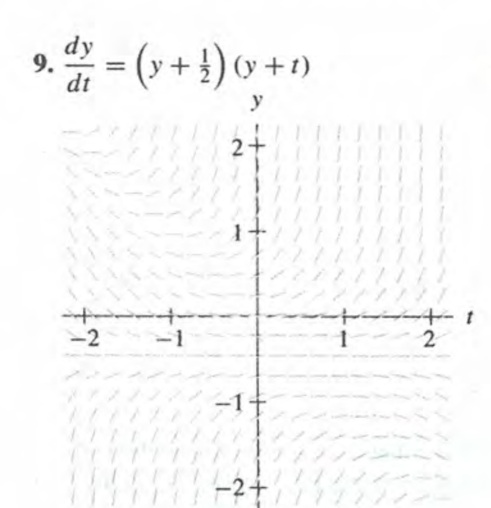
(b) describa brevemente el comportamiento de la solución con $y(0) = 1/2$ conforme t aumenta.

7. $\dfrac{dy}{dt} = 3y(1 - y)$

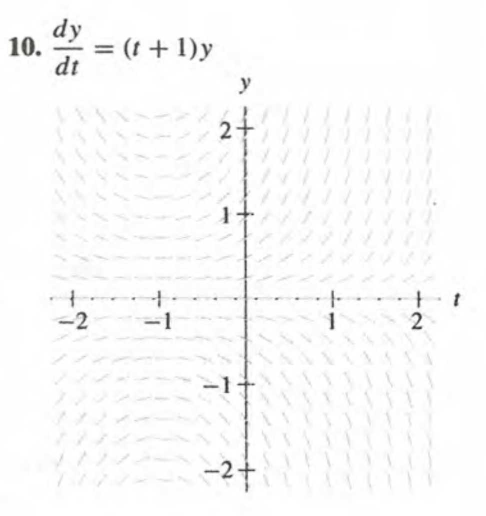
8. $\dfrac{dy}{dt} = 2y - t$



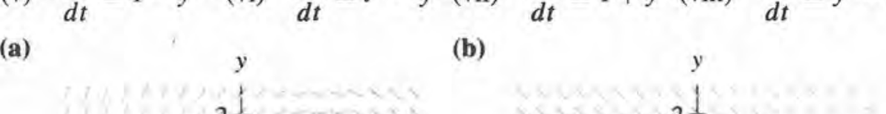
9. $\dfrac{dy}{dt} = \left(y + \frac{1}{2}\right)(y + t)$



10. $\dfrac{dy}{dt} = (t + 1)y$

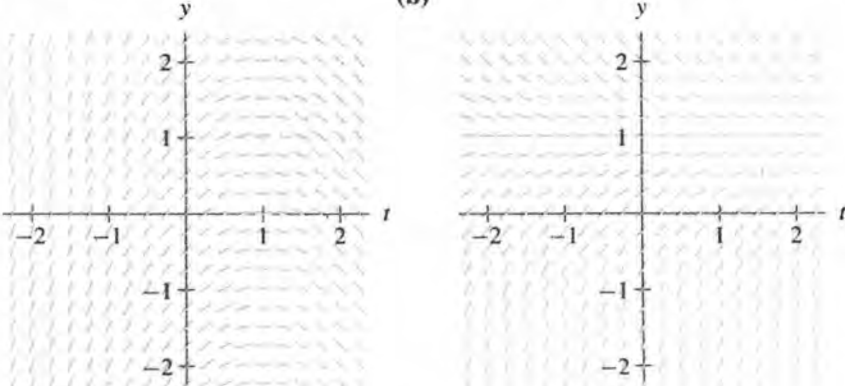


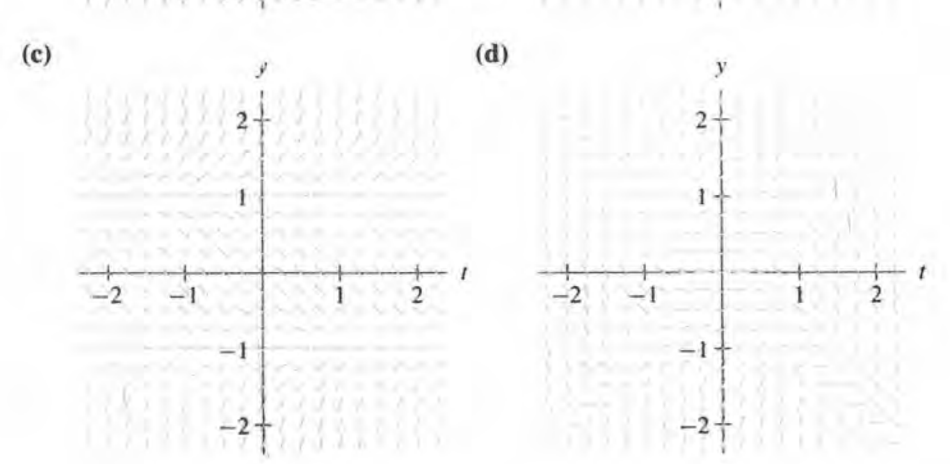
11. A continuación se dan ocho ecuaciones diferenciales y cuatro campos de pendientes. Determine la ecuación que corresponde a cada campo e indique brevemente cómo sabe que su elección es correcta. Resuelva este ejercicio sin usar tecnología.



(i) $\frac{dy}{dt} = t - 1$ (ii) $\frac{dy}{dt} = 1 - y^2$ (iii) $\frac{dy}{dt} = y^2 - t^2$ (iv) $\frac{dy}{dt} = 1 - t$

(v) $\frac{dy}{dt} = 1 - y$ (vi) $\frac{dy}{dt} = t^2 - y^2$ (vii) $\frac{dy}{dt} = 1 + y$ (viii) $\frac{dy}{dt} = y^2 - 1$





12. Considere la ecuación diferencial autónoma

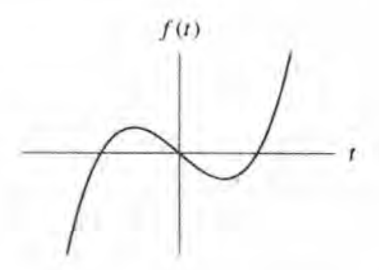
$$\frac{dS}{dt} = S^3 - 2S^2 + S.$$

(a) A mano, haga un croquis burdo del campo de pendientes.
(b) Usando este croquis, delinee las gráficas de las soluciones $S(t)$ con las condiciones iniciales $S(0) = 0$, $S(0) = 1/2$, $S(1) = 1/2$, $S(0) = 3/2$ y $S(0) = -1/2$.

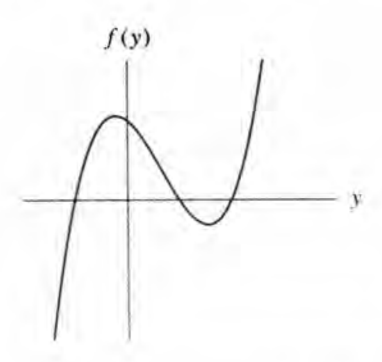
13. Suponga que sabemos que la función $f(t, y)$ es continua y que $f(t, 3) = -1$ para toda t.
(a) ¿Qué nos dice esta información sobre el campo de pendientes para la ecuación diferencial $dy/dt = f(t, y)$?

(b) ¿Qué puede usted concluir sobre las soluciones $y(t)$ de $dy/dt = f(t, y)$? Por ejemplo, si $y(0) < 3$, ¿puede $y(t) \to \infty$ cuando t aumenta?

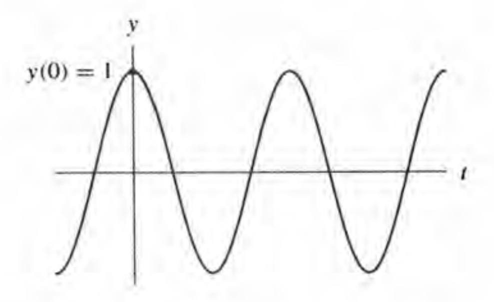
14. Suponga que sabemos que la gráfica dada a continuación corresponde al lado derecho $f(t)$ de la ecuación diferencial $dy/dt = f(t)$. Trace un croquis burdo del campo de pendientes de esta ecuación diferencial.



15. Suponga que sabemos que la gráfica siguiente pertenece a la gráfica del lado derecho $f(y)$ de la ecuación diferencial $dy/dt = f(y)$. Haga un croquis burdo del campo de pendientes correspondiente a esta ecuación diferencial.



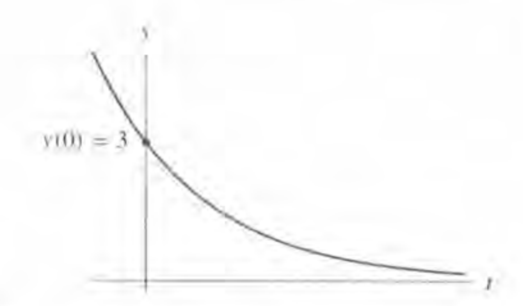
16. Suponga que la gráfica dada a continuación es la gráfica de una solución de $dy/dt = f(t)$.



(a) ¿Qué tanto del campo de pendientes puede usted esbozar con esta información? [*Sugerencia:* Note que la ecuación diferencial depende sólo de t.]

(b) ¿Qué puede decir usted acerca de la solución con $y(0) = 2$? (Por ejemplo, ¿puede usted esbozar la gráfica de esta solución?)

17. Suponga que sabemos que la gráfica siguiente corresponde a una solución de $dy/dt = f(y)$.



(a) ¿Qué tanto del campo de pendientes puede usted delinear con esta información? [*Sugerencia:* Tome en cuenta que la ecuación es autónoma.]

(b) ¿Qué puede decir acerca de la solución con $y(0) = 2$? Esboce esta solución.

18. Suponga que la función constante $y(t) = 2$ para toda t es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y).$$

(a) ¿Qué infiere acerca del campo de pendientes? En otras palabras, ¿qué tanto del campo de pendientes puede usted esbozar usando esta información?

(b) ¿Qué puede concluir con respecto al comportamiento de las soluciones?

Los ejercicios 19-23 se refieren al circuito RC visto en esta sección. La ecuación diferencial para el voltaje v_c a través del capacitor es

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{V(t) - v_c}{RC}.$$

19. Encuentre la fórmula para la solución general de la ecuación del circuito RC visto antes, si la fuente de voltaje es constante en todo tiempo. En otras palabras, $V(t) = K$ para toda t. (Su respuesta contendrá los tres parámetros R, C y K junto con una constante que depende de la condición inicial.)

20. Encuentre la solución para el voltaje $v_c(t)$ con valor inicial $v_c(0) = 1$ en la ecuación del circuito RC dada arriba, cuando la fuente de voltaje $V(t)$ es la función escalón dada por

$$V(t) = \begin{cases} K & \text{para } 0 \leq t < 3; \\ 0 & \text{para } t > 3. \end{cases}$$

Su respuesta contendrá los tres parámetros R, C y K.

21. Dado el voltaje fuente $V(t) = 2t$ y los valores de los parámetros $R = 0.2$ y $C = 1$,

(a) delinee el campo de pendientes,

(b) trace la gráfica de la solución con la condición inicial $v_c(0) = 0$, y

(c) trace la gráfica de la solución con la condición inicial $v_c(0) = 3$.

22. Dado el voltaje fuente

$$V(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq t < 1; \\ 2 & \text{para } t \geq 1; \end{cases}$$

y los valores paramétricos $R = 0.2$ y $C = 1$, esboce

(a) el campo de pendientes,

(b) la gráfica de la solución con la condición inicial $v_c(0) = 0$, y

(c) la gráfica de la solución con la condición inicial $v_c(0) = 3$.

23. Dado el voltaje fuente

$$V(t) = \begin{cases} 2t & \text{para } 0 \leq t < 1; \\ 2 & \text{para } t \geq 1; \end{cases}$$

y las valores paramétricos $R = 0.2$ y $C = 1$, esboce

(a) el campo de pendientes,

(b) la gráfica de la solución con la condición inicial $v_c(0) = 0$,

(c) la gráfica de la solución con la condición inicial $v_c(0) = 3$, y

(d) analice con unas cuantas frases las diferencias entre las soluciones para esta ecuación diferencial, y para las ecuaciones diferenciales en los ejercicios 21 y 22.

24. Suponga que una población puede ser modelada precisamente por la ecuación logística

$$\frac{dp}{dt} = 0.4p\left(1 - \frac{p}{30}\right).$$

(Considere que el parámetro de razón de crecimiento es 0.4 y la capacidad de soporte es 30.) Suponga que en el tiempo $t = 5$ se presenta una enfermedad en la población que mata 25% de la población por año. Para ajustar el modelo, cambiamos la ecuación diferencial a

$$\frac{dp}{dt} = \begin{cases} 0.4p\left(1 - \dfrac{p}{30}\right) & \text{para } 0 \leq t < 5; \\ 0.4p\left(1 - \dfrac{p}{30}\right) - 0.25p & \text{para } t > 5. \end{cases}$$

(a) Esboce el campo de pendientes para esta ecuación.

(b) Usando el campo de pendientes, bosqueje las gráficas de unas cuantas soluciones para esta ecuación.

(c) Encuentre las fórmulas para solucionar esta ecuación para las condiciones iniciales $p(0) = 30$ y $p(0) = 20$.

(d) En unas cuantas frases, prediga el comportamiento de las soluciones con las condiciones iniciales $p(0) = 30$ y $p(0) = 20$. (Puede utilizar los esbozos del campo de pendientes o las fórmulas, pero dé una descripción cualitativa de las soluciones.)

1.4 TÉCNICA NUMÉRICA: MÉTODO DE EULER

El concepto geométrico de un campo de pendientes, tal como lo vimos en la sección previa, está íntimamente relacionado con un método numérico fundamental para aproximar soluciones de una ecuación diferencial. Dado un problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

podemos obtener una idea burda de la gráfica de su solución esbozando primero el campo de pendientes en el plano t-y y luego, comenzando en el valor inicial (t_0, y_0), delineamos la solución en una gráfica que sea tangente al campo de pendientes en cada punto a lo largo de la gráfica. En esta sección describiremos un procedimiento numérico que automatiza esta idea. Usando una computadora o una calculadora, obtendremos los números y gráficas que proporcionan las soluciones aproximadas de problemas de valor inicial.

Los métodos numéricos ofrecen información cuantitativa sobre soluciones, aun si no podemos encontrar sus fórmulas. Se tiene también la ventaja de que la mayor parte del trabajo puede ser hecha por máquinas. La desventaja es que sólo obtenemos aproximaciones, no soluciones precisas. Si permanecemos conscientes de este hecho y somos prudentes, los métodos numéricos se convierten en herramientas poderosas para el estudio de las ecuaciones diferenciales. No es poco común recurrir a los métodos numéricos, aunque sea posible encontrar fórmulas para las soluciones. (La mayor parte de las gráficas de soluciones de ecuaciones diferenciales en este texto se dibujó usando aproximaciones numéricas aun cuando se disponía de fórmulas.)

El procedimiento numérico que veremos en esta sección se llama *método de Euler*. En el capítulo 7 haremos un análisis más detallado de la exactitud del método de Euler, así como de otros métodos numéricos.

Pasos a lo largo del campo de pendientes

Para describir el método de Euler, comenzamos con el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

Como nos es dada $f(t, y)$, podemos trazar su campo de pendientes en el plano t-y. La idea del método es empezar en el punto (t_0, y_0) en el campo de pendientes y dar pequeños pasos dictados por las tangentes en ésta.

Primero elegimos un **tamaño de paso** Δt (pequeño). La pendiente de la solución aproximada es puesta al día cada Δt unidades de t. En otras palabras, en cada paso nos movemos Δt unidades a lo largo del eje t. El tamaño de Δt determina la exactitud de la solución, así como el número de cálculos que son necesarios para obtener la aproximación.

Comenzando en (t_0, y_0), nuestro primer paso es hacia el punto (t_1, y_1) donde $t_1 = t_0 + \Delta t$ y (t_1, y_1) es el punto sobre la línea que pasa por (t_0,y_0) y cuya pendiente es proporcionada por el campo de pendientes en (t_0, y_0) (vea la figura 1.29). En (t_1, y_1) repetimos el procedimiento. Dando un paso cuyo tamaño a lo largo del eje t es Δt y cuya dirección es determinada por el campo de pendientes en (t_1, y_1), llegamos al nuevo punto (t_2, y_2). El nuevo tiempo está dado por $t_2 = t_1 + \Delta t$ y (t_2, y_2) está sobre el segmento de línea que comienza en (t_1, y_1) y tiene pendiente $f(t_1, y_1)$. De la misma manera, usamos el campo de pendientes en el punto (t_k, y_k) para calcular el siguiente punto (t_{k+1}, y_{k+1}). La secuencia

de valores $y_0, y_1, y_2,...$ sirve como una aproximación a la solución en los tiempos t_0, t_1, t_2, etc. Geométricamente, el método produce una secuencia de pequeños segmentos de línea que conectan (t_k, y_k) con (t_{k+1}, y_{k+1}) (vea la figura 1.30). Básicamente, estamos cosiendo entre sí pequeñas piezas del campo de pendientes para formar una gráfica que aproxima nuestra curva de la solución.

Este método emplea segmentos de línea tangente, dados por el campo de pendientes, para aproximar la gráfica de la solución. En consecuencia, en cada etapa cometemos un pequeño error (vea la figura 1.30). Con optimismo, si el tamaño del paso es suficientemente pequeño, esos errores no resultarán demasiado grandes conforme avancemos y la gráfica resultante será cercana a la solución buscada.

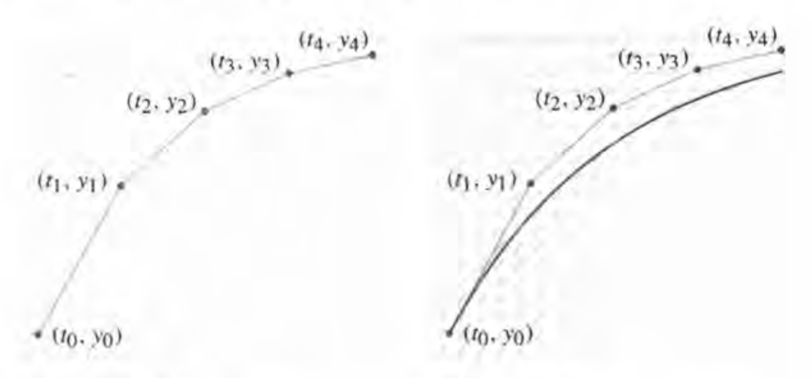


Figura 1.29
Pasos a lo largo del campo de pendientes.

Figura 1.30
La gráfica de una solución y su aproximación obtenida usando el método de Euler.

Método de Euler

Para poner en práctica el método de Euler, necesitamos una fórmula que determine (t_{k+1}, y_{k+1}) a partir de (t_k, y_k). Encontrar t_{k+1} es fácil. Primero especificamos el tamaño del paso Δt y entonces

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t.$$

Para obtener y_{k+1} a partir de (t_k, y_k), usamos la ecuación diferencial. Sabemos que la pendiente de la solución a la ecuación $dy/dt = f(t, y)$ en el punto (t_k, y_k) es $f(t_k, y_k)$, y el método de Euler usa esta pendiente para calcular y_{k+1}. De hecho, determina el punto (t_{k+1}, y_{k+1}) suponiendo que éste se encuentra sobre la línea que pasa por (t_k, y_k) con pendiente $f(t_k, y_k)$ (vea la figura 1.31).

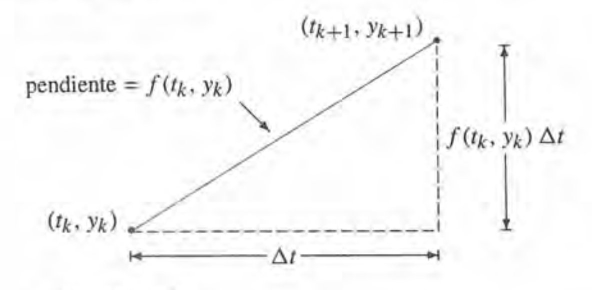


Figura 1.31
El método de Euler usa la pendientes en el punto (t_k, y_k) para aproximar la solución para $t_k \leq t \leq t_{k+1}$.

Ahora podemos usar nuestro conocimiento básico de las pendientes para determinar y_{k+1}. La fórmula para la pendiente de una línea da

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{t_{k+1} - t_k} = f(t_k, y_k).$$

Como $t_{k+1} = t_k + \Delta t$, el denominador $t_{k+1} - t_k$ es justamente Δt y, por tanto, tenemos

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta t} = f(t_k, y_k)$$

$$y_{k+1} - y_k = f(t_k, y_k)\,\Delta t$$

$$y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k)\,\Delta t.$$

Ésta es la fórmula para el método de Euler (vea las figuras 1.31 y 1.32).

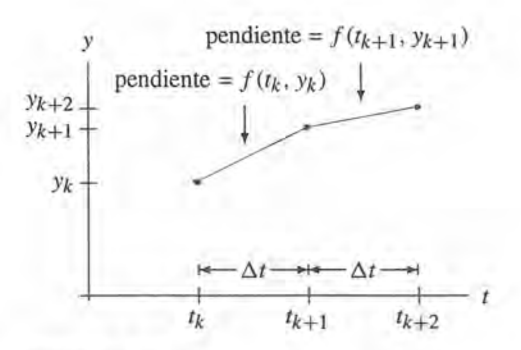


Figura 1.32
Dos pasos sucesivos del método de Euler.

Método de Euler para $\dfrac{dy}{dt} = f(t, y)$

Dada la condición inicial $y(t_0) = y_0$ y el tamaño del paso Δt, calcule el punto (t_{k+1}, y_{k+1}) a partir del punto precedente (t_k, y_k) como sigue:

1. Use la ecuación diferencial para determinar la pendiente $f(t_k, y_k)$.

2. Calcule el siguiente punto (t_{k+1}, y_{k+1}) mediante las fórmulas

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t$$

y

$$y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k)\Delta t.$$

Aproximación a una ecuación autónoma

Para ilustrar el método de Euler, lo usaremos primero para aproximar la solución a una ecuación diferencial cuya solución ya conocemos. De esta manera podremos comparar la aproximación resultante con la solución conocida. En consecuencia, podemos adquirir alguna idea sobre la efectividad del método, además de la forma de implementarlo.

Consideremos el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y - 1, \quad y(0) = 1.$$

Esta ecuación es separable, y por medio de la separación de las variables e integración obtenemos la respuesta

$$y(t) = \frac{e^{2t} + 1}{2}.$$

En este ejemplo, $f(t, y) = 2y - 1$, por lo que el método de Euler está dado por

$$y_{k+1} = y_k + (2y_k - 1)\Delta t.$$

Para ilustrar el método, comenzamos con un tamaño de paso relativamente grande de $\Delta t = 0.1$ y aproximamos la solución sobre el intervalo $0 \leq t \leq 1$. Para acercarnos a la solución sobre un intervalo cuya longitud es 1 con un tamaño de paso de 0.1, debemos calcular diez repeticiones del método. La condición inicial $y(0) = 1$ proporciona el valor inicial $y_0 = 1$. Con $\Delta t = 0.1$, tenemos $t_1 = t_0 + 0.1 = 0 + 0.1 = 0.1$. Calculamos la coordenada y para el primer paso de acuerdo con

$$y_1 = y_0 + (2y_0 - 1)\Delta t = 1 + (1)\,0.1 = 1.1.$$

Así, el primer punto (t_1, y_1) sobre la gráfica de la solución aproximada es $(0.1, 1.1)$.

Para calcular la coordenada-y y_2 para el segundo paso, usamos ahora y_1 en vez de y_0. Es decir,

$$y_2 = y_1 + (2y_1 - 1)\Delta t = 1.1 + (1.2)\,0.1 = 1.22,$$

y el segundo punto para nuestra solución aproximada es $(t_2, y_2) = (0.2, 1.22)$.

Continuando con este procedimiento, obtenemos los resultados dados en la tabla 1.3. Después de diez pasos, obtenemos la aproximación de $y(1)$ por $y_{10} = 3.596$. (Cada máquina usa algoritmos diferentes para redondear números, por lo que usted puede obtener resultados ligeramente diferentes en su computadora o calculadora. Es importante que tenga esto en mente cuando compare los resultados numéricos presentados en este libro con los resultados de sus cálculos.) Como sabemos que

$$y(1) = \frac{e^2 + 1}{2} \approx 4.195,$$

el error en la aproximación de y_{10} es ligeramente menor que 0.6, y aunque no es muy buena, pronto veremos cómo mejorarla. La razón para el error puede verse observando la gráfica de la solución y su aproximación. El campo de pendientes para esta ecuación diferen-

Tabla 1.3
Método de Euler (con tres lugares decimales) para $dy/dt = 2y - 1$, $y(0) = 1$ con $\Delta t = 0.1$

k	t_k	y_k	$f(t_k, y_k)$
0	0	1	1
1	0.1	1.100	1.20
2	0.2	1.220	1.44
3	0.3	1.364	1.73
4	0.4	1.537	2.07
5	0.5	1.744	2.49
6	0.6	1.993	2.98
7	0.7	2.292	3.58
8	0.8	2.650	4.30
9	0.9	3.080	5.16
10	1.0	3.596	

cial siempre se encuentra debajo de la gráfica (vea la figura 1.33), por lo que esperamos que nuestra aproximación resulte escasa.

Por lo general, cuando utilizamos un tamaño de paso más pequeño se reduce el error, pero deben efectuarse más cálculos para aproximar la solución sobre el mismo intervalo. Por ejemplo, si usamos la mitad del tamaño de paso en este ejemplo ($\Delta t = 0.05$), debemos calcular entonces dos veces más pasos, ya que $t_1 = 0.05$, $t_2 = 0.1, \ldots, t_{20} = 1.0$. Nuevamente comenzamos con $(t_0, y_0) = (0, 1)$ como se especificó por la condición inicial. Sin embargo, con $\Delta t = 0.05$, obtenemos

$$y_1 = y_0 + (2y_0 - 1)\Delta t = 1 + (1)0.05 = 1.05.$$

Este paso da el punto $(t_1, y_1) = (0.05, 1.05)$ sobre la gráfica de nuestra solución aproximada. Para el siguiente paso, determinamos

$$y_2 = y_1 + (2y_1 - 1)\Delta t = 1.05 + (1.1)0.05 = 1.105.$$

Ahora tenemos el punto $(t_2, y_2) = (1.1, 1.105)$. Este tipo de cálculo se vuelve tedioso muy rápidamente, pero afortunadamente este tipo de operaciones son perfectas para una computadora o una calculadora. Para $\Delta t = 0.05$, los resultados del método de Euler se muestran en la tabla 1.4.

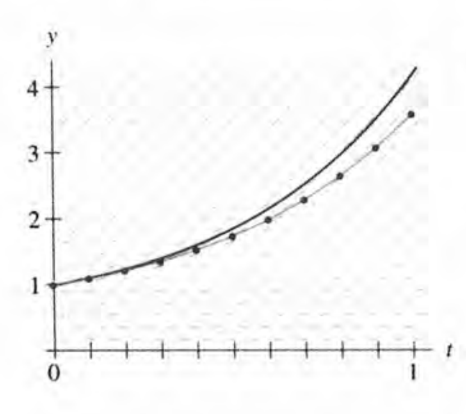


Figura 1.33
La gráfica de la solución de

$$\frac{dy}{dt} = 2y - 1$$

con $y(0) = 1$ y la aproximación producida por el método de Euler con $\Delta t = 0.1$.

Tabla 1.4
Método de Euler (con tres lugares decimales) para $dy/dt = 2y - 1$, $y(0) = 1$ con $\Delta t = 0.05$

k	t_k	y_k	$f(t_k, y_k)$
0	0	1	1
1	0.05	1.050	1.100
2	0.10	1.105	1.210
3	0.15	1.166	1.331
⋮	⋮	⋮	⋮
19	0.95	3.558	6.116
20	1.00	3.864	

Si comparamos cuidadosamente los resultados finales de nuestros dos cálculos, vemos que con $\Delta t = 0.1$, aproximamos $y(1) \approx 4.195$ con $y_{10} = 3.596$. Con $\Delta t = 0.05$, aproximamos $y(1)$ con $y_{20} = 3.864$. El error en la primera aproximación es ligeramente menor que 0.6, mientras que en la segunda es de 0.331. Tentativamente, podemos decir que el error se reduce a la mitad al considerar un tamaño de paso igual a la mitad del primero. Este tipo de mejoría es característico en el método de Euler. (En el capítulo 7 veremos con más precisión cómo el error en el método de Euler está relacionado con el tamaño del paso.)

Con un tamaño de paso menor de $\Delta t = 0.01$ tenemos que efectuar mucho más trabajo, ya que se requieren 100 pasos para ir de $t = 0$ a $t = 1$. Sin embargo, al final, obtenemos una aproximación mucho mejor de la solución (vea la tabla 1.5).

Este ejemplo ilustra el trueque típico que ocurre con los métodos numéricos. Siempre hay que tomar decisiones acerca del tamaño de paso Δt que considerar. Al disminuir Δt se obtienen mejores aproximaciones, pero a costa de más cálculos.

Tabla 1.5
Método de Euler (con cuatro lugares decimales) para $dy/dt = 2y - 1$, $y(0) = 1$ con $\Delta t = 0.01$

k	t_k	y_k	$f(t_k, y_k)$
0	0	1	1
1	0.01	1.0100	1.0200
2	0.02	1.0202	1.0404
3	0.03	1.0306	1.0612
⋮	⋮	⋮	⋮
98	0.98	3.9817	6.9633
99	0.99	4.0513	7.1026
100	1.00	4.1223	

Un ejemplo no autónomo

Note que es el valor $f(t_k, y_k)$ del lado derecho de la ecuación diferencial en (t_k, y_k) quien determina el siguiente punto (t_{k+1}, y_{k+1}). El último ejemplo fue una ecuación diferencial au-

Tabla 1.6
Método de Euler para $dy/dt = -2ty^2$, $y(0) = 1$ con $\Delta t = 1/2$

k	t_k	y_k	$f(t_k, y_k)$
0	0	1	0
1	1/2	1	−1
2	1	1/2	−1/2
3	3/2	1/4	−3/16
4	2	5/32	

tónoma, por lo que el lado derecho $f(t_k, y_k)$ dependió sólo de y_k. Sin embargo, si la ecuación diferencial no es autónoma, el valor de t_k también juega un papel en los cálculos.

Para ilustrar el método de Euler aplicado a una ecuación no autónoma, consideremos el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = -2ty^2, \quad y(0) = 1.$$

Esta ecuación diferencial también es separable y podemos escindir las variables para obtener la solución

$$y(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Usamos el método de Euler para aproximar esta solución sobre el intervalo $0 \leq t \leq 2$. El valor de la solución en $t = 2$ es $y(2) = 1/5$. Nuevamente, es interesante ver qué tanto nos acercamos a este valor con varias selecciones de Δt. La fórmula para el método de Euler es

$$y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k)\,\Delta t = y_k - (2t_k y_k^2)\Delta t$$

con $t_0 = 0$ y $y_0 = 1$. Comenzamos aproximando la solución de $t = 0$ a $t = 2$ usando sólo cuatro pasos. Esto implica tan pocos cálculos que podemos efectuarlos "a mano". Para cubrir un intervalo de longitud 2 en cuatro pasos, debemos usar $\Delta t = 2/4 = 1/2$. El cálculo entero se muestra en la tabla 1.6. Observe que terminamos aproximando el valor exacto $y(2) = 1/5 = 0.2$ por $y_4 = 5/32 = 0.15625$. La figura 1.34 muestra la gráfica de la solución y la compara con los resultados del método de Euler sobre este intervalo.

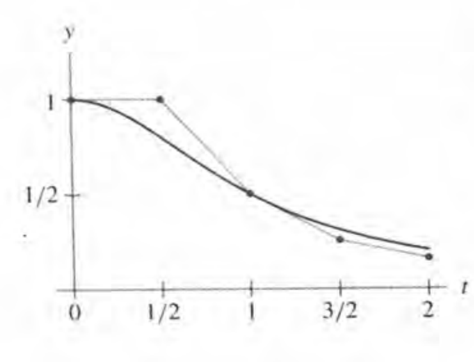


Figura 1.34
La gráfica de la solución al problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = -2ty^2, \quad y(0) = 1,$$

y la aproximación producida por el método de Euler con $\Delta t = 1/2$.

Tabla 1.7
Método de Euler (con cuatro lugares decimales) para $dy/dt = -2ty^2$, $y(0) = 1$ con $\Delta t = 0.1$

k	t_k	y_k
0	0	1
1	0.1	1.0000
2	0.2	0.9800
3	0.3	0.9416
⋮	⋮	⋮
19	1.9	0.2101
20	2.0	0.1933

Tabla 1.8
Método de Euler (con seis lugares decimales) para $dy/dt = -2ty^2$, $y(0) = 1$ con $\Delta t = 0.001$

k	t_k	y_k
0	0	1
1	0.001	1.000000
2	0.002	0.999998
3	0.003	0.999994
⋮	⋮	⋮
1999	1.999	0.200097
2000	2	0.199937

Como dijimos antes, al escoger valores de Δt más pequeños se obtienen mejores aproximaciones. Por ejemplo, si $\Delta t = 0.1$, la aproximación de Euler al valor exacto $y(2) = 0.2$ es $y_{20} = 0.1933$. Si $\Delta t = 0.001$, necesitamos calcular 2 000 pasos, pero la proximidad mejora a $y_{2\,000} = 0.199937$ (vea las tablas 1.7 y 1.8).

Note que la convergencia de la aproximación al valor real es lenta. Calculamos 2 000 pasos y obtuvimos una respuesta que sólo es correcta con tres lugares decimales. En el capítulo 7 presentaremos algoritmos más complicados para la aproximación numérica de las soluciones. Aunque los algoritmos son más complicados desde un punto de vista conceptual, generan mejores aproximaciones con menos trabajo de cálculo.

Un circuito RC con entrada periódica

Recuerde de la sección 1.3 que el voltaje v_c a través del capacitor en el circuito simple, mostrado en la figura 1.35, está dado por la ecuación diferencial

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{V(t) - v_c}{RC}$$

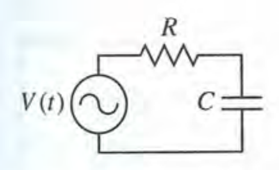


Figura 1.35
Diagrama de circuito con resistor, capacitor y fuente de voltaje.

donde R es la resistencia, C es la capacitancia y $V(t)$ es la fuente o voltaje de entrada. Hemos visto cómo podemos usar campos de pendientes para generar un croquis de las soluciones. Usando el método de Euler también es posible obtener aproximaciones numéricas de las soluciones.

Suponga que tenemos un circuito en el que $R = 0.5$ y $C = 1$. (Las unidades usuales son "ohms" para resistencia y "farads" para capacitancia. Escogemos esos números para que los valores de la solución resulten simples. Un capacitor de 1 farad sería extremadamente grande.) Entonces la ecuación diferencial es

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{V(t) - v_c}{0.5} = 2(V(t) - v_c).$$

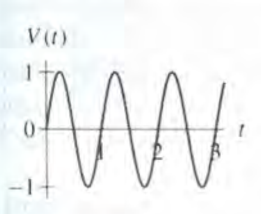


Figura 1.36
Gráfica del voltaje de entrada $V(t) = \text{sen}(2\pi t)$.

Para entender cómo varía el voltaje v_c si la fuente de voltaje $V(t)$ es periódica con respecto al tiempo, consideremos el caso en que $V(t) = \text{sen}(2\pi t)$. En consecuencia, el voltaje oscila entre -1 y 1 una vez cada unidad de tiempo (vea la figura 1.36). La ecuación diferencial es ahora

$$\frac{dv_c}{dt} = -2v_c + 2\,\text{sen}(2\pi t).$$

Del campo de pendientes para esta ecuación (vea la figura 1.37), podríamos predecir que las soluciones oscilan. Usando el método de Euler con esta ecuación para varias condiciones iniciales diferentes, comprobamos que hay una fluctuación en las soluciones. Además, vemos que se aproximan entre sí y se juntan alrededor de una sola solución (vea la figura 1.38). Esta uniformidad del comportamiento a largo plazo no puede calcularse fácilmente a partir del campo de pendientes únicamente.

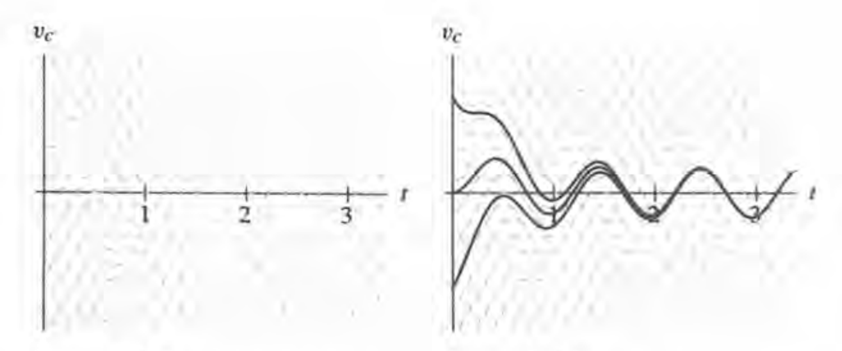


Figura 1.37
Campo de pendientes para $dv_c/dt = -2v_c + 2\,\mathrm{sen}(2\pi t)$.

Figura 1.38
Gráficas de soluciones aproximadas a $dv_c/dt = -2v_c + 2\,\mathrm{sen}(2\pi t)$, obtenidas usando el método de Euler.

Errores en los métodos numéricos

Por su naturaleza propia, cualquier esquema de aproximación numérica es inexacto. Por ejemplo, en cada paso del método de Euler, casi siempre cometemos un error de algún tipo. Esos errores pueden acumularse y algunas veces conducen a aproximaciones disparatadas. Por ejemplo, considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = e^t \,\mathrm{sen}\, y.$$

Existen soluciones de equilibrio para esta ecuación si sen $y = 0$. En otras palabras, cualquier función constante de la forma $y(t) = n\pi$ para cualquier entero n es una solución.

Usando el valor inicial $y(0) = 5$ y un tamaño de paso $\Delta t = 0.1$, el método de Euler da la aproximación graficada en la figura 1.39. Parece que algo anda mal. La solución tiende hacia la solución de equilibrio $y(t) = \pi$, pero justamente antes de $t = 5$, algo extraño sucede. La gráfica de la aproximación salta violentamente. Si reducimos Δt a 0.05, aún encontramos un comportamiento errático, incluso cuando t es ligeramente mayor que 5 antes de que esto pase (vea la figura 1.40).

Conforme al método de Euler, surge una dificultad para esta ecuación debido al término e^t en el lado derecho. Éste se vuelve muy grande cuando aumenta t y en consecuencia las pendientes en el campo de pendientes son bastante grandes para una t grande. Incluso un paso muy pequeño en la dirección t nos aleja de la solución real.

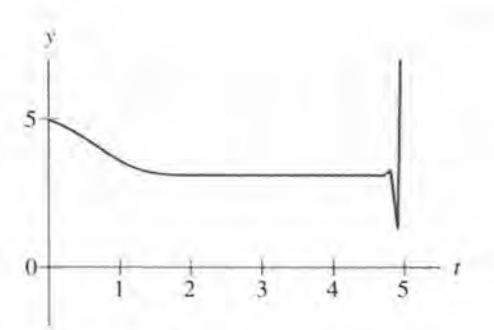


Figura 1.39
Método de Euler aplicado a $dy/dt = e^t$ sen y con $\Delta t = 0.1$.

Figura 1.40
Método de Euler aplicado a $dy/dt = e^t$ sen y con $\Delta t = 0.05$.

Este problema es típico en el uso de procedimientos numéricos para el estudio de ecuaciones diferenciales. Los métodos numéricos, cuando funcionan, llegan a ser excelentes. Pero a veces fallan. Debemos estar siempre alertas ante esta posibilidad y prepararnos para usar un enfoque alternativo. En la siguiente sección presentaremos resultados teóricos que nos ayudan a identificar cuándo abandonan el camino las aproximaciones numéricas.

Los tres grandes

Hasta ahora hemos presentado ejemplos de los tres métodos fundamentales para resolver ecuaciones diferenciales: el analítico, el numérico y el de enfoque cualitativo. ¿Cuál es el mejor?, eso depende de la ecuación diferencial en consideración y qué queremos saber acerca de las soluciones. A menudo los tres métodos "funcionan", pero puede ahorrarse una gran cantidad de trabajo si primero pensamos cuál de ellos dará la ruta más directa para la información que requerimos.



Stephen Smale (1930-) es uno de los fundadores de la teoría moderna de los sistemas dinámicos. A mediados de la década de los sesenta, Smale comenzó a proponer un enfoque más cualitativo del estudio de las ecuaciones diferenciales, tal como lo hacemos en este libro. Mediante este enfoque, él fue de los primeros matemáticos en encontrar y analizar un sistema dinámico "caótico". Desde este descubrimiento, los científicos han encontrado que muchos sistemas físicos importantes exhiben caos.

Las investigaciones de Smale abarcan muchas disciplinas, incluyendo la economía, la ciencia teórica de las computadoras, la biología matemática, así como muchas subáreas de las matemáticas. En 1966 le fue otorgada la medalla Fields, el equivalente del Premio Nobel en matemáticas. Después de retirarse de la Universidad de California en Berkeley, en 1955, tomó el puesto de profesor investigador en la Universidad de Hong Kong, donde actualmente imparte cátedra.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 1.4

En los ejercicios 1-8, use el método de Euler con el tamaño de paso dado Δt para aproximar la solución al problema de valor inicial, en el intervalo de tiempo especificado. Su respuesta debe incluir una tabla de los valores aproximados de la variable dependiente. Trate de incluir también un croquis de la gráfica de la solución aproximada.

1. $\dfrac{dy}{dt} = 2y + 1, \quad y(0) = 3, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad \Delta t = 0.5$
2. $\dfrac{dy}{dt} = t - y^2, \quad y(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \Delta t = 0.25$
3. $\dfrac{dy}{dt} = y^2 - 2y + 1, \quad y(0) = 2, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad \Delta t = 0.5$
4. $\dfrac{dy}{dt} = \operatorname{sen} y, \quad y(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq 3, \quad \Delta t = 0.5$
5. $\dfrac{dw}{dt} = (3 - w)(w + 1), \quad w(0) = 4, \quad 0 \leq t \leq 5, \quad \Delta t = 1.0$
6. $\dfrac{dw}{dt} = (3 - w)(w + 1), \quad w(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 5, \quad \Delta t = 0.5$
7. $\dfrac{dy}{dt} = e^{(2/y)}, \quad y(0) = 2, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad \Delta t = 0.5$
8. $\dfrac{dy}{dt} = e^{(2/y)}, \quad y(1) = 2, \quad 1 \leq t \leq 3, \quad \Delta t = 0.5$
9. Compare sus respuestas a los ejercicios 7 y 8 y dé sus observaciones.
10. Compare sus respuestas a los ejercicios 5 y 6. ¿Está funcionando bien el método de Euler en este caso? ¿Qué haría usted para evitar las dificultades que pueden surgir?
11. Haga un análisis cualitativo de la solución del problema de valor inicial en el ejercicio 6 y compare sus conclusiones con sus resultados. ¿Qué está mal con las soluciones aproximadas obtenidas por el método de Euler?
12. Considere el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{y}, \quad y(0) = 1.$$

Usando el método de Euler, calcule tres soluciones diferentes aproximadas correspondientes a $\Delta t = 1.0$, 0.5 y 0.25 sobre el intervalo $0 \leq t \leq 4$. Grafique las tres soluciones. ¿Cuáles son sus predicciones acerca de la solución real al problema de valor inicial?

13. Considere el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2 - y, \quad y(0) = 1.$$

Usando el método de Euler, calcule tres soluciones diferentes aproximadas correspondientes a $\Delta t = 1.0$, 0.5 y 0.25 sobre el intervalo $0 \leq t \leq 4$. Grafique las tres solucio-

nes. ¿Qué predicciones hace usted acerca de la solución real al problema de valor inicial? ¿Cómo se relacionan las gráficas de esas soluciones aproximadas con la gráfica de la solución real? ¿Por qué?

En los ejercicios 14-17, consideramos la ecuación del modelo del circuito RC del texto

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{V(t) - v_c}{RC}.$$

Suponga que $V(t) = e^{-0.1t}$ —la fuente de voltaje $V(t)$ está decayendo exponencialmente—. Si $R = 0.2$ y $C = 1$, use el método de Euler para calcular los valores de las soluciones con las condiciones iniciales dadas sobre el intervalo $0 \leq t \leq 10$.

14. $v_c(0) = 0$ **15.** $v_c(0) = 2$ **16.** $v_c(0) = -2$ **17.** $v_c(0) = 4$

18. Considere el polinomio $p(y) = -y^3 - 2y + 2$. Empleando la tecnología apropiada,
  (a) esboce el campo de pendientes para $dy/dt = p(y)$,
  (b) dibuje las gráficas de algunas de las soluciones usando el campo de pendientes,
  (c) describa la relación entre las raíces de $p(y)$ y las soluciones de la ecuación diferencial, y
  (d) con el método de Euler, aproxime la o las raíces reales de $p(y)$ con tres lugares decimales.

19. Considere el polinomio $p(y) = -y^3 + 4y + 1$. Mediante la tecnología apropiada,
  (a) bosqueje el campo de pendientes para $dy/dt = p(y)$,
  (b) esboce las gráficas de algunas de las soluciones utilizando el campo de pendientes,
  (c) describa la relación entre las raíces de $p(y)$ y las soluciones de la ecuación diferencial, y
  (d) aplicando el método de Euler, aproxime la o las raíces reales de $p(y)$ con tres lugares decimales. [*Sugerencia:* El método de Euler también funciona con una Δt negativa.]

1.5 EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LAS SOLUCIONES

¿Qué quiere decir que existen soluciones?

Hemos visto procedimientos analíticos, cualitativos y numéricos para el estudio de soluciones de ecuaciones diferenciales. Un problema que no hemos considerado es: ¿cómo sabemos que hay soluciones? Aunque esto puede parecer una pregunta sutil y abstracta, es una pregunta de gran importancia. Si no existen soluciones a las ecuaciones diferenciales, no tiene caso tratar de encontrarlas o aproximarlas. Más importante aún es que si una ecuación diferencial modela supuestamente un sistema físico, pero no existen soluciones para ecuación diferencial, entonces deberíamos tener serias dudas sobre la validez del modelo.

Para obtener una idea de qué se quiere decir por existencia de soluciones, consideremos la ecuación algebraica

$$2x^5 - 10x + 5 = 0.$$

Una solución para esta ecuación es un valor de x para el cual el lado izquierdo es igual a cero. En otras palabras, es una raíz del polinomio de quinto grado $2x^5 - 10x + 5$. Podemos calcular fácilmente que el valor de $2x^5 - 10x + 5$ es -3 si $x = 1$ y 13 si $x = -1$. Como los polinomios son continuos, entonces debe haber un valor de x entre -1 y 1 para el cual el lado izquierdo es cero.

Hemos establecido la existencia de por lo menos una solución de esta ecuación entre -1 y 1. No hallamos o aproximamos este valor de x (aparte de decir que está entre -1 y 1). Desafortunadamente, no existe una "fórmula cuadrática" para encontrar raíces de polinomios de quinto grado, por lo que no hay manera de escribir los valores exactos de las soluciones de esta ecuación. Pero esto no nos hace menos seguros de la existencia de esta solución. El punto aquí es que podemos analizar las posibles soluciones sin tener que calcularlas.

También es probable que haya más de una solución entre -1 y 1. En otras palabras, la solución puede no ser única.

De la misma manera, si nos dan un problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(0) = y_0,$$

podemos preguntar si existe una solución. Esto es diferente a preguntar cuál es ella o cómo se ve la gráfica de la ecuación. Podemos decir que hay una solución sin tener ningún conocimiento de una fórmula para ésta, de la misma manera que hemos afirmado que la ecuación algebraica anterior tiene una solución entre -1 y 1 sin conocer su valor exacto o incluso aproximado.

Existencia

Afortunadamente, el asunto de la existencia de ecuaciones diferenciales se ha estudiado ampliamente y se han obtenido muy buenos resultados. Para nuestros fines, usaremos el teorema estándar de la existencia.

TEOREMA DE LA EXISTENCIA Supongamos que $f(t, y)$ es una función continua en un rectángulo de la forma $\{(t, y) \mid a < t < b, c < y < d\}$ en el plano t-y. Si (t_0, y_0) es un punto en este rectángulo, entonces existe una $\epsilon > 0$ y una función $y(t)$ definida para $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$ que resuelve el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad \blacksquare$$

Este teorema dice que mientras sea razonable la función en el lado derecho de la ecuación diferencial, existen soluciones. (No excluye la posibilidad de encontrar respuestas aun si $f(t, y)$ no es una función razonable, pero tampoco lo garantiza.) Esto es gratificante. Cuando estudiamos las soluciones de problemas razonables de valor inicial, ahí realmente hay algo que estudiar.

Extensibilidad

Dado un problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

el teorema de existencia garantiza que hay una solución. Si lee usted el teorema muy atentamente, verá que la solución puede tener un dominio muy pequeño de definición. El teorema dice que existe una $\epsilon > 0$ y que la solución tiene un dominio que incluye el intervalo abierto $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$. La ϵ puede ser extremadamente pequeña, por lo que aunque el teorema garantiza que existe una solución, ésta puede ser definida sólo para un intervalo muy corto de tiempo.

Desafortunadamente, ésta es una seria pero necesaria restricción. Consideremos el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 1 + y^2, \quad y(0) = 0.$$

En el campo de pendientes para esta ecuación crecen en la inclinación de las pendientes cuando y aumenta (vea la figura 1.41). Por consiguiente, dy/dt crece con mayor rapidez cuando $y(t)$ aumenta. Existe el peligro de que las soluciones "exploten" (tiendan a infinito muy rápidamente) conforme t crezca. Observando las soluciones esbozadas por el campo de pendientes, no podemos decir realmente si las soluciones explotan en un tiempo finito o si permanecen finitas todo el tiempo. Para dilucidarlo, ensayaremos métodos analíticos.

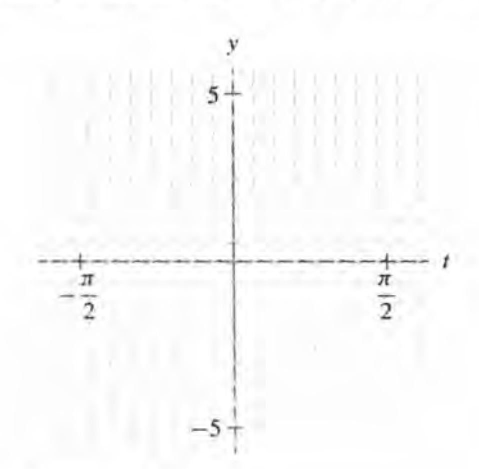


Figura 1.41
El campo de pendientes para la ecuación $dy/dt = 1 + y^2$.

Ésta es una ecuación autónoma, por lo que podemos separar variables e integrar como es común. Tenemos

$$\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int dt.$$

La integración da

$$\arctan y = t + c,$$

donde c es una constante arbitraria. Por tanto

$$y(t) = \tan(t + c),$$

que es la solución general de la ecuación diferencial. Usando el valor inicial

$$0 = y(0) = \tan(0 + c),$$

encontramos que $c = 0$ (o $c = n\pi$ para cualquier entero n.) Así, la solución particular es $y(t) = \tan t$, y el dominio de definición para esta solución particular es $-\pi/2 < t < \pi/2$.

Como veremos en la figura 1.42, nuestros temores estaban bien fundados. La gráfica de esta solución particular tiene asíntotas verticales en $t = \pm\pi/2$. Cuando t tiende a $\pi/2$ por la izquierda y a $-\pi/2$ por la derecha, la solución explota. Si esta ecuación diferencial fuese un modelo de un sistema físico, esperaríamos que el sistema se rompiese cuando t tendiese a $\pi/2$.

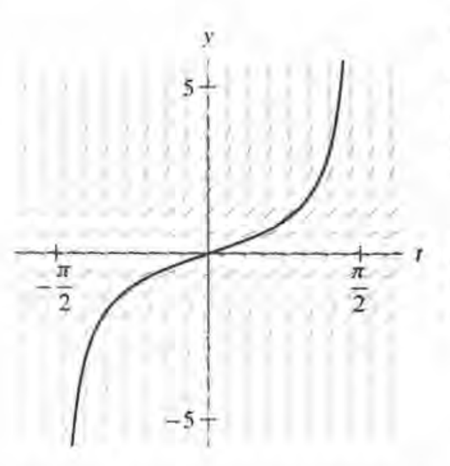


Figura 1.42
La gráfica de la solución $y(t) = \tan t$ con condición inicial $y(0) = 0$ junto con el campo de pendientes para

$$\frac{dy}{dt} = 1 + y^2.$$

Cuando t tiende a $\pi/2$ desde la izquierda, $y(t) = \tan t \to \infty$. Cuando t tiende a $-\pi/2$ desde la derecha, $y(t) = \tan t \to -\infty$.

Unicidad

Al tratar con problemas de valor inicial de la forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

siempre hemos dicho "considere *la* solución". Por el teorema de existencia sabemos que hay una solución, pero ¿cómo sabemos que hay sólo una? ¿Por qué no debemos decir "considere *una* solución" en vez de "considere *la* solución? En otras palabras, ¿cómo sabemos que la solución es única?

Saber que la solución de un problema de valor inicial es única es muy valioso, tanto desde el punto de vista teórico como práctico. Si no fuesen únicas, tendríamos entonces que preocuparnos por todas las posibles soluciones, aun cuando estuviéramos efectuando un trabajo numérico o cualitativo. Soluciones diferentes podrían dar predicciones completamente distintas acerca de cómo trabaja el sistema. Afortunadamente, existe un teorema muy valioso que garantiza que las respuestas a los problemas de valor inicial son únicas.

TEOREMA DE UNICIDAD Supongamos que $f(t, y)$ y $\partial f/\partial y$ son funciones continuas en un rectángulo de la forma $\{(t, y) \mid a < t < b, c < y < d\}$ en el plano t-y. Si (t_0, y_0) es un punto en este rectángulo y si $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son dos funciones que resuelven el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

para toda t en el intervalo $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$ (donde ϵ es algún número positivo), entonces

$$y_1(t) = y_2(t)$$

para $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$. Es decir, la solución al problema de valor inicial es *única*. ■

Antes de dar aplicaciones del teorema de unicidad, debemos hacer énfasis en que los dos teoremas de existencia y unicidad contienen *hipótesis*, es decir, condiciones que deben cumplirse para poder aplicarlos. Antes de decir que la solución de un problema inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

existe y es única, debemos verificar que $f(t, y)$ satisface las hipótesis necesarias.

A menudo juntamos estos dos teoremas (usando las hipótesis más restrictivas del teorema de unicidad) y nos referimos a la combinación de ellos como el **teorema de existencia y unicidad**.

Falta de unicidad

Es bastante difícil construir un ejemplo de una ecuación diferencial razonable que no tenga soluciones. Sin embargo, no es tan complicado encontrar ejemplos donde $f(t, y)$ sea una función razonable pero en la que falle la unicidad. (Por supuesto, en esos ejemplos, o $f(t, y)$ o bien $\partial f/\partial y$, no es continua.)

Por ejemplo, considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 3y^{2/3}.$$

El lado derecho es una función continua en todo el plano t-y. Desafortunadamente, la derivada parcial de $y^{2/3}$ con respecto a y no existe si $y = 0$, por lo que el teorema de unicidad no nos dice nada acerca del número de soluciones para un problema de valor inicial de la forma $y(t_0) = 0$.

Apliquemos las técnicas cualitativas y analíticas que ya hemos analizado. Primero, si buscamos soluciones de equilibrio, vemos que la función $y(t) = 0$ para toda t es una respuesta. Segundo, observamos que esta ecuación es separable y, por tanto, separamos las variables y obtenemos

$$\int y^{-2/3}\, dy = \int 3\, dt.$$

Integrando, tenemos las soluciones

$$y(t) = (t + c)^3$$

donde c es una constante arbitraria.

Ahora consideremos el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 3y^{2/3}, \quad y(0) = 0.$$

Una respuesta es la solución de equilibrio $y_1(t) = 0$ para toda t. Sin embargo, se obtiene una segunda solución haciendo $c = 0$ después de separar variables. Tenemos $y_2(t) = t^3$.

En consecuencia, existen dos soluciones, $y_1(t) = 0$ y $y_2(t) = t^3$, para el mismo problema de valor inicial (vea la figura 1.43).

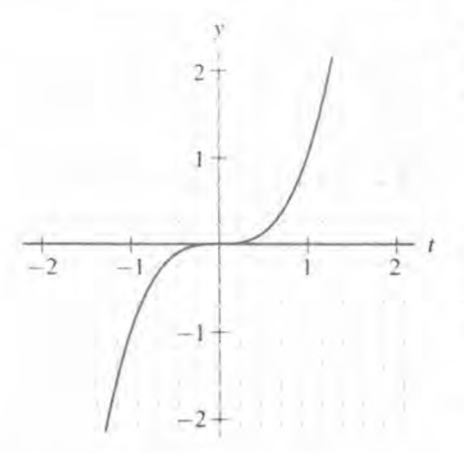


Figura 1.43
El campo de pendientes y las gráficas de dos soluciones al problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 3y^{2/3}, \quad y(0) = 0.$$

Esta ecuación diferencial no satisface la hipótesis del teorema de unicidad si $y = 0$. Note que tenemos dos soluciones diferentes cuyas gráficas se intersecan en (0, 0).

Aplicaciones del teorema de unicidad

El teorema de unicidad dice que dos soluciones para el mismo problema de valor inicial son idénticas. Este resultado es tranquilizador, pero puede no parecer práctico. Analizaremos aquí unos cuantos ejemplos para ilustrar por qué este teorema es, en realidad, muy útil.

Supongamos que $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son soluciones de una ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y),$$

donde $f(t, y)$ satisface la hipótesis del teorema de unicidad. Si para alguna t_0 tenemos $y_1(t_0) = y_2(t_0)$, entonces ambas funciones son soluciones del mismo problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_1(t_0) = y_2(t_0).$$

El teorema de unicidad garantiza que $y_1(t) = y_2(t)$, por lo menos para toda t en la que ambas soluciones están definidas. Podemos parafrasear el teorema de unicidad como:

> Si dos soluciones están siempre en el mismo lugar al mismo tiempo, entonces son la misma función.

Esta forma del teorema de unicidad es muy valioso, como lo muestran los siguientes ejemplos.

Papel de las soluciones de equilibrio

Consideremos el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(y^2 - 4)(\operatorname{sen}^2 y^3 + \cos y - 2)}{2}, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

Encontrar la solución explícita de esta ecuación no es fácil porque, aunque es autónoma y por consiguiente separable, las integrales implicadas son muy difíciles (intente resolver-

las). Por otra parte, si $y = 2$, desaparece el lado derecho de la ecuación. Entonces, la función constante $y_1(t) = 2$ es una solución de equilibrio para esta ecuación.

Supongamos que $y_2(t)$ es la solución a la ecuación diferencial que satisface la condición inicial $y_2(0) = 1/2$. El teorema de unicidad implica que $y_2(t) < 2$ para toda t, ya que la gráfica de $y_2(t)$ no puede tocar la línea $y = 2$, que es la gráfica de la solución constante $y_1(t)$ (vea la figura 1.44).

Esta observación no dice mucho sobre la solución del problema de valor inicial con $y(0) = 1/2$. Por otra parte, no tuvimos que efectuar mucho trabajo para obtener esta información. Identificar $y_1(t) = 2$ como una solución es bastante fácil, y el resto se deriva del teorema de unicidad. Efectuando un poco de trabajo, obtenemos alguna información. Si todo lo que nos preocupa es saber qué tan grande puede llegar a ser la solución del problema original de valor inicial, entonces el hecho de que está acotada arriba por $y = 2$ puede ser suficiente. Si necesitamos datos más precisos, debemos observar cuidadosamente la ecuación.

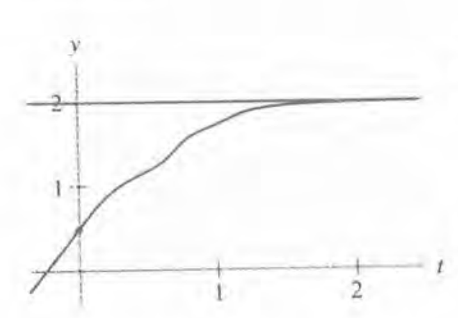


Figura 1.44
El campo de pendientes y las gráficas de dos soluciones de

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(y^2 - 4)(\text{sen}^2\, y^3 + \cos y - 2)}{2}$$

Aunque parece que esas dos gráficas concuerdan para $t > 2$, el teorema de unicidad nos dice que siempre hay un pequeño espacio entre ellas.

Comparación de soluciones

También podemos usar este procedimiento para obtener información sobre soluciones, comparándolas con soluciones "conocidas". Por ejemplo, considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(1+t)^2}{(1+y)^2}.$$

Es fácil verificar que $y_1(t) = t$ es una respuesta de la ecuación diferencial con la condición inicial $y_1(0) = 0$. Si $y_2(t)$ es la solución que satisface la condición inicial $y(0) = -0.1$, entonces $y_2(0) < y_1(0)$, por lo que $y_2(t) < y_1(t)$ para toda t. De modo que $y_2(t) < t$ para toda t (vea la figura 1.45). Nuevamente, sabemos muy poco acerca de la solución del problema de valor inicial, pero el trabajo que efectuamos fue también muy poco.

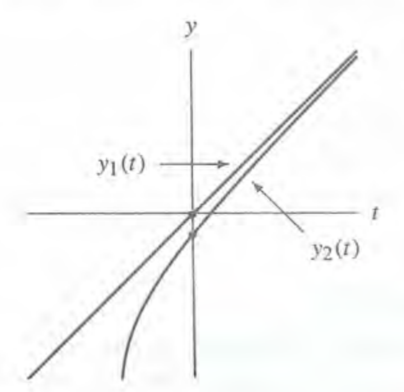


Figura 1.45
Las gráficas de dos soluciones $y_1(t)$ y $y_2(t)$ de

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(1+t)^2}{(1+y)^2}.$$

La gráfica de la solución $y_1(t)$ que satisface la condición inicial $y_1(0) = 0$ es la línea diagonal y la gráfica de la solución que satisface la condición inicial $y_2(0) = -0.1$ debe estar debajo de la línea.

Unicidad y análisis cualitativo

En algunos casos podemos usar el teorema de unicidad y alguna información cualitativa para dar información más exacta sobre las soluciones. Por ejemplo, considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = (y - 2)(y + 1).$$

El lado derecho de esta ecuación autónoma es la función $f(y) = (y - 2)(y + 1)$. Observe que $f(2) = f(-1) = 0$. Entonces, $y = 2$ y $y = -1$ son soluciones de equilibrio (vea el campo de pendientes en la figura 1.46). Por los teoremas de existencia y unicidad, cualquier solución $y(t)$ con una condición inicial $y(0)$ que satisface $-1 < y(0) < 2$ también debe hacerlo para $-1 < y(t) < 2$ para toda t.

En este caso podemos decir aún más acerca de esas soluciones. Por ejemplo, considere la solución con la condición inicial $y(0) = 0.5$. No sólo sabemos que $-1 < y(t) < 2$ para toda t, sino que como esta ecuación es autónoma, el signo de dy/dt depende sólo del valor de y. Para $-1 < y < 2$, $dy/dt = f(y) < 0$. Por consiguiente, la solución $y(t)$ con la condición inicial $y(0) = 0.5$ satisface $dy/dt < 0$ para toda t. En consecuencia, esta solución es decreciente para toda t.

Como la solución es decreciente para toda t y como siempre permanece arriba de $y = -1$, es razonable conjeturar que cuando $t \to \infty$, $y(t) \to -1$. De hecho, esto es precisamente lo que sucede. Si $y(t)$ limita cualquier valor y_0 mayor que -1 cuando $t \to \infty$, entonces cuando t es muy grande, $y(t)$ debe estar cercana a y_0. Pero $f(y_0)$ es negativa porque $-1 < y_0 < 2$. De manera que cuando $y(t)$ está cercana a y_0, tenemos dy/dt cercana a $f(y_0)$, que es negativa, por lo que la solución debe continuar decreciendo más allá de y_0. Es decir, las soluciones de esta ecuación diferencial pueden ser asintóticas sólo a las soluciones de equilibrio.

Podemos esbozar la solución de este problema de valor inicial. Para toda t, la gráfica está entre las líneas $y = -1$ y $y = 2$, y además es decreciente (vea la figura 1.47).

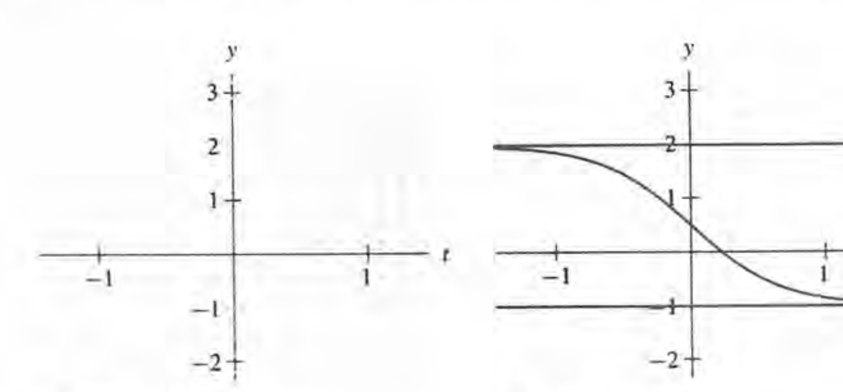


Figura 1.46
El campo de pendientes para $dy/dt = (y - 2)(y + 1)$.

Figura 1.47
Gráficas de las soluciones de equilibrio y la solución con condición inicial $y(0) = 0.5$ para $dy/dt = (y - 2)(y + 1)$.

Unicidad y aproximación numérica

Como lo muestran los ejemplos precedentes, el teorema de unicidad nos informa cualitativamente respecto al comportamiento de las soluciones. Podemos usar estos datos para

verificar el comportamiento de las aproximaciones numéricas de las soluciones. Si éstas violan el teorema de unicidad, podemos entonces estar seguros de que algo está mal.

La gráfica de la aproximación de Euler a la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = e^t \operatorname{sen} y, \qquad y(0) = 5,$$

con $\Delta t = 0.05$, se muestra en la figura 1.48. Como se observó en la sección 1.4, el comportamiento parece errático y por consiguiente nos entra la sospecha.

Podemos comprobar fácilmente que la función constante $y(t) = n\pi$ es una solución para cualquier entero n y, por el teorema de unicidad, cada respuesta está encerrada entre $y = n\pi$ y $y = (n + 1)\pi$ para algún entero n. Las aproximaciones en la figura 1.48 violan este requisito. Esto confirma nuestra sospecha de que no debemos creer en los resultados numéricos.

Esta ecuación es poco usual debido al término e^t en el lado derecho. Cuando t es grande, las pendientes de las soluciones resultan gigantescas y, por tanto, el método de Euler sobrepasa la solución verdadera incluso para un tamaño de paso muy pequeño.

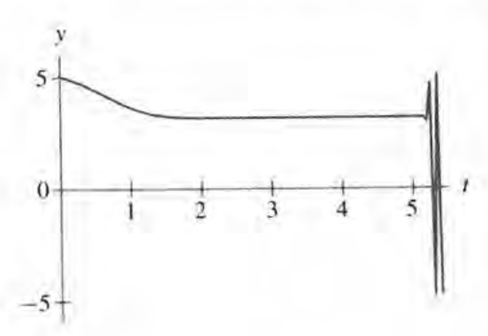


Figura 1.48
Método de Euler aplicado a

$$\frac{dy}{dt} = e^t \operatorname{sen} y$$

con $\Delta t = 0.05$. La gráfica de la aproximación se comporta como se esperaba para $t < 5$, pero para t ligeramente mayor que 5 la aproximación ya no es válida.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 1.5

En los ejercicios 1-4, nos referimos a una función f, pero no proporcionamos su fórmula. Sin embargo, suponemos que f satisface la hipótesis del teorema de unicidad en todo el plano t-y, y damos varias soluciones para la ecuación diferencial dada. Finalmente, especificamos una condición inicial. Usando el teorema de unicidad, ¿qué puede concluir usted acerca de la solución a la ecuación con la condición inicial dada?

1. $\dfrac{dy}{dt} = f(t, y)$
$y_1(t) = 3$ para toda t es una solución,
condición inicial: $y(0) = 1$

2. $\dfrac{dy}{dt} = f(y)$
$y_1(t) = 4$ para toda t es una solución,
$y_2(t) = 2$ para toda t es una solución,
$y_3(t) = 0$ para toda t es una solución,
condición inicial: $y(0) = 1$

3. $\dfrac{dy}{dt} = f(t, y)$
$y_1(t) = t + 2$ para toda t es una solución,
$y_2(t) = -t^2$ para toda t es una solución,
condición inicial: $y(0) = 1$

4. $\dfrac{dy}{dt} = f(t, y)$
$y_1(t) = -1$ para toda t es una solución,
$y_2(t) = 1 + t^2$ para toda t es una solución,
condición inicial: $y(0) = 0$

En los ejercicios 5-8 se da una condición inicial para la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = (y - 2)(y - 3)y$$

¿Qué dice el teorema de existencia y unicidad respecto a la solución correspondiente?

5. $y(0) = 4$ **6.** $y(0) = 3$ **7.** $y(0) = 1$ **8.** $y(0) = -1$

9. **(a)** Demuestre que $y_1(t) = t^2$ y $y_2(t) = t^2 + 1$ son soluciones a

$$\frac{dy}{dt} = -y^2 + y + 2yt^2 + 2t - t^2 - t^4.$$

(b) Compruebe que si $y(t)$ es una solución de la ecuación diferencial en el inciso (a) y si $0 < y(0) < 1$, entonces $t^2 < y(t) < t^2 + 1$ para toda t.

10. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y^{2/3}.$$

(a) Demuestre que $y_1(t) = 0$ para toda t es una solución.
(b) Compruebe que $y_2(t) = t^3/27$ es una solución.
(c) Verifique que $y_1(0) = y_2(0)$ pero que $y_1(t) \neq y_2(t)$ para toda t. ¿Por qué este ejemplo no contradice el teorema de unicidad?

11. Considere una ecuación diferencial de la forma $dy/dt = f(y)$, que es una ecuación autónoma, y suponga que la función $f(y)$ es continuamente diferenciable.
(a) Suponga que $y_1(t)$ es una solución y que tiene un máximo local en $t = t_0$. Sea $y_0 = y_1(t_0)$. Demuestre que $f(y_0) = 0$.
(b) Use la información del inciso (a) para esbozar el campo de pendientes a lo largo de la línea $y = y_0$ en el plano t-y.
(c) Demuestre que la función constante $y_2(t) = y_0$ es una solución (en otras palabras, $y_2(t)$ es una solución de equilibrio).
(d) Verifique que $y_1(t) = y_0$ para toda t.
(e) Compruebe que si una solución de $dy/dt = f(y)$ tiene un mínimo local, entonces es una función constante; es decir, también corresponde a una solución de equilibrio.

12. **(a)** Demuestre que

$$y_1(t) = \frac{1}{t-1} \quad \text{y} \quad y_2(t) = \frac{1}{t-2}$$

son soluciones de $dy/dt = -y^2$.

(b) ¿Qué puede decir usted acerca de las soluciones de $dy/dt = -y^2$ para la cual la condición inicial $y(0)$ satisface la desigualdad $-1 < y(0) < -1/2$? [*Sugerencia*: Podría encontrar la solución general, pero ¿qué información puede obtener usted de su respuesta al inciso (a) solo?]

13. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t^2}.$$

(a) Demuestre que la función constante $y_1(t) = 0$ es una solución.
(b) Compruebe que hay un número infinito de otras funciones que satisfacen la ecuación diferencial que concuerdan con esta solución cuando $t \leq 0$, pero que son diferentes de cero cuando $t > 0$. [*Sugerencia*: Usted necesita definir esas funciones usando lenguaje como "$y(t) = \ldots$ cuando $t \leq 0$ y $y(t) = \ldots$ cuando $t > 0$".]
(c) ¿Por qué este ejemplo no contradice el teorema de unicidad?

En los ejercicios 14−17 se da un problema de valor inicial.
(a) Encuentre una fórmula para la solución.
(b) Establezca el dominio de definición de la solución.
(c) Describa qué le ocurre a la solución cuando tiende a los límites de su dominio de definición. ¿Por qué no puede extenderse la solución para más tiempo?

14. $\frac{dy}{dt} = y^3, \quad y(0) = 1$

15. $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{(y+1)(t-2)}, \quad y(0) = 0$

16. $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{(y+2)^2}, \quad y(0) = 1$

17. $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{y-2}, \quad y(-1) = 0$

18. Hicimos la observación de que el teorema de unicidad no se aplica a toda ecuación diferencial. Existen hipótesis que deben verificarse antes de aplicar el teorema. Sin embargo, se antoja pensar que, ya que los modelos de los problemas del "mundo real" deben obviamente tener soluciones, no necesitamos preocuparnos acerca de la hipótesis del teorema de unicidad cuando estamos trabajando con ecuaciones diferenciales que modelan el mundo físico. El siguiente modelo ilustra el error de esta suposición:

Suponga que deseamos estudiar la formación de gotas de lluvia en la atmósfera. Planteamos la hipótesis razonable de que las gotas de lluvia son aproximadamente esféricas. También suponemos que la razón de crecimiento del volumen de una gota de lluvia es proporcional a su área superficial.

Sea $v(t)$ el volumen de la gota de lluvia en el tiempo t y $r(t)$ su radio. Tenemos

$$v = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

según la fórmula usual para el volumen de una esfera. Por tanto

$$r = \left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{1/3}.$$

El área superficial de la gota está dada por $4\pi r^2$, que es entonces $3^{2/3}(4\pi)^{1/3}v^{2/3}$. Por consiguiente, la ecuación diferencial que modela el volumen de la gota de agua es

$$\frac{dv}{dt} = kv^{2/3},$$

donde k es el producto de la constante de proporcionalidad y $3^{2/3}(4\pi)^{1/3}$ (vea el ejercicio 10 de esta sección).

(a) ¿Por qué no satisface esta ecuación la hipótesis del teorema de unicidad?

(b) Dé una interpretación física del hecho de que soluciones a esta ecuación con la condición inicial $v(0) = 0$ no son únicas. ¿Dice algo este modelo acerca de cómo se forman las gotas de lluvia?

1.6 EQUILIBRIOS Y LÍNEA DE FASE

Dada una ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y),$$

podemos obtener una idea de cómo se comportan las soluciones dibujando sus campos de pendientes y gráficas o usando el método de Euler y calculando soluciones aproximadas. A veces hasta podemos obtener fórmulas explícitas para las soluciones y trazar los resultados. Todos estos procedimientos requieren una buena cantidad de trabajo, ya sea numérico (cálculo de pendientes o el método de Euler) o analítico (integración).

En esta sección consideraremos ecuaciones diferenciales en las que el lado derecho es independiente de t o ecuaciones **autónomas**. Para esas ecuaciones existen procedimientos cualitativos que nos ayudan a esbozar las gráficas de las soluciones con menos álgebra que con otros procedimientos.

Ecuaciones autónomas

Las ecuaciones autónomas son ecuaciones diferenciales de la forma $dy/dt = f(y)$. En otras palabras, la razón de cambio de la variable dependiente puede expresarse como una función sólo de la variable dependiente del tiempo ($y(t)$). Las ecuaciones autónomas aparecen con frecuencia como modelos por dos razones. En primer lugar, muchos sistemas físicos funcionan igual todo el tiempo. Por ejemplo, un resorte comprimido proporciona la misma fuerza a las 10:00 y a las 15:00, fijando la medida de su compresión. En segundo lugar, para muchos sistemas, la dependencia del tiempo "se promedia" sobre las escalas de tiempo consideradas. Por ejemplo, si estamos estudiando cómo interactúan los lobos y los ratones de campo, podríamos encontrar que los lobos comen muchos más ratones de campo durante el día que por la noche. Sin embargo, si estamos interesados en cómo se comportan ambas poblaciones en un periodo de años o décadas, entonces promediamos el número de ratones comidos por cada lobo por semana. Ignoramos las fluctuaciones diarias.

Ya hemos notado que las ecuaciones autónomas tienen campos de pendientes que tienen una forma especial (vea esto en la sección 1.3). Debido a que el lado derecho de la ecuación no depende de t, las marcas de pendiente son paralelas a lo largo de líneas horizontales en el plano t-y. Es decir, para una ecuación autónoma, dos puntos con la misma coordenada y, pero diferentes coordenadas t, tienen las mismas marcas de pendiente (vea la figura 1.49).

Por consiguiente, hay una gran redundancia en el campo de pendientes de una ecuación autónoma. Si conocemos el campo de pendientes a lo largo de una sola línea vertical $t = t_0$, entonces lo conocemos en todo el plano t-y. De manera que, en vez de graficarlo todo, podríamos dibujar sólo una línea que contuviese la misma información. Esta línea se llama la **línea de fase** para la ecuación autónoma.

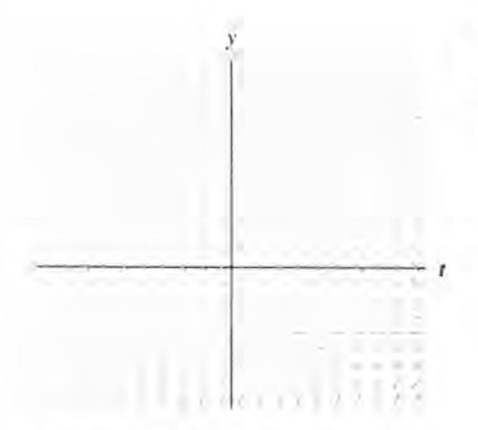


Figura 1.49
Campo de pendientes para la ecuación diferencial autónoma

$$\frac{dy}{dt} = (y - 2)(y + 1).$$

Las pendientess son paralelas a lo largo de líneas horizontales.

Metáfora de la cuerda

Suponga que le dan la ecuación diferencial autónoma

$$\frac{dy}{dt} = f(y).$$

Piense que una cuerda cuelga verticalmente extendiéndose infinitamente hacia arriba y hacia abajo. La variable dependiente y le da a usted una posición sobre la cuerda (la cuerda es el eje y). La función $f(y)$ proporciona un número para cada posición sobre la cuerda. Suponga que el número $f(y)$ está realmente impreso sobre la cuerda a la altura y para cada valor de y. Por ejemplo, a la altura $y = 2.17$, el valor $f(2.17)$ está impreso sobre la cuerda.

Usted está ahora sobre la cuerda a la altura y_0 en el tiempo $t = 0$ y recibe las siguientes instrucciones: "Lea el número que está impreso sobre la cuerda y desplácese hacia arriba o hacia abajo de la cuerda con velocidad igual a ese número. Ascienda si el número es positivo o descienda si el número es negativo. (Un número grande positivo significa que usted subirá muy rápidamente, mientras que un número negativo cercano a cero significa que usted descenderá lentamente.) Conforme se desplace, continúe leyendo los números sobre la cuerda y ajuste su velocidad de modo que siempre concuerde con el número impreso sobre la cuerda."

Si usted obedece este conjunto extraño de instrucciones, generará una función $y(t)$ que da su posición sobre la cuerda en el tiempo t. Su posición en el tiempo $t = 0$ es $y(0) = y_0$, porque es ahí donde usted estaba situado inicialmente. La velocidad de su movimiento dy/dt en el tiempo t estará dada por el número sobre la cuerda, por lo que $dy/dt = f(y(t))$ para toda t. Por consiguiente, su función de posición $y(t)$ es una solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \qquad y(0) = y_0.$$

La línea de fase es una imagen de esta cuerda. Como es tedioso registrar los valores numéricos de todas las velocidades, sólo marcamos la línea de fase con los números en que la velocidad es cero e indicamos el signo de la velocidad sobre los intervalos intermedios. La línea de fase proporciona información cualitativa acerca de las soluciones.

Línea de fase de una ecuación logística

Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = (1 - y)y.$$

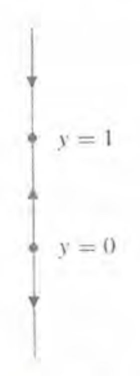


Figura 1.50
Línea de fase para $dy/dt = (1 - y)y$.

El lado derecho de la ecuación diferencial es $f(y) = (1 - y)y$. En este caso, $f(y) = 0$ precisamente cuando $y = 0$ y $y = 1$. Por tanto, la función constante $y_1(t) = 0$ para toda t y $y_2(t) = 1$ para toda t son soluciones de equilibrio para esta ecuación. Los puntos $y = 0$ y $y = 1$ sobre el eje y se denominan **puntos de equilibrio**. También notamos que $f(y)$ es positivo si $0 < y < 1$, mientras que $f(y)$ es negativo si $y < 0$ o $y > 1$. Podemos dibujar la línea de fase (o "cuerda") colocando puntos en los puntos de equilibrio $y = 0$ y $y = 1$. Para $0 < y < 1$, ponemos flechas señalando hacia arriba porque $f(y) > 0$ significa que usted debe subir; y para $y < 0$ o $y > 1$, ponemos flechas señalando hacia abajo porque $f(y) < 0$ significa que usted debe bajar (vea la figura 1.50).

Si comparamos la línea de fase con el campo de pendientes, vemos que la primera contiene toda la información acerca de las soluciones de equilibrio y de si las soluciones son crecientes o decrecientes. La información sobre la *rapidez* de crecimiento o decrecimiento de las soluciones se pierde (vea la figura 1.51). Podemos, sin embargo, dibujar croquis de las gráficas de las soluciones usando sólo la línea de fase. Ésos no serán tan exactos como los croquis del campo de pendientes, pero contendrán toda la información acerca del comportamiento de las soluciones cuando t se vuelve muy grande (vea la figura 1.52).

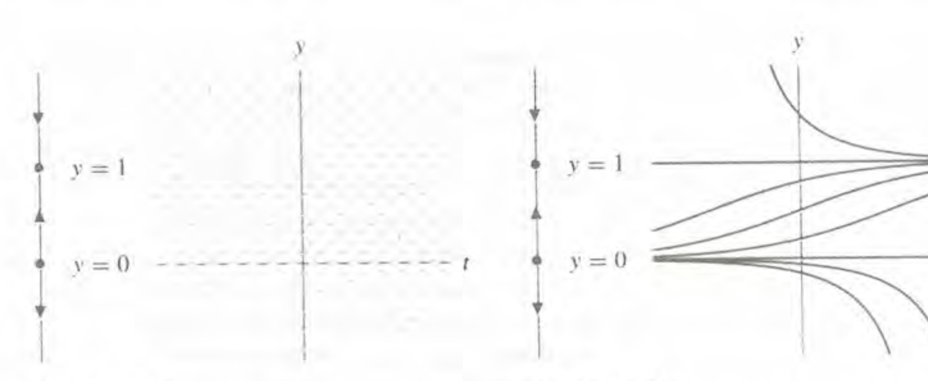


Figura 1.51
Línea de fase y campo de pendientes para $dy/dt = (1 - y)y$.

Figura 1.52
Línea de fase y esbozos de las gráficas de soluciones para $dy/dt = (1 - y)y$.

Cómo dibujar líneas de fase

Podemos dar una definición más precisa de la línea de fase dando los pasos requeridos para dibujarla. Para la ecuación autónoma $dy/dt = f(y)$:

- Dibuje la línea y.
- Encuentre los puntos de equilibrio (los números tales que $f(y) = 0$), y márquelos sobre la línea.
- Encuentre los intervalos de valores y, para los cuales $f(y) > 0$, y dibuje flechas que señalen hacia arriba sobre esos intervalos.
- Encuentre los intervalos de valores y, para los que $f(y) < 0$, y dibuje flechas que señalen hacia abajo en esos intervalos.

En la figura 1.53 hemos esbozado varios ejemplos de líneas de fase. Al observar la línea de fase, usted debe recordar la metáfora de la cuerda y pensar sobre las soluciones de la ecuación diferencial "dinámicamente": gente subiendo y bajando la cuerda conforme el tiempo aumenta.

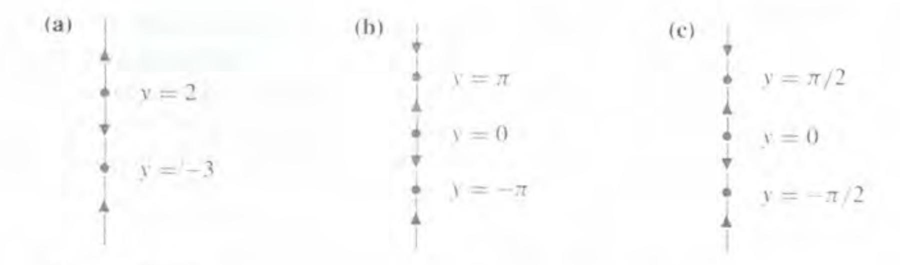


Figura 1.53
Líneas de fase para (**a**) $dy/dt = (y - 2)(y + 3)$, (**b**) $dy/dt = \text{sen } y$ y (**c**) $dy/dt = y \cos y$.

Cómo usar las líneas de fase para esbozar soluciones

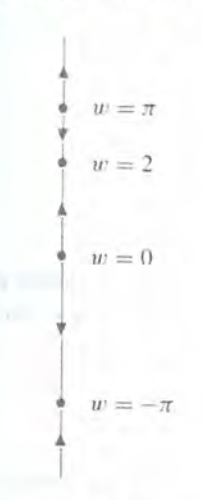


Figura 1.54
Línea de fase para $dw/dt = (2 - w)$ sen w.

Podemos obtener croquis aproximados de las gráficas de soluciones, directamente a partir de las líneas de fase, siempre que seamos cuidadosos al interpretarlos. El tipo de información que predicen muy bien las líneas de fase es el comportamiento límite de las soluciones cuando t crece o disminuye.

Consideremos la ecuación

$$\frac{dw}{dt} = (2 - w)\,\text{sen}w.$$

La línea de fase para esta ecuación diferencial está dada en la figura 1.54. Considere que los puntos de equilibrio son $w = 2$ y $w = k\pi$ para cualquier entero k. Suponga que queremos esbozar la gráfica de la solución $w(t)$ con el valor inicial $w(0) = 0.4$. Como $w = 0$ y $w = 2$ son puntos de equilibrio de esta ecuación y $0 < 0.4 < 2$, sabemos del teorema de existencia y unicidad que $0 < w(t) < 2$ para toda t. Además, debido a que $(2 - w)$ sen $w > 0$ para $0 < w < 2$, la solución es siempre creciente. Como la velocidad de la solución es pequeña sólo cuando $(2 - w)$ sen w es cercana a cero, y puesto que esto sucede sólo cerca de puntos de equilibrio, sabemos que la solución $w(t)$ crece hacia $w = 2$ cuando $t \to \infty$ (vea la sección 1.5).

De manera similar, si movemos el reloj hacia atrás, la solución $w(t)$ decrece. Siempre permanece arriba de $w = 0$ y no puede detenerse, ya que $0 < w < 2$. Entonces, cuando $t \to -\infty$, la solución tiende hacia $w = 0$. Podemos dibujar una imagen cualitativa de la gráfica de la solución con la condición inicial $w(0) = 0.4$ (vea la figura 1.55).

Del mismo modo, podemos esbozar otras soluciones en el plano t-w a partir de la información dada por la línea de fase. Las soluciones de equilibrio son fáciles de encontrar y dibujar ya que están marcadas sobre la línea de fase. Los intervalos sobre la línea de fase con flechas señalando hacia arriba pertenecen a las soluciones crecientes, y aquellos cuyas flechas señalan hacia abajo corresponden a las soluciones decrecientes. Las gráficas

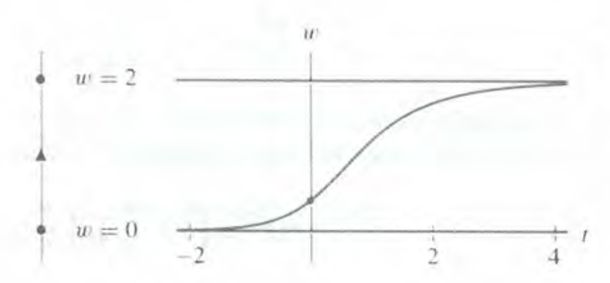


Figura 1.55
Gráfica de la solución al problema de valor inicial

$$\frac{dw}{dt} = (2-w)\,\text{sen}\,w, \quad w(0) = 0.4.$$

de las soluciones no se cortan de acuerdo con el teorema de unicidad. En particular, no pueden cortar las gráficas de las soluciones de equilibrio. Además, las soluciones deben continuar creciendo o decreciendo hasta que se acercan a una solución de equilibrio. Por consiguiente, podemos esbozar muchas soluciones con condiciones iniciales diferentes con relativa facilidad. La única información que no tenemos es qué tan rápido crecen o decrecen (vea la figura 1.56).

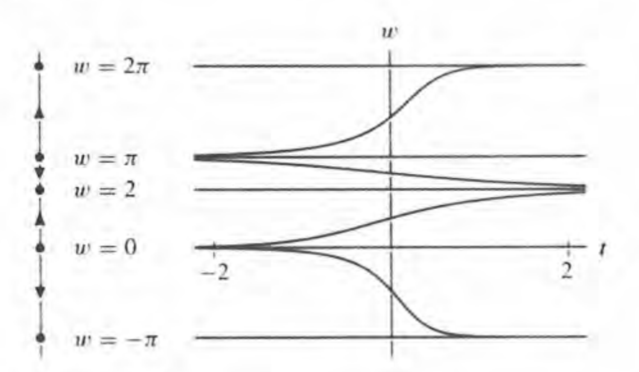


Figura 1.56
Gráficas de muchas soluciones a $dw/dt = (2 - w)$ sen w.

Estas observaciones conducen a algunos enunciados generales que pueden aplicarse a todas las soluciones de ecuaciones autónomas. Suponga que $y(t)$ es una solución de una ecuación autónoma

$$\frac{dy}{dt} = f(y).$$

- Si $f(y(0)) = 0$, entonces $y(0)$ es un punto de equilibrio y $y(t) = y(0)$ para toda t.
- Si $f(y(0)) > 0$, entonces $y(t)$ es creciente para toda t y $y(t) \to \infty$, cuando t se incrementa, o bien $y(t)$ tiende al primer punto de equilibrio mayor que $y(0)$.
- Si $f(y(0)) < 0$, entonces $y(t)$ es decreciente para toda t y $y(t) \to -\infty$, cuando t se incrementa, o bien $y(t)$ tiende al primer punto de equilibrio menor que $y(0)$.

Cuando t decrece, podemos encontrar resultados similares que también son válidos (el tiempo corre hacia atrás). Si $f(y(0)) > 0$, entonces $y(t)$ tiende (en tiempo negativo) a $-\infty$, o al siguiente punto de equilibrio menor. Si $f(y(0)) < 0$, entonces $y(t)$ tiende (en tiempo negativo) a $+\infty$, o al siguiente punto de equilibrio mayor.

Un ejemplo con tres puntos de equilibrio

Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = \left(1 - \frac{P}{20}\right)^3 \left(\frac{P}{5} - 1\right) P^7.$$

Si la condición inicial está dada por $P(0) = 8$, ¿qué sucede cuando t se vuelve muy grande? Primero dibujamos la línea de fase para esta ecuación. Sea

$$f(P) = \left(1 - \frac{P}{20}\right)^3 \left(\frac{P}{5} - 1\right) P^7$$

Encontramos los puntos de equilibrio resolviendo $f(P) = 0$. Así, $P = 0$, $P = 5$ y $P = 20$ son los puntos de equilibrio.

Si $0 < P < 5$, $f(P)$ es negativa; si $P < 0$ o $5 < P < 20$, $f(P)$ es positiva; y si $P > 20$, $f(P)$ es negativa. Podemos colocar las flechas apropiadamente sobre la línea de fase (vea la figura 1.57). Note que sólo tenemos que verificar el valor de $f(P)$ en un punto de cada uno de esos intervalos para determinar el signo de $f(P)$ en todo el intervalo.

La solución $P(t)$ con condición inicial $P(0) = 8$ está en la región entre los puntos de equilibrio $P = 5$ y $P = 20$, por lo que $5 < P(t) < 20$ para toda t. Las flechas señalan hacia arriba en este intervalo, por tanto $P(t)$ es creciente para toda t. Cuando $t \to \infty$, $P(t)$ tiende hacia el punto de equilibrio $P = 20$.

Cuando $t \to -\infty$, la solución con condición inicial $P(0) = 8$ decrece hacia el siguiente punto de equilibrio más pequeño, que es $P = 5$. Por consiguiente, $P(t)$ es siempre mayor que $P = 5$. Si calculamos numéricamente la solución $P(t)$, vemos que se incrementa rápidamente de $P(0) = 8$ hasta cerca de $P = 20$ (vea la figura 1.58). Si sólo tomamos a la línea de fase, no podemos predecir qué tan rápido crece la solución.

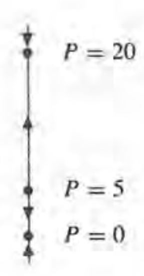


Figura 1.57
Línea de fase para $dP/dt = f(P) = (1 - P/20)^3((P/5) - 1)P^7$.

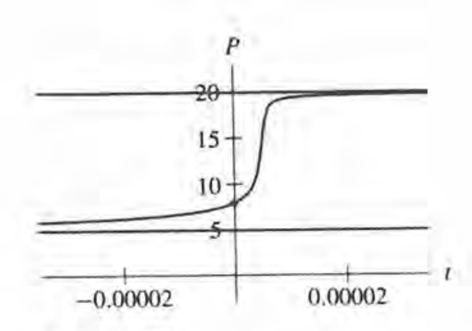


Figura 1.58
Gráfica de la solución al problema de valor inicial $dP/dt = (1 - P/20)^3((P/5) - 1)P^7$, $P(0) = 8$.

Advertencia: No todas las soluciones existen todo el tiempo

Supongamos que y_0 es un punto de equilibrio para la ecuación $dy/dt = f(y)$. Entonces $f(y_0) = 0$. Estamos considerando que $f(y)$ es continua, por lo que si las soluciones son cercanas a y_0, el valor de f es pequeño. Las soluciones se desplazan lentamente cuando están próximas a los puntos de equilibrio. Una solución que se acerca a un punto de equilibrio cuando t crece (o decrece) se mueve cada vez más lentamente al acercarse a éste. Por el teorema de existencia y unicidad, una solución que se acerca a un punto de equilibrio nunca llega realmente a él. Es *asintótica* al punto de equilibrio y la gráfica de la solución en el plano t-y tiene una asíntota horizontal.

Por otra parte, las soluciones no acotadas se aceleran a menudo al moverse. Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = (1 + y)^2$$

tiene un punto de equilibrio en $y = -1$ y $dy/dt > 0$ para todo otro valor de y (vea la figura 1.59).

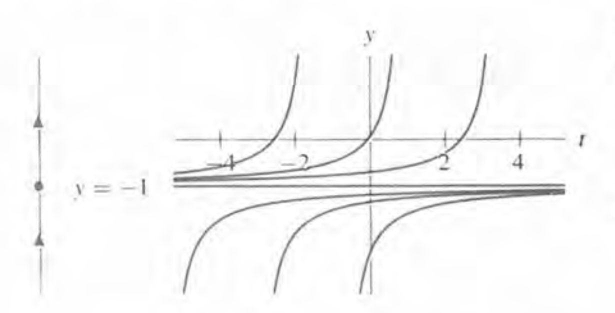


Figura 1.59
Línea de fase para

$$\frac{dy}{dt} = (1 + y)^2$$

y gráficas de soluciones que no están acotadas en un tiempo finito.

La línea de fase indica que las soluciones con condiciones iniciales mayores que -1 crecen para toda t y tienden a $+\infty$ cuando t aumenta.

Si separamos las variables y calculamos la forma explícita de la solución, podemos determinar que esas soluciones en realidad explotan en un tiempo finito. De hecho, la forma explícita de cualquier solución no constante está dada por

$$y(t) = -1 - \frac{1}{t + c}$$

para alguna constante c. Como estamos suponiendo que $y(0) > -1$, debemos tener

$$y(0) = -1 - \frac{1}{c} > -1,$$

que implica que $c < 0$. Por tanto, esas soluciones están definidas sólo para $t < -c$ y tienden a ∞ cuando $t \to -c$ desde abajo (vea la figura 1.59). No podemos decir si las soluciones explotan en un tiempo finito simplemente viendo la línea de fase.

Las soluciones con condiciones iniciales $y(0) < -1$ son asintóticas al punto de equilibrio $y = -1$ cuando t aumenta, por lo que están definidas para toda $t > 0$. Sin embargo, esas soluciones tienden a $-\infty$ en un tiempo finito cuando t disminuye.

Otro peligroso ejemplo es

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1 - y}.$$

Si $y > 1$, dy/dt es negativa; y si $y < 1$, dy/dt es positiva. Si $y = 1$, dy/dt no existe. La línea de fase tiene un agujero. No hay una manera estándar para denotar tales puntos sobre la línea de fase, pero usaremos un pequeño círculo vacío para marcarlos (vea la figura 1.60).

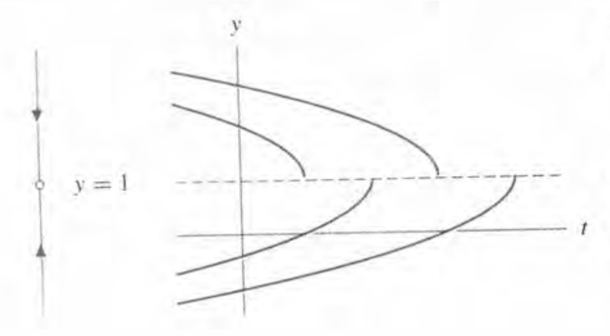


Figura 1.60
Línea de fase para

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1 - y}.$$

Observe que dy/dt no está definida para $y = 1$. Además, las gráficas de las soluciones llegan al "agujero" en $y = 1$ en un tiempo finito.

Todas las soluciones tienden hacia $y = 1$ cuando t aumenta. Como el valor de dy/dt es grande si y está cercana a 1, las soluciones se aceleran cuando se acercan a $y = 1$ y alcanzan dicho valor en un tiempo finito. Una vez que una solución alcanza el valor $y = 1$, no puede continuar porque ha dejado el dominio de definición de la ecuación diferencial. Ha caído en un agujero situado en la línea de fase.

Dibujo de líneas de fase a partir sólo de información cualitativa

Para dibujar la línea de fase de la ecuación diferencial $dy/dt = f(y)$, tenemos que conocer la posición de los puntos de equilibrio y los intervalos sobre los que las soluciones son crecientes o decrecientes. Es decir, tenemos que saber cuáles son los puntos en que $f(y) = 0$, los intervalos en que $f(y) > 0$ y aquellos en que $f(y) < 0$. En consecuencia, podemos dibujar la línea de fase para la ecuación diferencial sólo con la información cualitativa acerca de la función $f(y)$.

Por ejemplo, suponga que no conocemos una fórmula para $f(y)$, pero que tenemos su gráfica (vea la figura 1.61). De la gráfica podemos determinar los valores de y para los cuales $f(y) = 0$ y decidir en qué intervalos $f(y) > 0$ y $f(y) < 0$. Con esta información es posible dibujar la línea de fase (vea la figura 1.62), y a partir de ella obtener los croquis cualitativos de las soluciones (vea la figura 1.63). Podemos pasar entonces de la información cualitativa de $f(y)$ a las gráficas de las soluciones de la ecuación diferencial $dy/dt = f(y)$, sin escribir jamás una fórmula. Para modelos donde la información disponible es completamente cualitativa, este enfoque es muy apropiado.

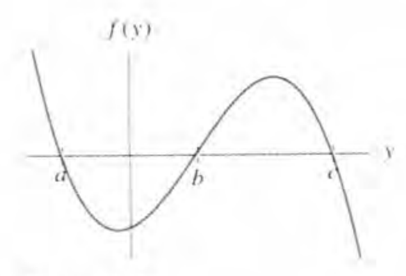


Figura 1.61
Gráfica de $f(y)$.

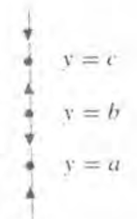


Figura 1.62
Línea de fase para $dy/dt = f(y)$ para la $f(y)$ graficada en la figura 1.61.

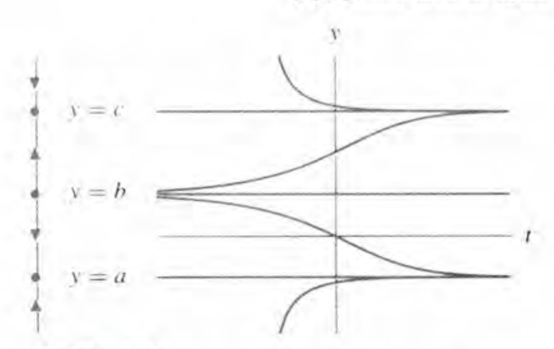


Figura 1.63
Esbozos de soluciones para $dy/dt = f(y)$ para la $f(y)$ graficada en la figura 1.61.

El papel de los puntos de equilibrio

Ya hemos determinado que toda solución de una ecuación diferencial autónoma $dy/dt = f(y)$ tiende a $+\infty$ o a $-\infty$ cuando t aumenta (volviéndose tal vez infinita en un tiempo finito), o bien, tiende asintóticamente a un punto de equilibrio cuando t crece. Por consiguiente, los puntos de equilibrio son sumamente importantes para entender el comportamiento a largo plazo de las soluciones.

También vimos que para dibujar una línea de fase, necesitamos encontrar los puntos de equilibrio, esto es, los intervalos en que $f(y)$ es positiva y en los que $f(y)$ es negativa. Si f es continua, puede cambiar de positiva a negativa sólo en puntos y_0 donde $f(y_0) = 0$, es decir, en puntos de equilibrio. Por tanto, estos últimos también juegan un papel crucial en el esbozo de la línea de fase.

De hecho, los puntos de equilibrio son la clave para entender la línea de fase. Por ejemplo, consideremos la ecuación diferencial autónoma $dy/dt = g(y)$. Supongamos que toda la información acerca de ella es que tiene exactamente dos puntos de equilibrio, en $y = 2$ y en $y = 7$ y que la línea de fase cerca de $y = 2$ y $y = 7$ es como se muestra en la figura 1.64. Podemos usar esta información para esbozar toda la línea de fase. Sabemos que el signo de $g(y)$ puede cambiar sólo en un punto de equilibrio. Por tanto, el signo de $g(y)$ no cambia para $2 < y < 7$, para $y < 2$ o para $y > 7$. Entonces, si conocemos la dirección de las flechas en cualquier parte de esos intervalos (digamos cerca de los puntos de equilibrio), sabemos también las direcciones sobre toda la línea de fase (vea la figura 1.65). En consecuencia, si entendemos los puntos de equilibrio para una ecuación diferencial autónoma, estamos capacitados para entender (por lo menos cualitativamente) cualquier solución de la ecuación.

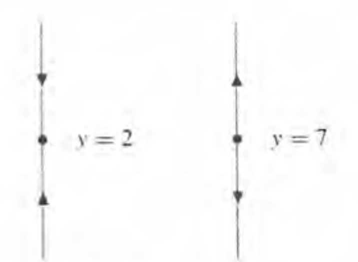


Figura 1.64
Partes de la línea de fase para $dy/dt = g(y)$ cerca de $y = 2$ y $y = 7$.

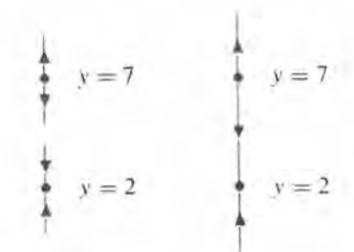


Figura 1.65
Línea de fase entera de $dy/dt = g(y)$ construida a partir de la línea de fase cerca de los puntos de equilibrio.

Clasificación de los puntos de equilibrio

Dada su importancia, es conveniente ponerle nombre a los diferentes tipos de puntos de equilibrio y clasificarlos de acuerdo con el comportamiento de las soluciones cercanas. Consideremos un punto de equilibrio $y = y_0$, como el mostrado en la figura 1.66. Para y ligeramente menor que y_0, las flechas señalan hacia arriba; para y ligeramente mayor que y_0, las flechas señalan hacia abajo. Una solución con condición inicial cercana a y_0 es asintótica a y_0 cuando $t \to \infty$.

Decimos que un punto de equilibrio y_0 es un **sumidero** si cualquier solución con condición inicial lo suficientemente cercana a y_0 es asintótica a y_0 cuando t aumenta. (El

nombre *sumidero* supuestamente debe traernos a la mente un sumidero de cocina con el punto de equilibrio en la salida del agua. Si el agua está suficientemente cercana a la salida, fluirá hacia tal punto.)

Otra posible línea de fase cerca de un punto de equilibrio y_0 se muestra en la figura 1.67. Aquí las flechas señalan hacia arriba para valores de y que se localizan justo arriba de y_0; y hacia abajo, para valores de y precisamente debajo de y_0. Una solución que tiene un valor inicial cerca de y_0 tiende a alejarse de y_0 cuando t crece. Si el tiempo transcurre hacia atrás, las soluciones que comienzan cerca de y_0 declinan hacia y_0.

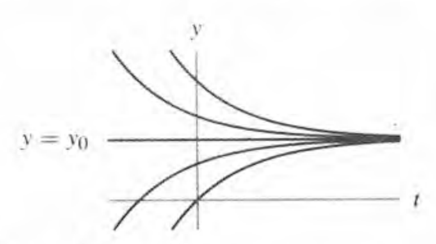


Figura 1.66
Línea de fase en un sumidero y gráficas de soluciones cerca de un sumidero.

Figura 1.67
Línea de fase en una fuente y gráficas de soluciones cerca de una fuente.

Decimos que un punto de equilibrio y_0 es una **fuente,** cuando todas las soluciones que comienzan suficientemente cerca de y_0 tienden hacia y_0 conforme t decrece. Esto significa que todas las soluciones que empiezan cerca de y_0 (pero no en y_0) tenderán a alejarse de y_0 a medida que t se incrementa. Entonces, una fuente es un sumidero si el tiempo transcurre hacia atrás. (El nombre *fuente* debe supuestamente ayudar a imaginar soluciones que brotan de un punto.)

Los sumideros y las fuentes son los dos tipos principales de puntos de equilibrio. Todo punto de equilibrio que no es ni fuente ni sumidero se llama **nodo**. En la figura 1.68 se muestran dos posibles líneas de fase cerca de nodos.

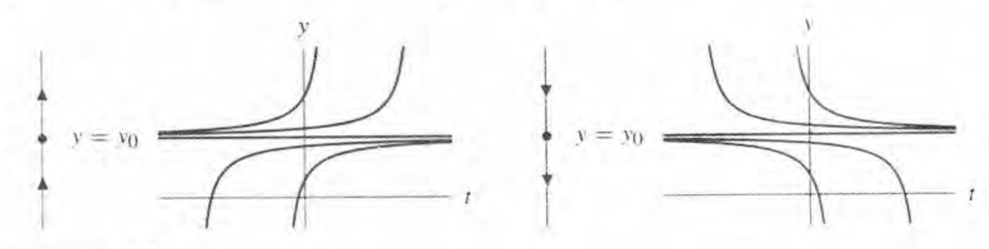


Figura 1.68
Ejemplos de puntos nodales de equilibrio y gráficas de soluciones cercanas.

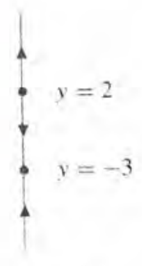


Figura 1.69
Línea de fase para $dy/dt = y^2 + y - 6$.

Dada una ecuación diferencial, podemos clasificar los puntos de equilibrio como sumideros, fuentes o nodos, a partir de la línea de fase. Por ejemplo, considere

$$\frac{dy}{dt} = y^2 + y - 6 = (y + 3)(y - 2).$$

Los puntos de equilibrio son $y = -3$ y $y = 2$. También, $dy/dt < 0$ para $-3 < y < 2$, y $dy/dt > 0$ para $y < -3$ y $y > 2$. Con esta información podemos dibujar la línea de fase, y en ésta vemos que $y = -3$ es un sumidero y $y = 2$ es una fuente (vea la figura 1.69).

Supongamos que nos dan una ecuación diferencial $dw/dt = g(w)$, donde el lado derecho $g(w)$ está especificado en términos de una gráfica y no en términos de una fórmula. Podemos aún entonces esbozar la línea de fase. Por ejemplo, digamos que $g(w)$ es la función graficada en la figura 1.70. La ecuación diferencial correspondiente tiene tres puntos de equilibrio: $w = -0.5$, $w = 1$ y $w = 2.5$; y $g(w) > 0$ si $w < -0.5$, $1 < w < 2.5$ y $w > 2.5$. Para $-0.5 < w < 1$, $g(w) < 0$. Usando esta información podemos dibujar la línea de fase (vea la figura 1.71) y clasificar los puntos de equilibrio. El punto $w = -0.5$ es un sumidero, el punto $w = 1$ es una fuente y el punto $w = 2.5$ es un nodo.

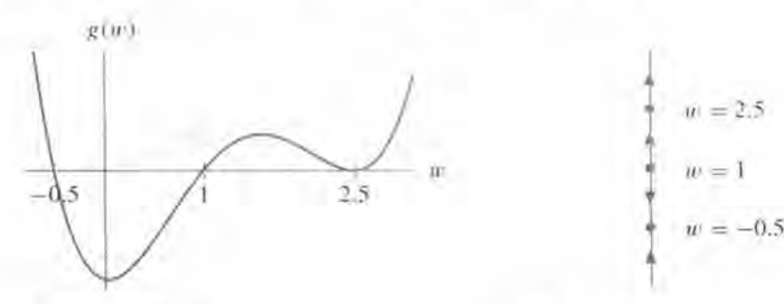


Figura 1.70
Gráfica de $g(w)$.

Figura 1.71
Línea de fase para $dw/dt = g(w)$ para $g(w)$, tal como se muestra en la figura 1.70.

Identificación del tipo de un punto de equilibrio y "linearización"

De los ejemplos previos sabemos que es posible determinar la línea de fase y clasificar los puntos de equilibrio para una ecuación diferencial autónoma $dy/dt = f(y)$, partiendo sólo de la gráfica de $f(y)$. Como la clasificación de un punto de equilibrio depende únicamente de la línea de fase cerca del punto de equilibrio, entonces deberíamos poder determinar el tipo de un punto de equilibrio y_0 a partir de la gráfica de $f(y)$ cerca de y_0.

Si y_0 es un sumidero, entonces las flechas sobre la línea de fase justamente abajo de y_0 señalan hacia arriba, y las flechas justo arriba de y_0 señalan hacia abajo. Por tanto, $f(y)$ debe ser positiva cuando y es menor que y_0, y negativa cuando y es mayor que y_0 (vea la figura 1.72). Entonces f debe estar decreciendo conforme y se aproxima a y_0. Inversamente, si $f(y_0) = 0$ y f está decreciendo para toda y cercana a y_0, entonces $f(y)$ es positiva justo a la izquierda de y_0 y negativa justamente a la derecha de y_0. Por consiguiente, y_0 es un sumidero. De manera similar, el punto de equilibrio y_0 es una fuente, si y sólo si, f está creciendo para toda y cercana a y_0 (vea la figura 1.73).

Contamos con una poderosa herramienta del cálculo para dilucidar si una función está creciendo o decreciendo en un punto particular: la derivada. Usando la derivada de $f(y)$ combinada con las observaciones geométricas anteriores, podemos dar criterios que especifican el tipo de punto de equilibrio.

TEOREMA DE LA LINEARIZACIÓN Suponga que y_0 es un punto de equilibrio de la ecuación diferencial $dy/dt = f(y)$ donde f es una función diferenciable continuamente. Entonces,

- si $f'(y_0) < 0$, entonces y_0 es un sumidero;
- si $f'(y_0) > 0$, entonces y_0 es una fuente; o
- si $f'(y_0) = 0$, o si $f'(y_0)$ no existe, entonces necesitamos información adicional para determinar el tipo de y_0. ▪

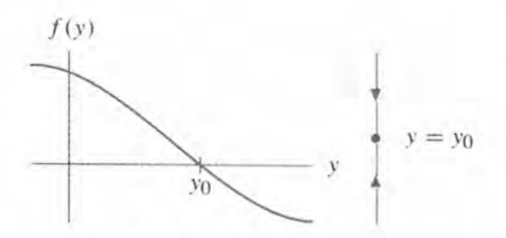


Figura 1.72
Línea de fase cerca de un sumidero en $y = y_0$ para $dy/dt = f(y)$ y gráfica de $f(y)$ cerca de $y = y_0$.

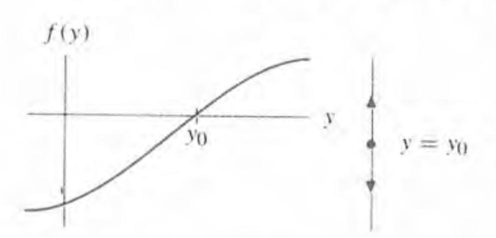


Figura 1.73
Línea de fase cerca de una fuente en $y = y_0$ para $dy/dt = f(y)$ y gráfica de $f(y)$ cerca de $y = y_0$.

Este teorema se deriva inmediatamente del análisis anterior a su enunciado, una vez que recordamos que si $f'(y_0) < 0$, entonces f está decreciendo cerca de y_0, y si $f'(y_0) > 0$, entonces f está creciendo cerca de y_0. Este análisis y esas conclusiones son un ejemplo de la **linearización**, una técnica que a menudo encontraremos de utilidad. La derivada $f'(y_0)$ nos da el comportamiento de la mejor aproximación lineal a f cerca de y_0. Si reemplazamos f por su mejor aproximación lineal, entonces la ecuación diferencial que obtenemos es muy cercana a la ecuación diferencial original para la y más próxima a y_0.

No podemos concluir nada sobre la clasificación de y_0 si $f'(y_0) = 0$, porque pueden ocurrir las tres posibilidades (vea la figura 1.74).

Como otro ejemplo, considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = h(y) = y(\cos(y^5 + 2y) - 27\pi y^4).$$

¿Cómo se ve la línea de fase cerca de $y = 0$? Dibujar la línea de fase para esta ecuación sería muy complicado. Tendríamos que encontrar los puntos de equilibrio y determinar el

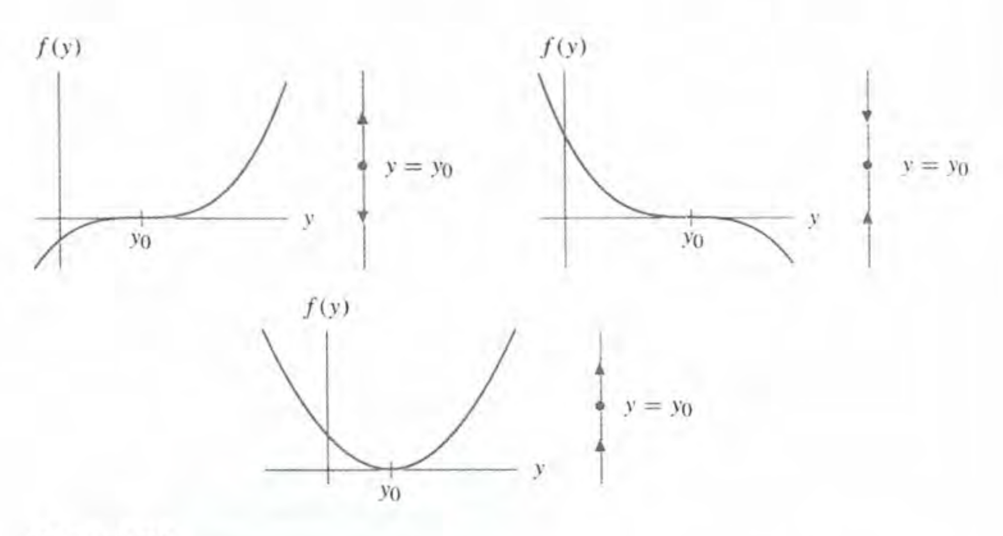


Figura 1.74
Gráficas de varias funciones f junto con las correspondientes líneas de fase para la ecuación diferencial $dy/dt = f(y)$. En todos los casos, $y_0 = 0$ es un punto de equilibrio y $f'(y_0) = 0$.

signo de $h(y)$. Por otra parte, es fácil observar que $y = 0$ es un punto de equilibrio porque $h(0) = 0$. Calculamos

$$h'(y) = (\cos(y^5 + 2y) - 27\pi y^4) + y\frac{d}{dy}(\cos(y^5 + 2y) - 27\pi y^4).$$

Entonces $h'(0) = (\cos(0) - 0) + 0 = 1$. Por el teorema de linearización concluimos que $y = 0$ es una fuente. Las soluciones que comienzan suficientemente cerca de $y = 0$, se alejan de este punto cuando t crece. Por supuesto, existe la peligrosa cláusula "suficientemente cerca". Las condiciones iniciales tendrían que estar muy próximos a $y = 0$ para que se aplicase lo anterior. Nuevamente obtuvimos poca información, por lo que tendremos que estudiar la función $h(y)$ más cuidadosamente.

Modelo logístico modificado

Como aplicación de estos conceptos, usaremos los procedimientos de esta sección para analizar una modificación del modelo logístico de población que presentamos en la sección 1.1.

La ardilla negra es un pequeño mamífero nativo de las Montañas Rocallosas. Esas ardillas son muy territoriales, por lo que si su población es grande, su razón de crecimiento decrece y puede aun llegar a ser negativa. Por otra parte, si la población es demasiado pequeña, los adultos fértiles corren el riesgo de no ser capaces de encontrar parejas adecuadas, y la tasa de crecimiento es nuevamente negativa.

El modelo

Podemos enunciar esas suposiciones sucintamente:

- Si la población es muy grande, la razón de crecimiento es negativa.
- Si la población es muy pequeña, la razón de crecimiento es negativa.

La población crece entonces sólo si está entre "demasiado grande" y "demasiado pequeña". Además es razonable suponer que si la población es cero, se quedará en cero. Entonces, también es posible que:

- Si la población es cero, la razón de crecimiento es cero. (Compare esas hipótesis con las del modelo logístico de población de la sección 1.1.)

Sea

t = tiempo (variable independiente)
$S(t)$ = población de ardillas en el tiempo t (variable dependiente)
k = coeficiente de razón de crecimiento (parámetro)
N = capacidad de soporte (parámetro), y
M = constante de "escasez" (parámetro).

La capacidad de soporte N indica qué población es "demasiado grande" y el parámetro de escasez M señala qué población es "muy pequeña".

Ahora queremos un modelo de la forma $dS/dt = g(S)$ que se ajuste a las hipótesis. Podemos pensar en las hipótesis como determinantes de la forma de la gráfica de $g(S)$, en particular donde $g(S)$ es positiva y donde es negativa. Note que $dS/dt = g(S) < 0$ si $S > N$, ya



Nancy Kopell (1942 -) recibió su doctorado en matemáticas en la Universidad de California, en Berkeley, donde escribió su tesis bajo la dirección de Stephen Smale. Ella es una de las figuras principales en el uso de ecuaciones diferenciales para modelar fenómenos naturales. Kopell ha usado técnicas similares a las que estudiamos en este libro para atacar problemas tan diversos como la formación de patrones en sistemas químicos y las redes de neuronas que gobiernan el movimiento rítmico en animales y otras oscilaciones en el sistema nervioso central.

Ella ha recibido numerosos premios por su trabajo, incluido un MacArthur Fellowship "genius grant" en 1990. En 1996 fue elegida a la Academia Nacional de Ciencias. Actualmente es profesora de matemáticas y directora del Centro de Biodinámica (y colega de los autores) en la Universidad de Boston.

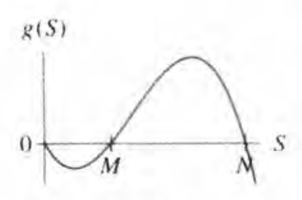


Figura 1.75
Gráfica de $g(S)$.

que la población decrece cuando se eleva la tasa de crecimiento. También, $g(S) < 0$ cuando $S < M$, porque la población decrece si no hay incremento. Finalmente, $g(S) > 0$ cuando $M < S < N$ y $g(0) = 0$. Es decir, queremos que $g(S)$ tenga un gráfica como la de la figura 1.75. La gráfica de g para $S < 0$ no es importante, porque un número negativo de ardillas no tiene sentido.

El modelo logístico daría un comportamiento "correcto" para poblaciones cercanas a la capacidad de soporte, pero para las poblaciones pequeñas (debajo del nivel M de "escasez"), las soluciones del modelo logístico no concuerdan con las hipótesis. Por consiguiente, tenemos que modificar el modelo logístico a fin de incluir el comportamiento de las poblaciones pequeñas y el parámetro M. Creamos un modelo de la forma

$$\frac{dS}{dt} = g(S) = kS\left(1 - \frac{S}{N}\right) \text{ (algo)}.$$

El término "algo" debe ser positivo si $S > M$, y negativo si $S < M$. La expresión más simple que satisface esas condiciones es

$$\text{(algo)} = \left(\frac{S}{M} - 1\right).$$

Nuestro modelo es entonces

$$\frac{dS}{dt} = kS\left(1 - \frac{S}{N}\right)\left(\frac{S}{M} - 1\right).$$

Éste es el modelo logístico con el término adicional

$$\left(\frac{S}{M} - 1\right).$$

Llamamos a éste el modelo logístico modificado de población. (Observe que otros modelos también podrían llamarse logísticos modificados, pero sus innovaciones son distintas.)

Análisis del modelo

Para analizar las soluciones de esta ecuación diferencial (que sabemos es separable) podríamos usar procedimientos analíticos, ya que la ecuación es separable. Sin embargo, los procedimientos cualitativos proporcionan mucha información acerca de las soluciones con menos trabajo. La ecuación diferencial es

$$\frac{dS}{dt} = g(S) = kS\left(1 - \frac{S}{N}\right)\left(\frac{S}{M} - 1\right),$$

con $0 < M < N$ y $k > 0$. Hay tres puntos de equilibrio: $S = 0$, $S = M$ y $S = N$. Si $0 < S < M$, tenemos $g(S) < 0$, por lo que las soluciones con condiciones iniciales entre 0 y M decrecen. Asimismo, si $S > N$, entonces $g(S) < 0$, y por lo tanto las soluciones con condiciones iniciales mayores que N también disminuyen. Para $M < S < N$, sabemos que $g(S) > 0$. En consecuencia, cuando la condición inicial está entre M y N se incrementa la solución. Nuestra conclusión es que los equilibrios en 0 y N son sumideros y el punto de equilibrio en M es una fuente. La línea de fase y las gráficas de soluciones típicas se muestran en la figura 1.76.

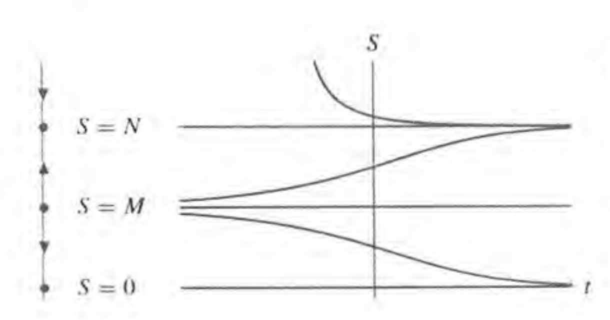


Figura 1.76
Soluciones de la ecuación logística modificada

$$\frac{dS}{dt} = k\left(1 - \frac{S}{N}\right)\left(\frac{S}{M} - 1\right)S,$$

con varias condiciones iniciales.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 1.6

En los ejercicios 1-8, esboce las líneas de fase para la ecuación diferencial dada. Identifique los puntos de equilibrio como sumideros, fuentes o nodos.

1. $\dfrac{dy}{dt} = 3y(1 - y)$
2. $\dfrac{dy}{dt} = y^2 - 6y - 16$
3. $\dfrac{dy}{dt} = \cos y$
4. $\dfrac{dw}{dt} = w \cos w$
5. $\dfrac{dw}{dt} = (w - 2)\,\text{sen}\, w$
6. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{y - 2}$
7. $\dfrac{dw}{dt} = w^2 + 2w + 10$
8. $\dfrac{dy}{dt} = \tan y$

En los ejercicios 9-15 se da una ecuación diferencial y se especifican varias condiciones iniciales. Esboce las gráficas de las soluciones que satisfacen a esas condiciones iniciales. En cada ejercicio, coloque todas sus gráficas sobre un par de ejes.

9. Ecuación del ejercicio 1; $y(0) = 1$, $y(2) = -1$, $y(0) = 1/2$, $y(0) = 2$.
10. Ecuación del ejercicio 2; $y(0) = 1$, $y(1) = 0$, $y(0) = -10$, $y(0) = 5$.

11. Ecuación del ejercicio 3; $y(0) = 0$, $y(-1) = 1$, $y(0) = -\pi/2$, $y(0) = \pi$.

12. Ecuación del ejercicio 4; $w(0) = 0$, $w(3) = 1$, $w(0) = 2$, $w(0) = -1$.

13. Ecuación del ejercicio 5; $w(0) = 1$, $w(0) = 7/4$, $w(0) = -1$, $w(0) = 3$.

14. Ecuación del ejercicio 6; $y(0) = 0$, $y(1) = 3$, $y(0) = 2$ (pregunta capciosa).

15. Ecuación del ejercicio 7; $w(0) = 0$, $w(1/2) = 1$, $w(0) = 2$.

En los ejercicios 16-21, describa el comportamiento a largo plazo de la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y^2 - 4y + 2$$

con la condición inicial dada.

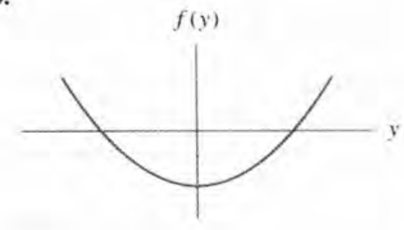
16. $y(0) = 0$ **17.** $y(0) = 1$ **18.** $y(0) = -1$

19. $y(0) = -10$ **20.** $y(0) = 10$ **21.** $y(3) = 1$

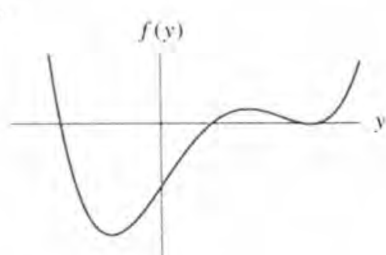
22. Considere la ecuación autónoma $dy/dt = f(y)$. Suponga que sabemos que $f(-1) = f(2) = 0$.
(a) Escriba todos los posibles comportamientos de la solución $y(t)$ que satisface la condición inicial $y(0) = 1$.
(b) Suponga también que $f(y) > 0$ para $-1 < y < 2$. Describa todos los posibles comportamientos de la solución $y(t)$ que satisface la condición inicial $y(0) = 1$.

En los ejercicios 23-26, encontrará la gráfica de una función $f(y)$. Esboce la línea de fase para la ecuación diferencial autónoma $dy/dt = f(y)$.

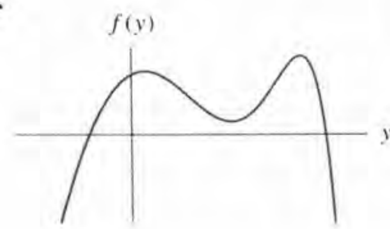
23.



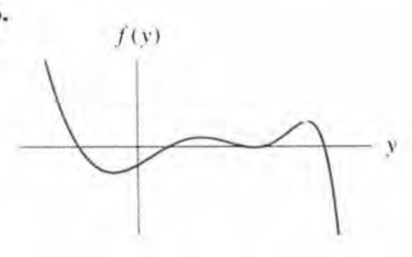
24.



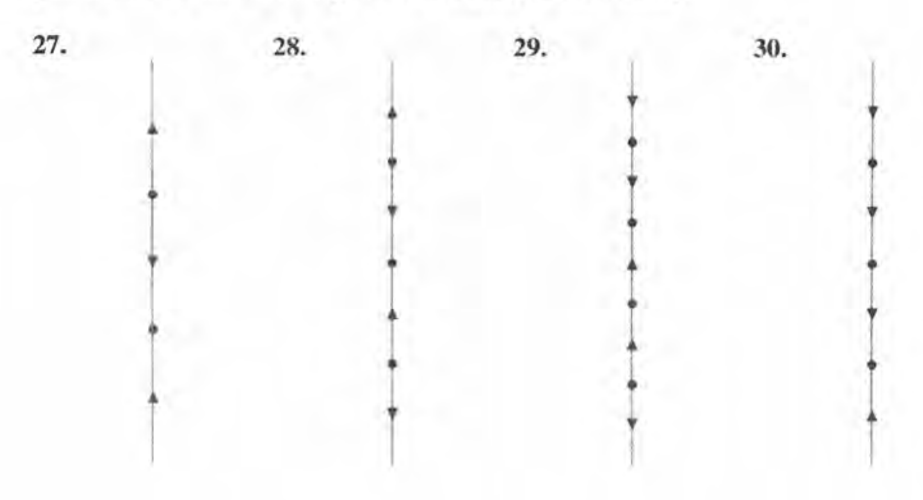
25.



26.



En los ejercicios 27-30 se muestra una línea de fase para una ecuación autónoma $dy/dt = f(y)$. Haga un bosquejo de la gráfica de la función correspondiente $f(y)$. (Suponga que $y = 0$ está a la mitad del segmento mostrado en cada caso.)



31. Suponga que desea modelar una población con una ecuación diferencial de la forma $dP/dt = f(P)$, donde $P(t)$ es la población en el tiempo t. Se han efectuado experimentos que dan la información siguiente:

- Los únicos puntos de equilibrio en la población son $P = 0$, $P = 10$ y $P = 50$.
- Si la población es 100, la población decrece.
- Si la población es 25, la población aumenta.

a) Esboce las posibles líneas de fase para este sistema para $P > 0$ (hay dos).
b) Haga un croquis aproximado de las correspondientes funciones $f(P)$ para cada una de sus líneas de fase.
c) Dé una fórmula para las funciones $f(P)$ cuyas gráficas concuerden (cualitativamente) con las del inciso (b) para cada una de sus líneas de fase.

32. Suponga que la información experimental en el ejercicio 31 se cambia a

- La población $P = 0$ permanece constante.
- Una población cercana a 0 disminuirá.
- Una población de $P = 20$ aumentará.
- Una población de $P > 100$ decrecerá.

(a) Esboce la línea de fase más simple posible que concuerde con la información experimental anterior.
(b) Haga un bosquejo de la función $f(P)$ para la línea de fase del inciso (a).
(c) ¿Qué otras líneas de fase son posibles?

33. Sea $f(y)$ una función continua.
(a) Suponga que $f(-10) > 0$ y $f(10) < 0$. Demuestre que hay un punto de equilibrio para $dy/dt = f(y)$ entre $y = -10$ y $y = 10$.

(b) Considere que $f(-10) > 0$, que $f(10) < 0$ y que hay muchos puntos de equilibrio finitos entre $y = -10$ y $y = 10$. Si $y = 1$ es una fuente, demuestre que $dy/dt = f(y)$ debe tener por lo menos dos sumideros entre $y = -10$ y $y = 10$. (¿Puede usted decir dónde están localizados?)

34. Considere la ecuación diferencial $dy/dt = f(y)$. Suponga que y_0 es un punto de equilibrio aislado, es decir, aunque en y_0 existe un intervalo abierto que podría contener más puntos de equilibrio, sólo encontramos a y_0. Definimos el **índice** de y_0 como

$$\text{índice }(y_0) = \begin{cases} +1 & \text{si } y_0 \text{ es una fuente;} \\ -1 & \text{si } y_0 \text{ es un sumidero;} \\ 0 & \text{si } y_0 \text{ es un nodo.} \end{cases}$$

(a) Suponga que hay muchos puntos de equilibrio finitos en el intervalo $-100 < y < 100$ y que $f(-100) < 0$ y $f(100) > 0$. Demuestre que, si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son los puntos de equilibrio entre -100 y 100, entonces

$$\text{índice}(y_1) + \text{índice}(y_2) + \cdots + \text{índice}(y_n) = 1.$$

b) Considere que hay muchos puntos de equilibrio finitos en el intervalo $-100 < y < 100$ y que $f(-100) > 0$ y $f(100) < 0$. Demuestre que

$$\text{índice}(y_1) + \text{índice}(y_2) + \cdots + \text{índice}(y_n) = -1.$$

(c) Suponga que hay muchos puntos de equilibrio finitos en el intervalo $-100 < y < 100$ y que $f(-100) < 0$ y $f(100) < 0$. Demuestre que

$$\text{índice}(y_1) + \text{índice}(y_2) + \cdots + \text{índice}(y_n) = 0.$$

35. Digamos que $dy/dt = f(y)$ tiene un punto de equilibrio en $y = y_0$ y
(a) $f'(y_0) = 0, f''(y_0) = 0$ y $f'''(y_0) > 0$: ¿es y_0 una fuente, un sumidero o un nodo?
(b) $f'(y_0) = 0, f''(y_0) = 0$ y $f'''(y_0) < 0$: ¿es y_0 una fuente, un sumidero o un nodo?
(c) $f'(y_0) = 0$ y $f''(y_0) > 0$: ¿es y_0 una fuente, un sumidero o un nodo?

36. (a) Esboce la línea de fase para la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{(y-2)(y+1)},$$

y analice el comportamiento de la solución con la condición inicial $y(0) = 1/2$.
(b) Aplique procedimientos analíticos al problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{(y-2)(y+1)}, \quad y(0) = \frac{1}{2},$$

y compare sus resultados con su análisis en el inciso (a).

Un plan horario apropiado para los sistemas de autobuses y trenes es un problema difícil que la ciudad de Boston parece ignorar. En esta ciudad es común esperar largo tiempo por el trolebús, sólo para que entonces arriben varios de ellos simultáneamente. En los ejercicios 37-40 estudiamos un modelo muy simple sobre el comportamiento de los trolebuses.

Considere dos trolebuses sobre la misma vía moviéndose hacia el centro de Boston. Sea $x(t)$ el intervalo entre los dos en el tiempo t. Es decir, si el primero llega a un paradero particular en el tiempo t, entonces el otro arribará $x(t)$ unidades de tiempo después. Suponemos que el primer trolebús viaja con rapidez constante. Queremos modelar cómo cambia $x(t)$ cuando t aumenta.

Primero suponemos que, si no hay pasajeros esperando al segundo trolebús, entonces éste tiene una rapidez promedio mayor que la del primero y por tanto lo alcanzará. Así, el tiempo entre trolebuses $x(t)$ decrecerá a razón constante si no hay gente esperando al segundo trolebús. Sin embargo, la velocidad del segundo disminuirá de acuerdo con la razón proporcional del número de pasajeros que recoge y de los que arriban a los paraderos a razón constante. Por consiguiente, el número de pasajeros que esperan al segundo trolebús es proporcional al tiempo entre los trolebuses.

37. Sea $x(t)$ la cantidad de tiempo entre dos trolebuses consecutivos tal como se describió arriba. Afirmamos que un modelo razonable para $x(t)$ es

$$\frac{dx}{dt} = \beta x - \alpha.$$

¿Qué término representa la tasa de decrecimiento del tiempo entre los trolebuses si no hay gente esperando, y qué término representa el efecto de la gente esperando el segundo trolebús? (Explique su respuesta.) ¿Deben ser los parámetros α y β positivos o negativos?

38. Para el modelo en el ejercicio 37:

(a) Encuentre los puntos de equilibrio.

(b) Clasifique los puntos de equilibrio (fuente, sumidero o nodo).

(c) Esboce la línea de fase.

(d) Esboce las gráficas de las soluciones.

(e) Encuentre la fórmula para la solución general.

39. Use el modelo en el ejercicio 37 para predecir qué pasa a $x(t)$ cuando t aumenta. Incluya el efecto del valor inicial $x(0)$. ¿Es posible que los trolebuses corran a intervalos regulares? Dado que siempre hay ligeras variaciones en el número de pasajeros esperando en cada paradero, ¿es probable que se mantenga un intervalo regular? Escriba dos breves reportes (de uno o dos párrafos):

(a) El primer reporte está dirigido a otros estudiantes en la clase (por consiguiente usted puede usar el lenguaje técnico que usamos en clase).

(b) El segundo reporte está dirigido al presidente municipal de Boston.

40. Suponiendo el modelo para $x(t)$ del ejercicio 37, ¿qué pasa si los trolebuses parten de la estación a intervalos fijos? ¿Puede usted usar el modelo para predecir qué pasará para toda una secuencia de trolebuses? ¿Ayudará a aumentar el número de unidades de manera que éstas salgan de la estación más frecuentemente?

1.7 BIFURCACIONES

Ecuaciones con parámetros

En muchos de nuestros modelos, una característica es la presencia de **parámetros** junto con las otras variables implicadas. Los parámetros son cantidades que no dependen del tiempo (la variable independiente) pero que asumen diferentes valores de acuerdo con los aspectos específicos de la aplicación considerada. Por ejemplo, el modelo de crecimiento exponencial para poblaciones

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

contiene el parámetro k, que es la constante de proporcionalidad para la razón de crecimiento dP/dt *versus* la población total P. Una de las hipótesis subyacentes de este modelo es que la razón de crecimiento dP/dt es un múltiplo constante de la población total. Sin embargo, cuando lo aplicamos a especies diferentes, esperamos emplear diferentes valores para la constante de proporcionalidad. Por ejemplo, el valor de k utilizado para los conejos sería considerablemente mayor que el valor para seres humanos.

Cómo se modifica el comportamiento de las soluciones conforme varían los parámetros, es un aspecto particularmente importante del estudio de las ecuaciones diferenciales. Para algunos modelos, debemos estudiar el patrón que siguen las soluciones para todos los valores de los parámetros en un cierto intervalo. Por ejemplo, considere un modelo para el movimiento de un puente tomando en cuenta el tiempo. En este caso, el número de vehículos sobre el puente puede afectar su estabilidad frente al viento; por lo tanto, un modelo para el movimiento del puente incluiría un parámetro para la masa total de los vehículos que puede soportar. En ese caso, tal vez desearíamos conocer el comportamiento de varias soluciones del modelo para una diversidad de valores diferentes de la masa.

En muchos modelos conocemos sólo valores aproximados para los parámetros. Sin embargo, para hacerlos útiles debemos conocer el efecto de las pequeñas variaciones en los valores de los parámetros sobre el comportamiento de las soluciones. Además, en nuestro modelo pueden existir efectos que no hemos incluido y que modifiquen los parámetros en modos inesperados. En muchos sistemas físicos complicados, el efecto a largo plazo de esos ajustes intencionales o no intencionales puede ser muy importante.

En esta sección estudiaremos cómo cambian las soluciones de una ecuación diferencial cuando un parámetro es variado. Estudiaremos ecuaciones autónomas con un parámetro. Encontraremos que una variación mínima en el parámetro usualmente da como resultado una pequeña modificación en la naturaleza de las soluciones. Sin embargo, en ocasiones el nuevo valor puede conducir a un cambio drástico en el comportamiento a largo plazo de las soluciones. A esto se le llama una **bifurcación**. Una ecuación diferencial que depende de un parámetro se bifurca cuando hay una variación cualitativa en el comportamiento de las soluciones a partir de una modificación en el parámetro.

Notación para ecuaciones diferenciales que dependen de un parámetro

Un ejemplo de una ecuación diferencial autónoma que depende de un parámetro es

$$\frac{dy}{dt} = y^2 - 2y + \mu.$$

El parámetro es μ. La variable independiente es t y la variable dependiente es y, igual que siempre. Observe que esta ecuación realmente representa un número infinito de ecuacio-

nes, una para cada valor de μ. El valor de μ es una constante en cada ecuación, pero cada uno de ellos conduce a ecuaciones diferenciales distintas y, por lo tanto, también a un conjunto diferente de soluciones. Debido a sus papeles diferentes en las ecuaciones diferenciales, usamos una notación que distingue la dependencia del lado derecho respecto a y y μ. Escribimos

$$f_\mu(y) = y^2 - 2y + \mu.$$

El parámetro μ aparece como subíndice y la variable dependiente y es el argumento de la función f_μ. Si queremos especificar un valor particular de μ, digamos $\mu = 3$, entonces escribimos

$$f_3(y) = y^2 - 2y + 3.$$

Con $\mu = 3$, obtenemos la ecuación diferencial correspondiente

$$\frac{dy}{dt} = f_3(y) = y^2 - 2y + 3.$$

Usamos esta notación en general. Una función de la variable dependiente y, que también depende de un parámetro μ, se denota por $f_\mu(y)$. La ecuación diferencial correspondiente con variable dependiente y y parámetro μ es

$$\frac{dy}{dt} = f_\mu(y).$$

Llamamos a esta forma una **familia paramétrica** de ecuaciones diferenciales, puesto que en realidad es una colección de ecuaciones distintas, una para cada valor de μ.

Una familia paramétrica con una bifurcación

Consideremos la familia paramétrica

$$\frac{dy}{dt} = f_\mu(y) = y^2 - 2y + \mu$$

con mayor atención. Para cada valor de μ tenemos una ecuación diferencial autónoma, y podemos dibujar su línea de fase y analizarla usando los procedimientos de la sección previa. Comenzamos por estudiar las ecuaciones de esta familia que se obtienen con selecciones particulares de μ. Como no conocemos aún los valores más interesantes de μ, escogemos para empezar valores enteros, digamos $\mu = -4$, $\mu = -2$, $\mu = 0$, $\mu = 2$ y $\mu = 4$. Esto nos da cinco ecuaciones diferenciales autónomas diferentes con cinco líneas de fase diferentes. Una de éstas es

$$\frac{dy}{dt} = f_{-2}(y) = y^2 - 2y - 2.$$

Esta ecuación diferencial tiene puntos de equilibrio en valores de y para los cuales

$$f_{-2}(y) = y^2 - 2y - 2 = 0.$$

Los puntos de equilibrio son $y = 1 - \sqrt{3}$ y $y = 1 + \sqrt{3}$. Y entre ambos, la función f_{-2} es negativa; por arriba y debajo de ellos f_{-2} es positiva. Por tanto, $y = 1 - \sqrt{3}$ es un su-

midero y $y = 1 + \sqrt{3}$ es una fuente. Con esta información podemos graficar la línea de fase. Para los otros valores de μ seguimos un procedimiento similar y dibujamos las líneas de fase. Todas ellas se muestran en la figura 1.77.

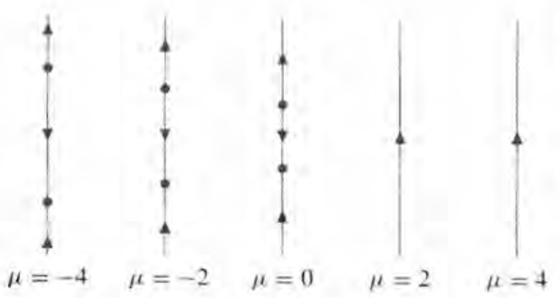


Figura 1.77
Líneas de fase para

$$\frac{dy}{dt} = f_\mu(y) = y^2 - 2y + \mu$$

para $\mu = -4, -2, 0, 2$ y 4.

Cada una de las líneas de fase es algo diferente de las otras. Sin embargo, la descripción básica para $\mu = -4$, $\mu = -2$ y $\mu = 0$ es la misma: hay exactamente dos puntos de equilibrio; el menor es un sumidero y el mayor es una fuente. Aunque la posición exacta de esos puntos cambia cuando t se incrementa, su posición relativa y tipo no cambian. Las soluciones de esas ecuaciones con grandes valores iniciales explota en un tiempo finito, conforme t aumenta y tienden a un punto de equilibrio cuando t decrece. Las soluciones con condiciones iniciales muy negativas se aproximan a un punto de equilibrio cuando t crece, y a $-\infty$ cuando t decrece. Y aquellas que poseen valores iniciales entre los puntos de equilibrio, tienden al menor punto de equilibrio cuando t crece y al mayor cuando t decrece (vea la figura 1.78).

Si $\mu = 2$ y $\mu = 4$, tenemos algo muy diferente. Aquí no hay puntos de equilibrio. Todas las soluciones tienden a $+\infty$ cuando t crece y a $-\infty$ cuando t decrece. Como hay un cambio importante en la naturaleza de las soluciones, decimos que ha ocurrido una bifurcación en alguna parte entre $\mu = 0$ y $\mu = 2$.

Para investigar la naturaleza de esta bifurcación, dibujamos las gráficas de f_μ para los valores μ anteriores (vea la figura 1.79). Para $\mu = -4, -2$ y $0, f_\mu(y)$ tiene 2 raíces, pero para $\mu = 2$ y 4 la gráfica de $f_\mu(y)$ no cruza el eje y. En alguna parte entre $\mu = 0$ y $\mu = 2$, la gráfica de $f_\mu(y)$ debe ser tangente al eje y.

Las raíces de la ecuación cuadrática

$$y^2 - 2y + \mu = 0$$

son $y = 1 \pm \sqrt{1 - \mu}$. Si $\mu < 1$, esta cuadrática tiene dos raíces reales; si $\mu = 1$, tiene una sola raíz y si $\mu > 1$, no posee raíces reales. Las ecuaciones diferenciales correspondientes cuentan con dos puntos de equilibrio si $\mu < 1$, un punto de equilibrio si $\mu = 1$ y ningún punto de equilibrio si $\mu > 1$. Por consiguiente, la naturaleza cualitativa de las líneas de fase cambia cuando $\mu = 1$. Decimos que ocurre una bifurcación en $\mu = 1$ y que éste es un **valor de bifurcación.**

La gráfica de $f_1(y)$ y la línea de fase para $dy/dt = f_1(y)$ se muestran en las figuras 1.80 y 1.81. La línea de fase tiene un punto de equilibrio (que es un nodo) y en todas partes las soluciones son crecientes. El hecho de que la bifurcación ocurra en el valor paramétrico para el cual el punto de equilibrio es un nodo no es coincidencia. De hecho, toda esta situación respecto a la bifurcación es bastante común.

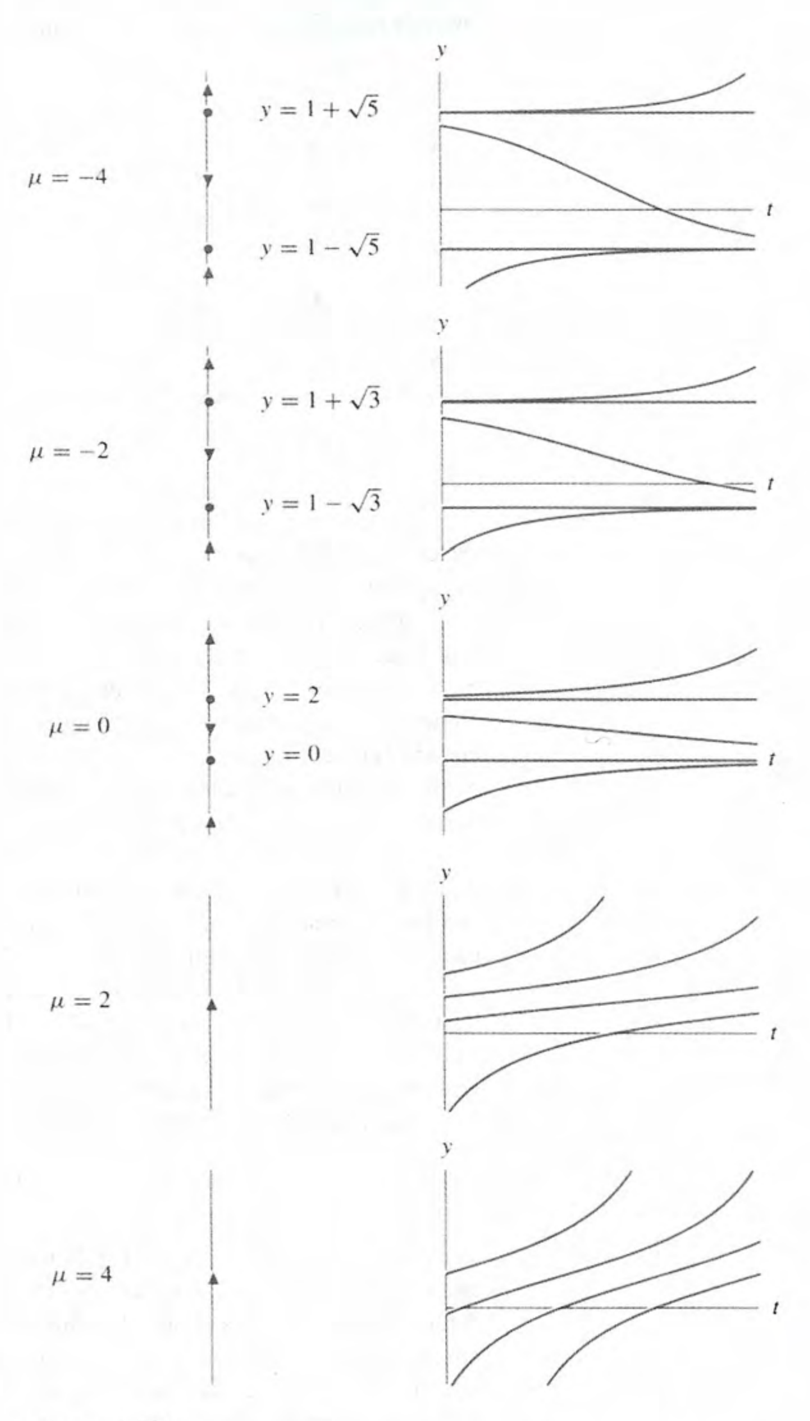


Figura 1.78
Líneas de fase y croquis de soluciones para $dy/dt = f_\mu(y) = y^2 - 2y + \mu$ para $\mu = -4, -2, 0, 2$ y 4.

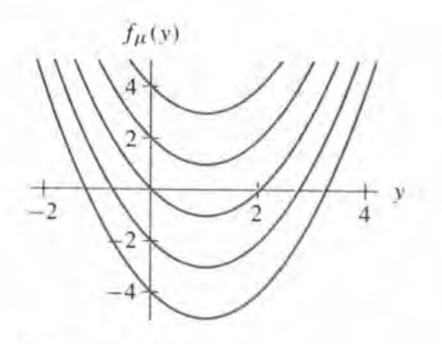


Figura 1.79
Gráficas de $f_\mu(y) = y^2 - 2y + \mu$ para $\mu = -4, -2, 0, 2$ y 4.

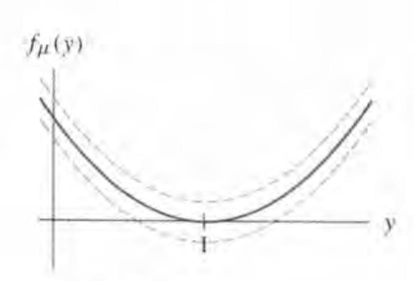


Figura 1.80
Gráficas de $f_\mu(y) = y^2 - 2y + \mu$ para μ ligeramente menor que 1, igual a 1 y ligeramente mayor que 1.

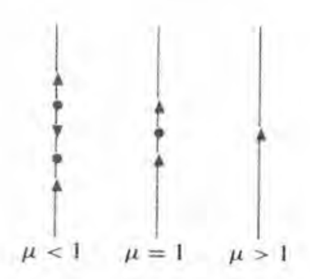
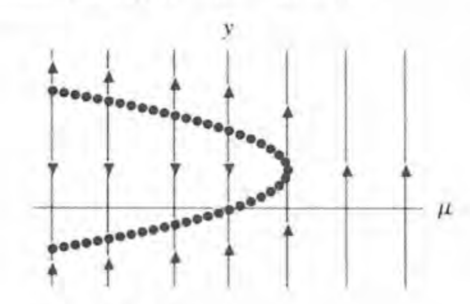


Figura 1.81
Líneas de fase correspondientes para $dy/dt = f_\mu(y) = y^2 - 2y + \mu$.

El diagrama de bifurcación

Una manera extremadamente útil de entender el comportamiento cualitativo de las soluciones es por medio del **diagrama de bifurcación.** Este diagrama es una gráfica (en el plano μ-y) de las líneas de fase cercanas a un valor de bifurcación, que permite ver claramente los cambios experimentados por las líneas de fase, cuando el parámetro pasa por este valor.

Para trazar el diagrama de bifurcación, graficamos los valores del parámetro a lo largo del eje horizontal. Para cada valor μ (no sólo enteros) dibujamos la línea de fase correspondiente a μ sobre la línea vertical por μ. Podemos imaginar este diagrama como una película: conforme nuestro ojo barre la imagen de izquierda a derecha, vemos evolucionar las líneas de fase a través de la bifurcación. La figura 1.82 muestra el diagrama de bifurcación para $f_\mu(y) = y^2 - 2y + \mu$.



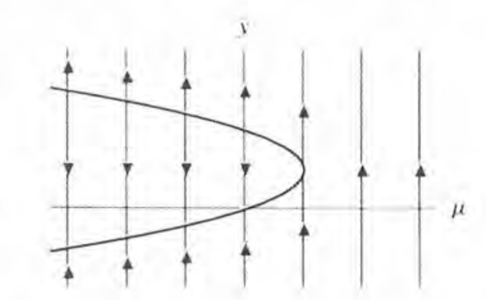


Figura 1.82
Diagrama de bifurcación para la ecuación diferencial $dy/dt = f_\mu(y) = y^2 - 2y + \mu$. El eje horizontal es el valor μ y las líneas verticales son las líneas de fase para las ecuaciones diferenciales con los correspodientes valores μ.

Una bifurcación de uno a tres equilibrios

Veamos ahora otra familia paramétrica de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy}{dt} = g_\alpha(y) = y^3 - \alpha y = y(y^2 - \alpha).$$

En esta ecuación α es el parámetro. Hay tres equilibrios si $\alpha > 0$ ($y = 0, \pm\sqrt{\alpha}$), pero hay un solo punto de equilibrio ($y = 0$) si $\alpha \leq 0$. Por tanto, ocurre una bifurcación cuando $\alpha = 0$. Y para entenderla, trazamos su diagrama.

En primer lugar, si $\alpha < 0$, el término $y^2 - \alpha$ es siempre positivo. Entonces $g_\alpha(y) = y(y^2 - \alpha)$ tiene el mismo signo que y. Las soluciones tienden a ∞ si $y(0) > 0$ y a $-\infty$ si $y(0) < 0$. Pero si $\alpha > 0$, la situación es diferente. La gráfica de $g_\alpha(y)$ muestra que $g_\alpha(y) > 0$ en los intervalos $\sqrt{\alpha} < y < \infty$ y $-\sqrt{\alpha} < y < 0$, y ahí las soluciones se incrementan (vea la figura 1.83). En los otros intervalos, $g_\alpha(y) < 0$, por lo que las soluciones decrecen. El diagrama de bifurcación se muestra en la figura 1.84.

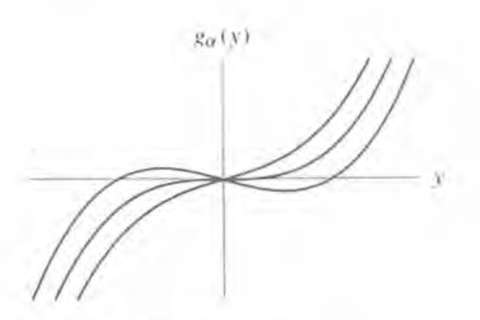


Figura 1.83
Gráficas de $g_\alpha(y)$ para $\alpha > 0$, $\alpha = 0$ y $\alpha < 0$. Note que para $\alpha \leq 0$, la gráfica cruza el eje y sólo una vez, mientras que si $\alpha > 0$, lo cruza tres veces.

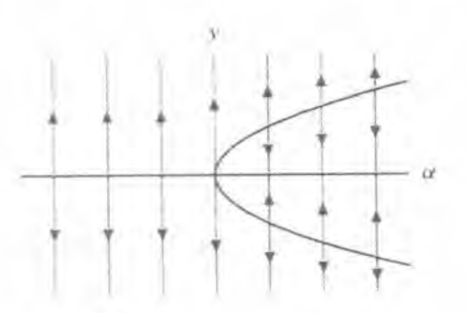


Figura 1.84
Diagrama de bifurcación para la familia paramétrica $dy/dt = g_\alpha(y) = y^3 - \alpha y$.

Bifurcaciones de los puntos de equilibrio

En todo el resto de esta sección, supondremos que todas las familias uniparamétricas de ecuaciones diferenciales que consideremos dependerán levemente del parámetro. Es decir, para una familia paramétrica

$$\frac{dy}{dt} = f_\mu(y),$$

las derivadas parciales de $f_\mu(y)$, con respecto a y y μ, existen y son continuas. Entonces, al cambiar μ un poco, la gráfica de $f_\mu(y)$ se modificará sólo ligeramente.

Cuándo no ocurren las bifurcaciones

El hecho más importante acerca de la bifurcaciones es que usualmente no ocurren. Por lo general, un pequeño cambio en el parámetro conduce sólo a una mínima variación en el comportamiento de las soluciones. Esto es muy gratificante. Por ejemplo, supongamos que tenemos una familia paramétrica

$$\frac{dy}{dt} = f_\mu(y),$$

y la ecuación diferencial para $\mu = \mu_0$ tiene un punto de equilibrio en $y = y_0$. Supongamos también que $f'_{\mu_0}(y_0) < 0$, por lo que el punto de equilibrio es un sumidero. Hemos esbozado la línea de fase y la gráfica de $f_{\mu_0}(y)$ cerca de $y = y_0$ en la figura 1.85.

Ahora, si variamos sólo una pequeña cantidad de μ, digamos de μ_0 a μ_1, entonces la gráfica de $f_{\mu_1}(y)$ es muy cercana a la de $f_{\mu_0}(y)$ (vea la figura 1.86). Así, la gráfica de $f_{\mu_1}(y)$

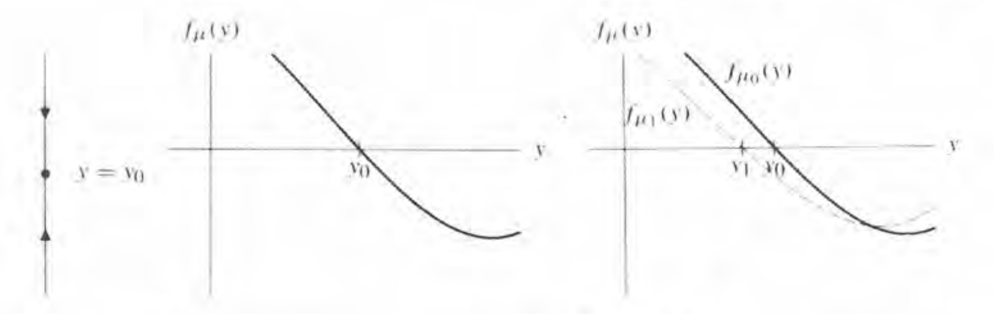


Figura 1.85
Gráfica de $f_{\mu_0}(y)$ cerca del sumidero y_0 y la línea de fase para la ecuación diferencial $dy/dt = f_{\mu_0}(y)$ cerca de y_0.

Figura 1.86
Gráficas de $f_{\mu_0}(y)$ y $f_{\mu_1}(y)$ para μ_1 cercana a μ_0. Note que $f_{\mu_1}(y)$ decrece a través del eje y en $y = y_1$ cerca de y_0, por lo que $dy/dt = f_{\mu_1}(y)$ tiene un sumidero en $y = y_1$.

es estrictamente decreciente cerca de y_0, pasando a través del eje horizontal cerca de $y = y_0$. La ecuación diferencial correspondiente

$$\frac{dy}{dt} = f_{\mu_1}(y)$$

tiene un sumidero en algún punto $y = y_1$ muy cercano a y_0.

Podemos expresar esto en forma más precisa: si y_0 es un sumidero de una ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = f_{\mu_0}(y)$$

con $f'_{\mu_0}(y_0) < 0$, entonces para toda μ_1 suficientemente próxima a μ_0, la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = f_{\mu_1}(y)$$

tiene un sumidero en un punto $y = y_1$ muy cercano a y_0 (y ningún otro punto de equilibrio en la proximidad). Un enunciado similar es válido si y_0 es una fuente y $f'_{\mu_0}(y_0) > 0$. Éstas son las situaciones en las que podemos decir con seguridad que no ocurre ninguna bifurcación, por lo menos cercanas a y_0.

Con estas observaciones en mente, vemos que las bifurcaciones ocurren sólo si las condiciones anteriores no se cumplen. En consecuencia, dada una familia uniparamétrica de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy}{dt} = f_\mu(y),$$

buscamos valores $\mu = \mu_0$ y $y = y_0$ para los cuales $f_{\mu_0}(y_0) = 0$ y $f'_{\mu_0}(y_0) = 0$.

Determinación de los valores de bifurcación

Consideremos la familia paramétrica de ecuaciones diferenciales dada por

$$\frac{dy}{dt} = f_\mu(y) = y(1 - y)^2 + \mu.$$

Si $\mu = 0$, los puntos de equilibrio son $y = 0$ y $y = 1$. También $f'_0(0) = 1$. Por tanto, $y = 0$ es una fuente para la ecuación diferencial $dy/dt = f_0(y)$. Entonces, para toda μ suficientemente próxima a cero, la ecuación diferencial $dy/dt = f_\mu(y)$ tiene una fuente cerca de $y = 0$.

Por otra parte, para el punto de equilibrio $y = 1, f_0'(1) = 0$. El teorema de la linearización de la sección 1.6 no dice qué ocurre en este caso. Para ver qué está sucediendo, esbozamos la gráfica de $f_\mu(y)$ para varios valores de μ cercanos a $\mu = 0$ (vea la figura 1.87). Si $\mu = 0$, la gráfica de f_μ es tangente al eje horizontal en $y = 1$. Como $f_0(y) > 0$ para toda $y > 0$, excepto $y = 1$, se infiere que el punto de equilibrio en $y = 1$ es un nodo para este valor del parámetro. Cuando μ cambia la gráfica de $f_\mu(y)$ se mueve hacia arriba (si μ es positiva) o hacia abajo (si μ es negativa). Si hacemos μ ligeramente positiva, $f_\mu(y)$ no toca al eje horizontal cerca de $y = 1$. Entonces, el punto de equilibrio en $y = 1$ para $\mu = 0$ desaparece, y ocurre una bifurcación en $\mu = 0$. Para μ ligeramente negativa, la ecuación diferencial correspondiente tiene dos puntos de equilibrio cerca de $y = 1$. Como f_μ está decreciendo en uno de esos puntos y creciendo en el otro, uno de ellos es entonces una fuente y el otro es un sumidero.

Hay una segunda bifurcación en esta familia uniparamétrica. Para ver esto, note qué sucede cuando μ decrece. Hay un valor de μ para el cual la gráfica de $f_\mu(y)$ presenta nuevamente una tangencia con el eje horizontal (vea la figura 1.88). Para valores grandes de μ, la gráfica cruza el eje horizontal tres veces, pero para magnitudes pequeñas de μ, la gráfica lo corta sólo una vez. Entonces, una segunda bifurcación ocurre en este valor de μ.

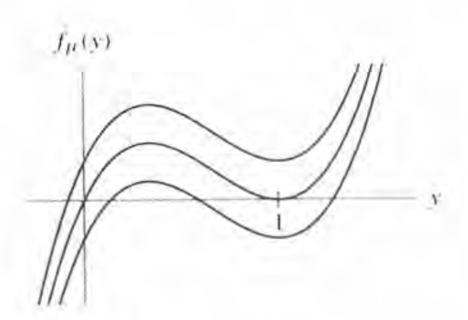


Figura 1.87
Gráficas de $f_\mu(y) = y(1 - y)^2 + \mu$ para μ ligeramente mayor, igual y ligeramente menor que cero.

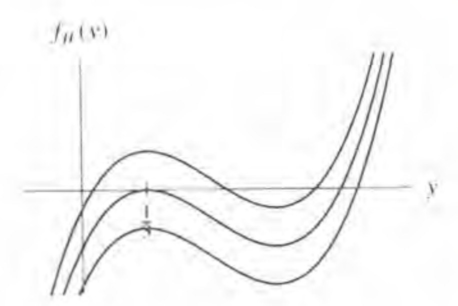


Figura 1.88
Gráficas de $f_\mu(y) = y(1 - y)^2 + \mu$ para μ ligeramente mayor que $-4/27$, para μ igual a $-4/27$ y ligeramente menor que $-4/27$.

Para encontrar este valor de bifurcación exactamente, debemos encontrar los valores μ para los cuales la gráfica de f_μ es tangente al eje horizontal. Es decir, aquellos para los que, en algún punto de equilibrio y, tenemos $f_\mu'(y) = 0$. Como

$$f_\mu'(y) = (1 - y)^2 - 2y(1 - y) = (1 - y)(1 - 3y),$$

se infiere que la gráfica de $f_\mu(y)$ es horizontal en los dos puntos $y = 1$ y $y = 1/3$. Sabemos que la gráfica de $f_0(y)$ es tangente al eje horizontal $y = 1$; veamos entonces qué pasa en $y = 1/3$. Tenemos $f_\mu(1/3) = \mu + 4/27$, por lo que la gráfica también es tangente al eje horizontal si $\mu = -4/27$. Éste es nuestro segundo valor de bifurcación. Usando argumentos análogos a los anteriores, encontramos que f_μ tiene tres puntos de equilibrio para $-4/27 < \mu < 0$ y sólo un punto de equilibrio cuando $\mu < -4/27$. El diagrama de bifurcación resume toda esta información en una gráfica (vea la figura 1.89).

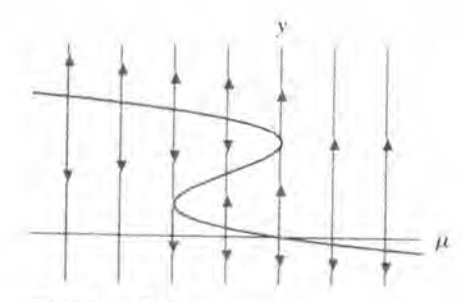


Figura 1.89
Diagrama de bifurcación para

$$\frac{dy}{dt} = f_\mu(y) = y(1-y)^2 + \mu.$$

Note los dos valores de bifurcación de μ: $\mu = -4/27$ y $\mu = 0$.

Recolección de recursos naturales

Al recolectar un recurso natural, es importante controlar la cantidad sustraída para que el recurso no se agote por completo. Para lograrlo, debemos estudiar las especies particulares implicadas y poner atención a los posibles cambios que puedan ocurrir si el nivel de recolección se incrementa.

Suponga que modelamos la población $P(t)$ de una especie particular de pez con un modelo logístico

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{N}\right),$$

donde k es el parámetro de la razón de crecimiento y N es la capacidad de soporte del hábitat. Suponga que la pesca remueve un cierto número constante C de peces de la población por estación. Entonces, una modificación del modelo que toma en cuenta la pesca es

$$\frac{dP}{dt} = k\left(1 - \frac{P}{N}\right)P - C.$$

¿Cómo varía la población de peces cuando C se incrementa?

Este modelo tiene tres parámetros, k, N y C; pero sólo nos interesa saber qué pasa si C varía. Por tanto, consideraremos a k y a N como constantes fijas determinadas por el tipo de pez y su hábitat. Nuestras predicciones implican los valores de k y N. Por ejemplo, si $C = 0$, sabemos de la sección 1.1 que todas las condiciones iniciales positivas conducen a soluciones que tienden hacia el punto de equilibrio $P = N$. Entonces, si se prohíbe la pesca, esperamos que la población sea cercana a $P = N$.

Sea

$$f_C(P) = k\left(1 - \frac{P}{N}\right)P - C.$$

Cuando C crece, la gráfica de $f_C(P)$ se desliza hacia abajo (vea la figura 1.90). Los puntos donde $f_C(P)$ cruza el eje P tienden uno hacia el otro. En otras palabras, los puntos de equilibrio para las correspondientes ecuaciones diferenciales se acercan entre sí.

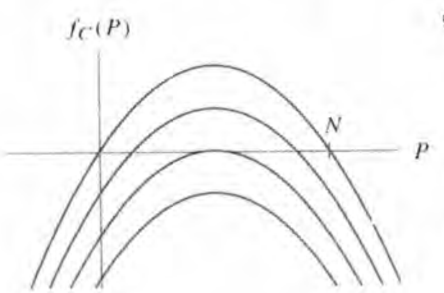


Figura 1.90
Gráficas de

$$f_C(P) = k\left(1 - \frac{P}{N}\right)P - C$$

para varios valores de C. Observe que, al crecer C, la gráfica de $f_C(P)$ se desliza hacia abajo del eje vertical.

Podemos calcular los puntos de equilibrio resolviendo $f_C(P) = 0$, lo que da

$$k\left(1 - \frac{P}{N}\right)P - C = 0$$

o, equivalentemente,

$$-kP^2 + kNP - CN = 0.$$

Esta ecuación cuadrática tiene las soluciones

$$P = \frac{N}{2} \pm \sqrt{\frac{N^2}{4} - \frac{CN}{k}}.$$

En tanto que el término bajo la raíz cuadrada (el discriminante de la cuadrática) sea positivo, la función cruzará dos veces el eje horizontal y la correspondiente ecuación diferencial tendrá dos puntos de equilibrio, una fuente y un sumidero. Así, para valores pequeños de C, la línea de fase posee dos puntos de equilibrio (vea la figura 1.90).

Si

$$\frac{N^2}{4} - \frac{CN}{k} < 0,$$

entonces la gráfica de $f_C(P)$ no corta al eje P y su ecuación diferencial no tiene puntos de equilibrio. Así, si

$$\frac{N^2}{4} < \frac{CN}{k}$$

o equivalentemente, si

$$C > \frac{kN}{4},$$

no habrá puntos de equilibrio. Para esos valores de C, la función $f_C(P)$ es negativa para todo valor de P y las soluciones de la correspondiente ecuación diferencial tienden hacia $-\infty$. Como las poblaciones negativas no tienen sentido, decimos que la especie se ha extinguido cuando la población alcanza el valor cero.

Con esta información podemos esbozar el diagrama de bifurcación para este sistema (vea la figura 1.91). Observamos que cuando se incrementa el parámetro C, ocurre una

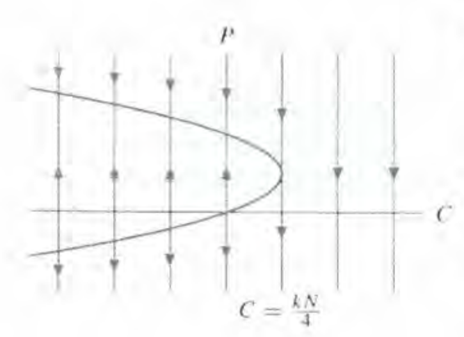


Figura 1.90
Diagrama de bifurcación para

$$\frac{dP}{dt} = f_C(P) = k\left(1 - \frac{P}{N}\right)P - C.$$

Vea que si $C < kN/4$, la línea de fase tiene dos puntos de equilibrio, mientras que si $C > kN/4$, la línea de fase no tiene puntos de equilibrio y todas las soluciones decrecen.

bifurcación, y que su valor es $kN/4$ porque, en esta magnitud, la gráfica de $f_C(P)$ es tangente al eje P. La correspondiente ecuación diferencial tiene un nodo en $P = N/2$. Si C es ligeramente menor que $kN/4$, su ecuación diferencial tiene dos puntos de equilibrio, una fuente y un sumidero, cerca de $P = N/2$. Si C es ligeramente mayor que $kN/4$, la ecuación diferencial relacionada no posee puntos de equilibrio (vea la figura 1.91).

Es interesante considerar qué pasa a la población de peces cuando el parámetro C es incrementado lentamente. Si $C = 0$, la población tiende al sumidero en $P = N$. Entonces, si hay una cantidad relativamente pequeña de pesca, la población de peces es cercana a $P = N$. Es decir, si C es ligeramente positiva, el sumidero para $C = 0$ en $P = N$ se desplaza un poco hacia el valor menor

$$P = \frac{N}{2} + \sqrt{\frac{N^2}{4} - \frac{CN}{k}}.$$

Para valores de C algo mayores, el valor del sumidero continúa decreciendo y la población de peces se ajusta para permanecer cercana a este sumidero. Observamos un decremento gradual en la población de peces. Cuando C está cerca de $kN/4$, la población de peces es próxima al sumidero para la correspondiente ecuación diferencial, que es cercana a $P = N/2$. Si C crece justo un poco más de manera que $C > kN/4$, entonces la ecuación diferencial relacionada no tiene puntos de equilibrio y todas las soluciones decrecen. Si C es ligeramente mayor que $kN/4$, $f_C(P)$ es ligeramente negativa en la proximidad de $P = N/2$, por lo que la población decrece lentamente al principio. Cuando P disminuye, $f_C(P)$ se vuelve más negativa y la razón de decrecimiento de P se acelera. La población alcanza el valor cero en una cantidad finita de tiempo y la especie del pez se extingue.

Entonces, cuando el número de peces removido por la pesca se incrementa gradualmente, esperamos inicialmente una declinación continua en esta población. Esta declinación prosigue hasta que el parámetro C de pesca alcanza el valor de bifurcación $C = kN/4$. En este punto, si permitimos aún una ligera pesca adicional, la población disminuye lentamente al principio y luego se colapsa, extinguiéndose los peces en el área. Éste es un panorama aterrador. El hecho de que una pequeña pesca cause sólo una declinación pequeña de la población a largo plazo, no implica necesariamente que un poco más de pesca cause sólo una pequeña declinación adicional de la población. Una vez que se pasa el valor de bifurcación, la población de peces tiende a cero.

Éste es un modelo muy simple y como tal no debe tomarse muy en serio. La lección por aprender es que, si este tipo de comportamiento puede observarse en modelos simples, cabe esperar que ocurra lo mismo (y comportamientos aún más sorprendentes) en modelos más complicados y en las poblaciones reales. Para administrar apropiadamente los recursos, necesitamos modelos exactos y estar alertas frente a posibles bifurcaciones.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 1.7

En los ejercicios 1-4, localice los valores de bifurcación para la familia paramétrica y dibuje las líneas de fase para valores del parámetro ligeramente menores que, ligeramente mayores que, y en el valor de la bifurcación.

1. $\dfrac{dy}{dt} = y^2 + a$

2. $\dfrac{dy}{dt} = y^2 + 3y + a$

3. $\dfrac{dy}{dt} = y^2 - ay + 1$

4. $\dfrac{dy}{dt} = \cos y + a$

5. Para la familia paramétrica

$$\frac{dy}{dt} = y^6 - 2y^3 + \alpha,$$

identifique los valores de bifurcación de α y describa las bifurcaciones que se presentan cuando α se incrementa. [*Sugerencia:* Reescriba y^6 como $(y^3)^2$ y use la ecuación cuadrática para encontrar los puntos de equilibrio.]

6. Para la familia paramétrica

$$\frac{dy}{dt} = y^6 - 2y^4 + \alpha,$$

identifique los valores de bifurcación de α y describa las bifurcaciones que se presentan cuando α se incrementa. [*Sugerencia:* Podría ser útil ver la gráfica del lado derecho de la ecuación para varias α.]

7. Considere el modelo de población

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{P^2}{50} + 2P,$$

para una especie de pez en un lago. Suponga que las autoridades han decidido permitir la pesca, pero no es claro cuántas licencias de pescar se autorizarán. Suponga que con licencia, una persona pescará en promedio 3 peces por año.

(a) ¿Cuál es el mayor número de licencias que pueden autorizarse para que los peces tengan oportunidad de sobrevivir en el lago?

(b) Suponga que se emiten el número de licencias de pescar determinado en el inciso (a). ¿Qué pasará a la población de peces, es decir, cómo se comporta la población actual con respecto de la población inicial?

(c) El simple modelo de población anterior puede verse como el de una población ideal de peces que no está sometida a los problemas ambientales de un lago real. Para la población real de peces habrá cambios ocasionales en la población que no se consideraron cuando se construyó este modelo. Por ejemplo, si el nivel del agua aumenta debido a una fuerte lluvia, unos cuantos peces adicionales podrían ser capaces de nadar abajo de una corriente usualmente seca para alcanzar el lago, o bien, el agua adicional podría llevar a éste materia tóxica, matando algunos peces. Dada la posibilidad de perturbaciones inesperadas de la población no in-

cluida en el modelo, ¿qué cree usted que pasará a la población real de peces si se permite la pesca al nivel determinado en el inciso (b)?

8. Considere nuestro modelo

$$\frac{dS}{dt} = f(S) = kS\left(1 - \frac{S}{N}\right)\left(\frac{S}{M} - 1\right)$$

de una población de ardillas negras de la sección anterior. Suponga que los parámetros M y k permanecen relativamente constantes a largo plazo, pero conforme más gente se mueve al área, el parámetro M (la capacidad de soporte) disminuye.

(a) Suponiendo que $M \leq N$, esboce la gráfica de la función $f(S)$ para valores fijos de k y M y varios valores de N.

(b) ¿Para qué valor de N ocurre una bifurcación?

(c) ¿Cómo se comporta la población de ardillas negras si el parámetro N decrece lenta y continuamente hacia el valor de bifurcación?

9. Suponga que un incremento en la población humana de una región hace a ésta menos atractiva para las ardillas negras y que por ello emigran. Podemos ajustar el modelo de población de ardillas negras para reflejar esta emigración restando una razón fija E de emigración. Tenemos

$$\frac{dS}{dt} = kS\left(1 - \frac{S}{N}\right)\left(\frac{S}{M} - 1\right) - E,$$

donde S, k, M y N son como en el ejercicio 8. Suponga que los parámetros k, M y N son fijos.

(a) Esboce la gráfica de la función

$$f_E(S) = kS\left(1 - \frac{S}{N}\right)\left(\frac{S}{M} - 1\right) - E$$

para varios valores de E.

(b) ¿Qué bifurcación tiene lugar cuando E varía? ¿Cómo se comporta la población de ardillas negras si el parámetro E se incrementa de manera lenta y graual más allá del valor de bifurcación?

(c) ¿Cuál es el valor de bifurcación de E? (Su respuesta será en términos de los parámetros k, M y N.)

10. En la ecuación diferencial que modela poblaciones de peces con recolección,

$$\frac{dP}{dt} = f_C(P) = kP\left(1 - \frac{P}{N}\right) - C,$$

vemos que si $C > kN/4$ la población de peces se extinguirá. Si dicha población llega casi a cero debido a que el nivel C de pesca es ligeramente mayor que $kN/4$, ¿por qué debe implementarse el veto para que la población se recupere? Es decir, si un nivel de pesca justamente arriba de $C = kN/4$ ocasiona un colapso de la población, ¿por qué no puede ser restituida la población reduciendo el nivel de pesca justamente abajo de $C = kN/4$?

Las ecuaciones diferenciales en los ejercicios 11 y 12 dependen de dos parámetros, α y β, y de los aspectos cualitativos de la línea de fase que depende de los valores de ambos parámetros. Determine todas las posibles líneas de fase cualitativamente distintas y las regiones correspondientes en el plano α-β.

11. $\dfrac{dy}{dt} = y^2 + \alpha y + \beta$

12. $\dfrac{dy}{dt} = y^4 + \alpha y^2 + \beta$

En el ejercicio 34 de la sección 1.6, definimos el índice de un punto de equilibrio para una ecuación diferencial autónoma. Una fuente tiene índice $+1$, un sumidero tiene índice -1 y los nodos índice 0. Considere la familia paramétrica de ecuaciones diferenciales $dy/dt = f_\alpha(y)$, donde f depende continuamente de α y y. En los ejercicios 13-15 suponemos que esta ecuación diferencial tiene un número finito de puntos de equilibrio en el intervalo $0 \leq y \leq 1$ para toda α.

13. Supongamos que para $\alpha = 0$, la suma de los índices de los puntos de equilibrio en el intervalo $0 \leq y \leq 1$ es -1. Si $f_\alpha(0) \neq 0$ y $f_\alpha(1) \neq 0$ para toda α, demuestre que $dy/dt = f_\alpha(y)$ debe tener por lo menos un sumidero en $0 \leq y \leq 1$ para toda α.

14. Digamos que para $\alpha = 0$, la suma de los índices de los puntos de equilibrio en el intervalo $0 \leq y \leq 1$ es $+1$, pero para $\alpha = 1$ dicha suma es 0 en el intervalo $0 \leq y \leq 1$. Compruebe que $f_\alpha(0) = 0$ o $f_\alpha(1) = 0$ para alguna α entre 0 y 1.

15. Supongamos que para $\alpha = 0$, la suma de los índices de los puntos de equilibrio en el intervalo $0 \leq y \leq 1$ es 0. Si para cada $\alpha, f_\alpha(0) > 0$ y $f_\alpha(1) \neq 0$, demuestre que existe un número positivo M_α que depende de α y que $dy/dt = f_\alpha(y) + M_\alpha$ no tiene puntos de equilibrio en el intervalo $0 \leq y \leq 1$.

Suponga que n es un entero positivo par. Entonces, la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y^n,$$

tiene un nodo en $y = 0$ y ningún otro punto de equilibrio. Podría antojarse clasificar todas las bifurcaciones diferentes que pueden ocurrir. En los ejercicios 16-19, consideraremos a las familias paramétricas que incluyen esta ecuación diferencial.

16. Para la familia paramétrica

$$\frac{dy}{dt} = y^3 + \alpha y^2,$$

¿cuántos puntos de equilibrio hay cerca de $y = 0$ si α es ligeramente mayor que cero? ¿Cuántos hay si α es ligeramente menor que cero?

17. Para la familia paramétrica

$$\frac{dy}{dt} = y^4 + \alpha y^2,$$

¿cuántos puntos de equilibrio están próximos a $y = 0$ si α es ligeramente mayor que cero? ¿Cuántos hay si α es ligeramente menor que cero?

18. Para la familia paramétrica

$$\frac{dy}{dt} = y^6 + \alpha(y^2 - 1000y^4),$$

¿cuántos puntos de equilibrio se encuentran cerca de $y = 0$ si α es ligeramente mayor que cero? ¿Cuántos hay si α es sólo ligeramente menor que cero?

19. Encuentre una familia paramétrica de ecuaciones diferenciales cuya α tenga exactamente un punto de equilibrio si $\alpha = 0$ y exactamente seis puntos de equilibrio si $\alpha < 0$.

20. Para la familia paramétrica de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{y^2+1} + \alpha,$$

localice los puntos de equilibrio si α es ligeramente mayor que cero, si $\alpha = 0$ y si α es ligeramente menor que cero. Describa la bifurcación que ocurre en $\alpha = 0$.

1.8 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

En la sección 1.2 desarrollamos un método analítico para encontrar las soluciones explícitas de ecuaciones diferenciales separables. Aunque muchos problemas interesantes conducen a este tipo de ecuaciones, la mayor parte de ellas no pueden separarse. Los procedimientos cualitativos y numéricos que desarrollamos en las secciones 1.5 y 1.6 se aplican a un rango mucho más amplio de problemas. Sería conveniente que pudiéramos extender nuestros métodos analíticos desarrollando maneras de encontrar soluciones explícitas de ecuaciones que no son separables.

Desafortunadamente no hay una manera general de calcular soluciones explícitas que funcionen para todas las ecuaciones diferenciales y, de hecho, el problema es mucho peor. Si bien sabemos por el teorema de existencia que toda ecuación diferencial "razonable" tiene soluciones, no hay garantía de que esas soluciones sean todas familiares. Usualmente no lo son. Durante siglos este dilema condujo al desarrollo de muchos procedimientos para resolver ecuaciones diferenciales especiales, y actualmente podemos acceder a ellos gracias a los paquetes de computación como el Maple y *Mathematica.* No obstante esto, un estudiante del tema debe estar familiarizado con algunas de las técnicas analíticas estándar, por lo que en esta sección estudiaremos uno de los procedimientos estándar para resolver ecuaciones diferenciales *lineales*.

Ecuaciones diferenciales lineales

Una ecuación diferencial de primer orden es **lineal** si puede escribirse en la forma

$$\frac{dy}{dt} = g(t)y + r(t),$$

donde $g(t)$ y $r(t)$ son funciones arbitrarias de t. Los ejemplos incluyen

$$\frac{dy}{dt} = t^2 y + \cos t,$$

donde $g(t) = t^2$ y $r(t) = \cos t$, y

$$\frac{dy}{dt} = \frac{e^{4\,\text{sen}\,t}}{t^3 + 7t} y + 23t^3 - 7t^2 + 3,$$

donde $g(t) = e^{4\,\text{sen}\,t}/(t^3 + 7t)$ y $r(t) = 23t^3 - 7t^2 + 3$. A veces es necesario algún tratamiento algebraico para confirmar que es una ecuación lineal. Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$ty + 2 = \frac{dy}{dt} - 3y$$

puede reescribirse como

$$\frac{dy}{dt} = (t + 3)y + 2.$$

En esta forma vemos que la ecuación es lineal con $g(t) = t + 3$ y $r(t) = 2$. Algunas ecuaciones diferenciales caen en varias categorías. Por ejemplo,

$$\frac{dy}{dt} = -2y + 8$$

es lineal con $g(t) = -2$ y $r(t) = 8$. (Tanto r como g son funciones muy sencillas de t.) La ecuación es también separable por ser autónoma.

La palabra *lineal* en el nombre de esas ecuaciones se refiere al hecho de que la variable dependiente y aparece en la ecuación elevada sólo a la primera potencia. La ecuación

$$\frac{dy}{dt} = y^2$$

no es lineal porque el término y^2 no puede ser reescrito en la forma $g(t)y + r(t)$, independientemente de como se escojan $g(t)$ y $r(t)$. Por supuesto, no hay nada mágico acerca de los nombres de las variables. La ecuación

$$\frac{dP}{dt} = e^{2t} P - \text{sen}\, t$$

es lineal ($g(t) = e^{2t}$ y $r(t) = -\,\text{sen}\, t$). También,

$$\frac{dw}{dt} = (\text{sen}\, t)w$$

es tanto lineal (donde $g(t) = \text{sen}\, t$ y $r(t) = 0$) como separable. Pero

$$\frac{dz}{dt} = t\,\text{sen}\, z$$

no es lineal.

Resolución de las ecuaciones diferenciales lineales

Dada una ecuación diferencial lineal

$$\frac{dy}{dt} = g(t)y + r(t),$$

¿cómo debemos proceder para encontrar la solución general? Se tiene un astuto truco que convierte una ecuación de esta forma en una ecuación diferencial que puede ser resuelta por integración. Igual que con muchos procedimientos matemáticos, la efectividad de este truco podría dejarlo a usted un poco deprimido preguntándose: "¿cómo podría imaginar algo como esto?" Lo que debemos recordar es que las ecuaciones diferenciales han estado con nosotros por más de 300 años. Si a usted le diesen 300 años para trabajar con ellas, ciertamente encontraría un método para resolverlas.

Factores de integración

Para resolver una ecuación diferencial lineal, la reescribimos primero como

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = r(t),$$

donde $a(t) = -g(t)$. Después de observar un rato esta ecuación (un par de décadas, poco más o menos) notamos que, con una vista pobre, el lado izquierdo se parece a lo que obtenemos cuando diferenciamos usando la regla del producto. La regla del producto dice que la derivada del producto de $y(t)$ con una función $\mu(t)$ es

$$\frac{d(\mu(t) \cdot y(t))}{dt} = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt}y(t).$$

Ahora viene la parte astuta. Multipliquemos ambos lados de la ecuación diferencial por una función $\mu(t)$ (no especificada aún). Obtenemos

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)a(t)y = \mu(t)r(t).$$

El lado izquierdo se parece aún más a la derivada de un producto de dos funciones. De momento, *digamos* que hemos encontrado una función $\mu(t)$, de modo que el lado izquierdo sea realmente la derivada de $\mu(t) \cdot y(t)$. Es decir, supongamos que hemos encontrado una función $\mu(t)$ que satisface

$$\frac{d(\mu(t) \cdot y(t))}{dt} = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)a(t)y.$$

La ecuación diferencial se convierte entonces en

$$\frac{d(\mu(t) \cdot y(t))}{dt} = \mu(t)r(t).$$

¿En qué nos ayuda esto? Ahora podemos integrar ambos lados de esta ecuación con respecto a t y obtener

$$\mu(t)\, y(t) = \int \mu(t)\, r(t)\, dt$$

de manera que

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t)\, r(t)\, dt.$$

Es decir, suponiendo que tenemos $\mu(t)$ y que podemos evaluar esta integral, es posible calcular nuestra solución $y(t)$.

¿Cómo encontrar el factor de integración?

Por tanto, la pregunta es: ¿cómo encontramos una función como $\mu(t)$ en primer lugar? La regla del producto dice que

$$\frac{d(\mu(t)\cdot y(t))}{dt} = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt}y(t),$$

pero dadas las hipótesis previas para $\mu(t)$, sabemos que también queremos

$$\frac{d(\mu(t)\cdot y(t))}{dt} = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)a(t)y(t).$$

Como queremos que $\mu(t)$ satisfaga estas dos ecuaciones, tenemos

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt}y(t) = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)a(t)y(t).$$

Cancelando el primer término en ambos lados, obtenemos

$$\frac{d\mu}{dt}y(t) = \mu(t)\,a(t)\,y(t).$$

Dividiendo entre $y(t)$, vemos que es preciso encontrar una función $\mu(t)$ que satisfaga la expresión

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu(t)\,a(t).$$

Esta ecuación es otra ecuación diferencial, es decir, una ecuación para la función desconocida $\mu(t)$, y además es separable.

Podemos separar las variables y obtener

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt} = a(t),$$

que conduce a la solución

$$\mu(t) = e^{\int a(t)\,dt}.$$

Dada esta fórmula para $\mu(t)$, sabemos ahora que esta estrategia funcionará y que podemos resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden. La función $\mu(t)$ se llama un **factor de integración** de la ecuación diferencial original porque, si multiplicamos la ecuación original por $\mu(t)$, podemos entonces resolver la nueva ecuación por integración. (Cuando calculamos $\mu(t)$, se tiene una constante arbitraria de integración en el exponente. Como necesitamos sólo un factor de integración $\mu(t)$ para resolverla, escogemos la constante de la manera más conveniente. Una opción es usualmente tomarla igual a cero.)

Para resumir, siempre que queremos determinar una solución explícita de una ecuación diferencial lineal de la forma

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = r(t),$$

calculamos primero el factor de integración

$$\mu(t) = e^{\int a(t)\,dt}.$$

Luego determinamos las soluciones multiplicando ambos lados de la ecuación diferencial lineal por $\mu(t)$, y procedemos a su integración. Veremos algunos ejemplos de cómo funciona el método, que en apariencia se ve muy general. Sin embargo, como hay dos integrales que calcular, es muy fácil atorarse antes de obtener una solución explícita.

Éxito completo

Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = t - 1.$$

Esta ecuación es lineal con $a(t) = 2/t$ y $r(t) = t - 1$. Primero calculamos el factor de integración

$$\mu(t) = e^{\int a(t)\,dt} = e^{\int (2/t)\,dt} = e^{2\ln t} = e^{\ln(t^2)} = t^2.$$

Recuerde que la idea detrás de este método es multiplicar ambos lados por $\mu(t)$, de manera que el lado izquierdo de la nueva ecuación sea el resultado de la regla del producto. En este caso, al multiplicar por $\mu(t) = t^2$, resulta

$$t^2\frac{dy}{dt} + 2ty = t^2(t - 1).$$

Observe que el lado izquierdo es la derivada del producto de t^2 y $y(t)$. Entonces, esta ecuación es la misma que

$$\frac{d}{dt}(t^2 y) = t^2(t - 1) = t^3 - t^2.$$

Integrando ambos lados con respecto a t, obtenemos

$$t^2 y = \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + c,$$

donde c es una constante arbitraria. La solución general es

$$y(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{3} + \frac{c}{t^2}.$$

Por supuesto, podemos verificar que esas funciones satisfacen la ecuación diferencial sustituyéndolas de nuevo en la ecuación.

Problemas con la integración

El ejemplo anterior fue escogido cuidadosamente. En seguida mostramos otro que no parece ser más difícil

$$\frac{dy}{dt} = t^2 y + (t - 1),$$

el cual es una ecuación diferencial lineal con $g(t) = t^2$ y $r(t) = t - 1$. Reescribimos la ecuación diferencial como

$$\frac{dy}{dt} - t^2 y = (t - 1)$$

y calculamos el factor de integración

$$\mu(t) = e^{\int -t^2\,dt} = e^{-t^3/3}.$$

Ahora multiplicamos ambos lados por $\mu(t)$ y obtenemos

$$e^{-t^3/3}\frac{dy}{dt} - e^{-t^3/3}t^2\,y = e^{-t^3/3}(t-1).$$

Note que el lado izquierdo es la derivada del producto de $e^{-t^3/3}$ y $y(t)$, por lo que tenemos

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-t^3/3}\,y\right) = e^{-t^3/3}(t-1).$$

Integrando ambos lados resulta

$$e^{-t^3/3}\,y = \int e^{-t^3/3}(t-1)\,dt,$$

pero nos encontramos en problemas. Resulta que la integral en el lado derecho de esta ecuación no es expresable en términos de las funciones comunes (sen, cos, ln, etc.), por lo que no podemos obtener fórmulas explícitas para las soluciones.

Este ejemplo indica que puede salir mal con los procedimientos que implican el cálculo de integrales explícitas. Aun las funciones de apariencia razonable pueden conducir rápidamente a factores de integración e integrales muy complicadas. Por otra parte, podemos expresar la solución en términos de integrales con respecto a t (lo que es algún avance), y aunque muchas de ellas son imposibles de calcular explícitamente, otras no lo son. Como mencionamos al principio de esta sección, en la actualidad existe un gran número de programas de computadora que son muy buenos para calcular las integrales indefinidas implicadas en este procedimiento.

Más problemas de mezclado

En la sección 1.2 consideramos un modelo de la concentración de una sustancia en solución. Por lo general, en esos problemas tenemos un recipiente en el que hay una cierta cantidad de fluido (como agua o aire) y al cual se agrega un contaminante a cierta razón o velocidad. El fluido se mantiene bien mezclado en todo momento. Si el volumen total de fluido se mantiene fijo, entonces la ecuación resultante para la cantidad de contaminante es una ecuación diferencial autónoma. Si el volumen total de fluido cambia con respecto al tiempo, entonces la ecuación diferencial no es autónoma. Si el problema requiere encontrar un valor exacto para la cantidad o concentración del contaminante en un tiempo específico, necesitamos entonces usar procedimientos como los de esta sección.

Un estanque contaminado

Consideremos un estanque que tiene un volumen inicial de 10 000 metros cúbicos. Supongamos que en el tiempo $t = 0$ el agua está limpia y que el estanque tiene dos corrientes que fluyen hacia él, la corriente A y la B, y otra más de salida, la corriente C (vea la figura 1.92). Supongamos que desde la corriente A fluyen 500 metros cúbicos por día hacia el estanque, y desde la B corren 750 metros cúbicos por día, y que a través de la corriente C salen 1 250 metros cúbicos del estanque.

En el tiempo $t = 0$, el agua que llega al estanque por la corriente A se contamina por la sal del cauce a una concentración de 5 kilogramos por cada 1000 metros cúbicos. Supongamos que el agua en el estanque está bien mezclada, por lo que la concentración de sal en cualquier tiempo dado es constante. Para empeorar las cosas, tome en cuenta tam-

bién que en el tiempo $t = 0$ alguien empieza a arrojar basura en el estanque a razón de 50 metros cúbicos por día. La basura se asienta en el fondo del estanque, reduciendo el volumen en 50 metros cúbicos por día. Para ajustar la basura que llega, se incrementa la razón de agua que sale por la corriente C a 1300 metros cúbicos por día y los bordos del estanque no se desbordan.

La descripción se parece mucho a la de los problemas de mezclado que hemos considerado (donde "estanque" reemplaza a "tanque" y "corriente" reemplaza a "tubo"). El nuevo elemento aquí es que el volumen total no es constante, pues éste diminuye 50 metros cúbicos por día, a causa de la basura arrojada.

Si $S(t)$ es la cantidad de sal (en kilogramos) en el estanque en el tiempo t, entonces dS/dt es la diferencia entre la razón de entrada de sal y la razón de salida de este sólido del estanque. La sal ingresa al estanque sólo por la corriente A, y la razón a la que entra es el producto de su concentración en el agua y la razón a la que el agua entra por la corriente A. Como la concentración es de 5 kilogramos por 1000 metros cúbicos y la razón a la que el agua ingresa al estanque por la corriente A es de 500 metros cúbicos por día, la razón a la que la sal entra al estanque es $(500)(5/1000) = 5/2$ kilogramos por día. La razón a la que la sal sale por la corriente C es el producto de su concentración *en el estanque* y la razón a la que el agua sale del estanque (1300 metros cúbicos por día). Para determinar la concentración, observamos que ésta es el cociente de la cantidad S de sal en el estanque por el volumen V. Como el volumen es inicialmente de 10 000 metros cúbicos y disminuye en 50 metros cúbicos por día, sabemos que $V(t) = 10\,000 - 50t$. Por consiguiente, la concentración es $S/(10\,000 - 50t)$, y la razón a la que la sal sale del estanque es

$$1300\left(\frac{S}{10,000 - 50t}\right) = \frac{26S}{200 - t}.$$

La ecuación diferencial que modela la cantidad de sal en el estanque es por tanto

$$\frac{dS}{dt} = \frac{5}{2} - \frac{26S}{200 - t}.$$

Este modelo es válido sólo mientras haya agua en el estanque, es decir, en tanto que el volumen $V(t) = 10\,000 - 50t$ sea positivo. La ecuación diferencial es entonces válida para $0 \leq t < 200$. Como el agua está limpia en el tiempo $t = 0$, la condición inicial es $S(0) = 0$.



Figura 1.92
Esquema del estanque con tres corrientes.

La ecuación diferencial para la sal en el estanque no es autónoma. Su campo de pendientes está dado en la figura 1.93, y a partir de éste o mediante el método de Euler podríamos aproximar la solución con el valor inicial $S(0) = 0$. Como la ecuación es lineal, podemos también encontrar una fórmula para la solución.

Reescribiendo la ecuación diferencial como

$$\frac{dS}{dt} + \frac{26S}{200-t} = \frac{5}{2}$$

vemos que el factor de integración es

$$\mu(t) = e^{\int \frac{26}{200-t}\,dt} = e^{-26\ln(200-t)} = e^{\ln\left((200-t)^{-26}\right)} = (200-t)^{-26}.$$

Multiplicando ambos lados por $\mu(t)$ se obtiene

$$(200-t)^{-26}\frac{dS}{dt} + 26(200-t)^{-27}S = \frac{5}{2}(200-t)^{-26}.$$

Por la regla del producto, esta ecuación es la misma que

$$\frac{d}{dt}\left((200-t)^{-26}S\right) = \frac{5}{2}(200-t)^{-26}.$$

Integrando ambos lados resulta

$$\begin{aligned}(200-t)^{-26}S &= \frac{5}{2}\int (200-t)^{-26}\,dt \\ &= \frac{5}{2}\frac{(200-t)^{-25}}{25} + c,\end{aligned}$$

donde c es una constante arbitraria. Despejando S, obtenemos la solución general

$$S = \frac{200-t}{10} + c(200-t)^{26}.$$

Usando la condición inicial $S(0) = 0$, encontramos que $c = -20/200^{26}$ y la solución particular para el problema del valor inicial es

$$S = \frac{200-t}{10} - 20\left(\frac{200-t}{200}\right)^{26}.$$

Ésta es una expresión poco común debido a lo grande del número 200^{26}. Sin embargo, la gráfica revela que su comportamiento tiende a ser común (vea la figura 1.94). La cantidad

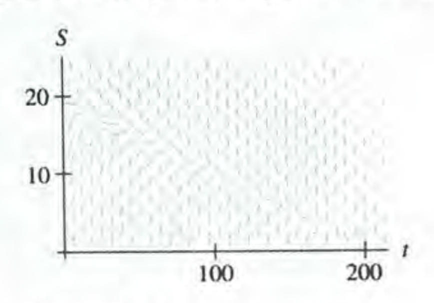


Figura 1.93
Campo de pendientes para la ecuación $dS/dt = 5/2 - 26S/(200 - t)$.

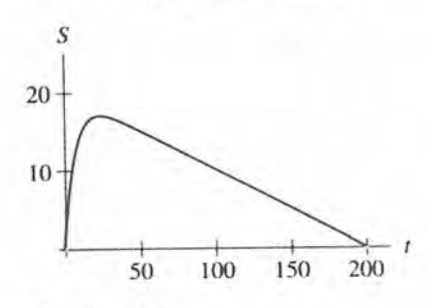


Figura 1.94
Gráfica de la solución de $dS/dt = 5/2 - 26S/(200 - t)$, con $S(0) = 0$.

de sal en el estanque crece bastante rápido, alcanzando un máximo cercano a $S = 20$ en $t \approx 25$. Después de ese tiempo, la cantidad de este sólido dismuye casi linealmente, alcanzando el valor cero en $t = 200$.

El comportamiento de esta solución es bastante razonable si recordamos que el estanque no tiene al principio ninguna sal y que al final está completamente lleno con basura. (No contiene sal o agua en el tiempo $t = 200$.) Como se mencionó anteriormente la concentración de sal en el agua está dada por $C(t) = S(t)/V(t) = S(t)/(10\,000 - 50t)$. Al graficar $C(t)$, vemos que se incrementa asintóticamente hacia 0.002 kilogramos por metro cúbico aun cuando el nivel del agua disminuye (vea la figura 1.95).

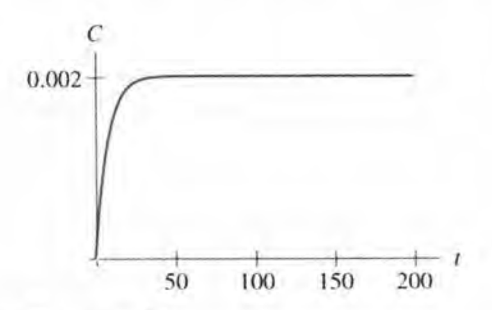


Figura 1.95
Gráfica de la concentración de sal *versus* tiempo para la solución graficada en la figura 1.94.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 1.8

En los ejercicios 1-8, encuentre la solución general de la ecuación diferencial especificada.

1. $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{y}{t} + 2$

2. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3}{t}y + t^5$

3. $\dfrac{dy}{dt} = y - 3e^{-t}$

4. $\dfrac{dy}{dt} = -2ty + 4e^{-t^2}$

5. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2t}{1+t^2}y + \dfrac{2}{1+t^2}$

6. $\dfrac{dy}{dt} = -2y - 5t$

7. $\dfrac{dy}{dt} = -y + t^2$

8. $\dfrac{dy}{dt} = -2y + \operatorname{sen} t$

En los ejercicios 9-14, encuentre la solución particular con la condición inicial dada.

9. $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{y}{1+t} + 2, \quad y(0) = 3$

10. $\dfrac{dy}{dt} = -y + e^t, \quad y(0) = 0.4$

11. $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{y}{t} + 2, \quad y(1) = 3$

12. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2t}{1+t^2}y + \dfrac{2}{1+t^2}, \quad y(0) = -2$

13. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2y}{t} + 2t^2, \quad y(-2) = 4$

14. $\dfrac{dy}{dt} = -5y + \operatorname{sen} t, \quad y(0) = 1$

En los ejercicios 15-18, las ecuaciones diferenciales son lineales, por lo que en teoría podemos encontrar sus soluciones generales. Sin embargo, como esto implica calcular por lo menos dos integrales, en la práctica con frecuencia es imposible obtener una fórmula para la solución que esté libre de integrales. Para estos ejercicios, determine la solución general para la ecuación y exprésela con tan pocas integrales como sea posible.

15. $\dfrac{dy}{dt} = (\operatorname{sen} t)y + 4$

16. $\dfrac{dy}{dt} = t^2 y + 4$

17. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{t^2} + 4\cos t$

18. $\dfrac{dy}{dt} = y + 4\cos t^2$

19. ¿Para qué valor o valores del parámetro a es posible encontrar fórmulas explícitas (sin integrales) para las soluciones de

$$\frac{dy}{dt} = aty + 4e^{-t^2}?$$

20. ¿Para qué valor o valores del parámetro r es posible encontrar fórmulas explícitas (sin integrales) para las soluciones de

$$\frac{dy}{dt} = t^r y + 4?$$

21. Una persona deposita inicialmente $500 en una cuenta de ahorros, que paga interés a una tasa de 4% anual compuesto continuamente. Suponga que la persona dispone que se le depositen automáticamente $10 por semana en la cuenta de ahorros.

(a) Escriba una ecuación diferencial para $P(t)$, que es la cantidad en depósito después de t años (suponga que los "depósitos semanales" son bastante cercanos a "depósitos continuos", de manera que podamos modelar el saldo con una ecuación diferencial).

(b) Encuentre la cantidad en depósito después de 5 años.

22. Una estudiante ha ahorrado $30 000 para sus estudios universitarios. Cuando comienza a estudiar, invierte el dinero en una cuenta de ahorros que paga 6% de interés anual compuesto continuamente. Suponga que sus gastos universitarios son de $10 000 por año y que ella dispone que este dinero sea deducido de su cuenta de ahorros en pagos pequeños. En otras palabras, suponemos que ella está pagando en forma continua. ¿Cuánto tiempo podrá permanecer en la universidad antes de que se le acabe el dinero?

23. Una profesora universitaria contribuye con $1 200 por año a su fondo de retiro haciendo muchos pequeños depósitos a lo largo del año. El fondo crece a razón de 8% anual compuesto continuamente. Después de 30 años se jubila y comienza a retirar de su fondo a razón de $3 000 mensuales. Si no hace ningún depósito después de retirarse, ¿cuánto tiempo le durará el dinero? [*Sugerencia:* Resuelva esto en dos pasos, antes del retiro y después de éste.]

24. Un tanque de 30 galones contiene 15 galones de agua salada (con 6 libras de sal). Suponga que, hacia la parte superior del tanque, se bombea agua salada que contiene

1 libra de sal por galón, a razón de 2 galones por minuto, mientras que una solución bien mezclada sale por el fondo del tanque a razón de 1 galón por minuto. ¿Cuánta sal se encuentra en el tanque cuando éste está lleno?

25. Un tanque de 400 galones contiene inicialmente 200 galones de agua que contienen 2 partes por 1000 millones en peso de dioxina, que es un carcinógeno extremadamente potente. Suponga que el agua que contiene 5 partes por 1 000 millones de dioxina fluye hacia arriba del tanque a razón de 4 galones por minuto. El agua en el tanque se mantiene bien mezclada y se retiran 2 galones por minuto por el fondo del tanque. ¿Cuánta dioxina se encuentra en el tanque cuando está lleno?

26. Un tanque de 100 galones contiene inicialmente 100 galones de agua azucarada con una concentración de 0.25 libras de azúcar por galón. Suponga que se agrega azúcar al tanque a razón de p libras por minuto, que el agua azucarada se retira a razón de 1 galón por minuto y que se mantiene bien mezclada.

(a) ¿Qué valor de p debemos escoger para que, cuando queden en el tanque 5 galones de agua azucarada, la concentración sea de 0.5 libras de azúcar por galón?

(b) ¿Es posible escoger p de manera que la última gota de agua en la cubeta tenga una concentración de 0.75 libras de azúcar por galón?

27. Suponga que un tanque de 50 galones contiene un volumen V_0 de agua limpia en el tiempo $t = 0$. En este punto comenzamos a verter 2 galones por minuto de una solución salina que contiene 0.25 libras de sal por galón en el tanque. También, en el tiempo $t = 0$, empezamos a retirar 1 galón por minuto de agua salada del tanque. Como siempre, suponga que el agua en el tanque está bien mezclada de manera que la concentración de sal en un tiempo cualquiera es constante en todo el tanque.

(a) Plantee el problema de valor inicial para la cantidad de sal en el tanque. [*Sugerencia:* El valor inicial de V_0 aparecerá en la ecuación diferencial.]

(b) ¿Cuál es la ecuación para el modelo cuando $V_0 = 0$ (cuando el tanque está inicialmente vacío)? Comente sobre la validez del modelo en esta situación. ¿Cuál será la cantidad de sal en el tiempo t para esta situación?

1.9 CAMBIO DE VARIABLES

Muchos de los procedimientos que hemos visto en este capítulo tienen que ver con tipos particulares de ecuaciones. Por ejemplo, los procedimientos analíticos que hemos estudiado se aplican sólo a ecuaciones separables y lineales, y el concepto de línea de fase se emplea sólo en ecuaciones autónomas.

Dada una ecuación diferencial, es poco probable que podamos emplearla de inmediato para cualquier procedimiento en particular, lo más conveniente sería transformarla en una nueva ecuación que tuviese forma estándar. Este tipo de transformación es la idea que subyace en el cambio de variables. Reescribiendo la ecuación en términos de una nueva variable, podremos darle a la ecuación una forma que sea apropiada para un procedimiento particular. En esta sección presentamos un método para convertir ecuaciones diferenciales a formas más simples, con base en un cambio de variables.

Sustitución u

La idea del cambio de variables no es nueva. La usamos en el cálculo cuando efectuamos "sustituciones u" para calcular antiderivadas. Por ejemplo, dada la integral

$$\int t \operatorname{sen} t^2 \, dt,$$

definimos una nueva variable u por $u = t^2$ y reescribimos la integral en términos de u en vez de t. Como $du/dt = 2t$ (a veces informalmente escrita como $du = 2t\,dt$), obtenemos

$$\int t \operatorname{sen} t^2 \, dt = \int \frac{1}{2} \operatorname{sen} u \, du.$$

Esta integral es la misma representada en términos de la nueva variable u. Se escogió la variable u para que la nueva integral fuese fácil de evaluar. Tenemos

$$\frac{1}{2} \int \operatorname{sen} u \, du = -\frac{\cos u}{2} + c.$$

Ahora encontramos la solución del problema original, reemplazando la nueva variable u por la variable original t y obtenemos

$$\begin{aligned} \int t \operatorname{sen} t^2 \, dt &= \int \frac{\operatorname{sen} u}{2} \, du \\ &= -\frac{\cos u}{2} + c \\ &= -\frac{\cos t^2}{2} + c. \end{aligned}$$

Cambiar las variables de t a u convierte un cálculo difícil en uno fácil. Después de calcular la antiderivada en términos de la nueva variable, podemos recuperar la antiderivada deseada reemplazando la variable nueva por la variable vieja.

Cambio de variables en las ecuaciones diferenciales

Un método similar al de sustitución u funciona para las ecuaciones diferenciales. La idea es la misma que para las integrales: defina una nueva variable en términos de la(s) variable(s) vieja(s) y luego reescriba la ecuación en términos de la nueva variable. Esto nos da la "misma" ecuación diferencial expresada en términos de una nueva variable, pero desde un punto de vista algebraico, la nueva ecuación puede ser muy diferente de la original. Si hacemos una selección inteligente de la nueva variable, entonces la nueva ecuación puede ser mucho más fácil de estudiar que la ecuación anterior.

Un ejemplo

Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{t} + \frac{t-1}{2y}.$$

Esta ecuación parece muy complicada. No es autónoma, ni separable, ni lineal, por lo que si tuviéramos que encontrar la solución general, no llegaríamos a nada usando los procedimientos que hemos estudiado. Pero, por supuesto, no se desanime. Ensayaremos primero una pequeña simplificación algebraica.

El término más molesto en ella es la segunda fracción a la derecha. El hecho de que la variable dependiente y aparece en el denominador es lo que hace a la ecuación no lineal. Si la y no estuviese ahí, entonces la ecuación sería lineal. Tratemos entonces de simplificar multiplicando ambos lados por y para obtener

$$y\frac{dy}{dt} = -\frac{y^2}{t} + \frac{t-1}{2}.$$

Esta ecuación aún no es lineal y hay una y en el lado izquierdo. Sin embargo, el lado derecho correspondería al de una ecuación lineal si el término y^2 fuese sólo y. Esto motiva nuestra sustitución. Definimos una nueva variable dependiente u por

$$u = y^2,$$

y reescribimos la ecuación en términos de u. Esto implica eliminar todas las y de la ecuación, incluyendo dy/dt, y reemplazarlas por las u (y las du/dt). Para expresar dy/dt en términos de u, diferenciamos la ecuación $u = y^2$ para obtener

$$\frac{du}{dt} = 2y\frac{dy}{dt},$$

por lo que

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dt} = y\frac{dy}{dt}.$$

Sustituyendo esta expresión por $y(dy/dt)$ en el lado izquierdo y reemplazando la y^2 por u en el lado derecho, tenemos la nueva ecuación

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dt} = -\frac{u}{t} + \frac{t-1}{2}.$$

Multiplicando por 2, resulta

$$\frac{du}{dt} = -\frac{2}{t}u + (t-1).$$

Ésta es una ecuación lineal. De hecho, es uno de nuestros ejemplos que hemos resuelto con todo detalle en la sección 1.8. La solución general es

$$u(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{3} + \frac{c}{t^2}.$$

Para encontrar la solución general para $y(t)$ en la ecuación original, recordamos que $u = y^2$. Así, $y = \pm\sqrt{u}$ y

$$y(t) = \pm\sqrt{\frac{t^2}{4} - \frac{t}{3} + \frac{c}{t^2}},$$

donde la selección del signo y el valor de c dependen de la condición inicial.

Este procedimiento es extraordinario. Definiendo una nueva variable dependiente y reescribiendo la ecuación diferencial en términos de esa variable, obtuvimos una ecuación diferencial lineal que fue fácil resolver. Por supuesto, fue preciso imaginar (o conjeturar) que la variable dependiente "correcta" o el correcto **cambio de variables** es $u = y^2$. Igual que con la sustitución u, son necesarios varios intentos para encontrar la mejor sustitución, y a menudo esto no se logra.

Cambio de variables en el análisis cualitativo

El procedimiento de cambiar variables no es "mágico", es decir, no existe alguno por medio del cual todas las ecuaciones diferenciales puedan ser resueltas. Encontrarlo depende de la forma de la ecuación y del objetivo del análisis. En los siguientes ejemplos consideraremos varios tipos de cambios de variable.

Un ejemplo

Podemos usar el método de cambio de variables junto con los métodos cualitativo y numérico. Por ejemplo, considere la muy complicada ecuación

$$\frac{dy}{dt} = y^2 - 4ty + 4t^2 - 4y + 8t - 3.$$

Por supuesto, podemos dibujar el campo de pendientes para esta ecuación y usar el método de Euler para esbozar soluciones (vea la figura 1.96).

Esta ecuación no es lineal ni separable, por lo que podríamos intentar un cambio de variables que simplifique la ecuación algebraicamente. Para hacer una conjetura inteligente de una nueva variable dependiente, reescribimos primero la ecuación usando algo de álgebra. Después de observar el lado derecho, vemos que podemos simplificarlo agrupando términos y factorizando, es decir,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= y^2 - 4ty + 4t^2 - 4y + 8t - 3 \\ &= (y - 2t)^2 - 4(y - 2t) - 3.\end{aligned}$$

La forma resultante del lado derecho de la ecuación sugiere una posible opción para la nueva variable dependiente. Sea

$$u = y - 2t.$$

Esta nueva variable dependiente u es una combinación de variable dependiente original y y la variable independiente t. Para reemplazar en todas partes a la variable anterior y por

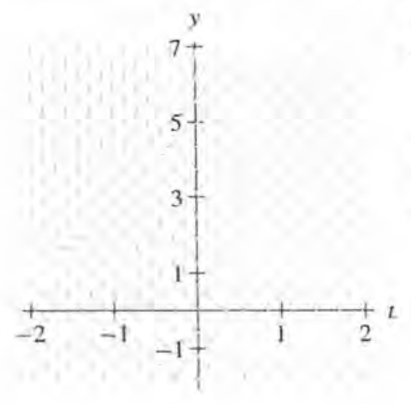


Figura 1.96
Campo de pendientes para

$$\frac{dy}{dt} = y^2 - 4ty + 4t^2 - 4y + 8t - 3.$$

Las soluciones parecen estar creciendo en dos regiones y decreciendo en una tercera región.

la nueva variable dependiente u, calculamos dy/dt en términos de u diferenciando $u = y - 2t$. Obtenemos

$$\frac{du}{dt} = \frac{dy}{dt} - 2 \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{du}{dt} + 2.$$

Entonces, la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = (y - 2t)^2 - 4(y - 2t) - 3$$

se convierte en

$$\frac{du}{dt} + 2 = u^2 - 4u - 3,$$

que es equivalente a

$$\frac{du}{dt} = u^2 - 4u - 5.$$

Ésta es una ecuación autónoma, por lo que podemos estudiarla dibujando su línea de fase. Como $u^2 - 4u - 5 = (u - 5)(u + 1)$, los puntos de equilibrio son $u = 5$ y $u = -1$. En la figura 1.97 se muestran la línea de fase y un croquis de varias soluciones de esta ecuación. El punto de equilibrio $u = -1$ es un sumidero y $u = 5$ es una fuente.

¿Qué nos dice esto acerca de la ecuación diferencial original? Como la nueva ecuación es separable, podemos encontrar soluciones explícitas por integración. Sin embargo, también es posible obtener información sobre las soluciones $y(t)$ aún más directamente. Sabemos que $u_1(t) = -1$ es una solución de equilibrio para la nueva ecuación. De manera que cualquier respuesta que encontremos para ella corresponde a una solución de la ecuación original. Por consiguiente,

$$y_1(t) = u_1(t) + 2t = -1 + 2t$$

es una solución de la ecuación original.

De manera similar, como $u_2(t) = 5$ es una solución de la nueva ecuación,

$$y_2(t) = u_2(t) + 2t = 5 + 2t$$

también resuelve la ecuación original. Así, toda $u(t)$ de la nueva ecuación corresponde a una solución de la ecuación original por el cambio de variables $y(t) = u(t) + 2t$. De modo que las gráficas de las soluciones de la nueva ecuación en el plano t-u y las de la ecua-

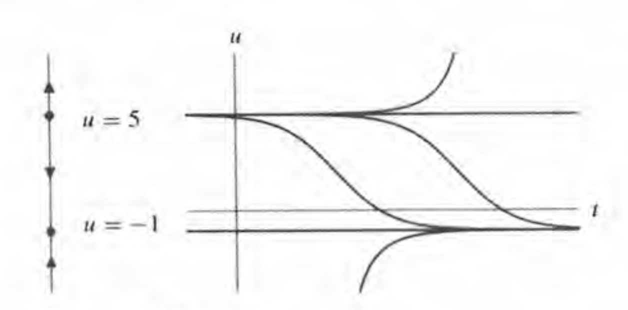


Figura 1.97
Línea de fase y gráficas de soluciones para $du/dt = u^2 - 4u - 5$.

ción original en el plano t-y están íntimamente relacionadas. El plano t-y puede obtenerse del plano t-u añadiendo $2t$ a cada solución. En efecto, esto es lo mismo que tomar el plano t-u y desplazarlo hacia arriba con una pendiente de 2. Las soluciones de equilibrio en u corresponden a soluciones cuyas gráficas son líneas con pendiente 2 en el plano t-y. Además, como $u = -1$ es un sumidero, las soluciones se aproximan hacia $y_1(t) = -1 + 2t$ cuando t crece. De la misma forma, las soluciones tienden a alejarse de la solución $y_2(t) = 5 + 2t$ porque $u = 5$ es una fuente. Podemos entonces graficar soluciones en el plano t-y a partir de las gráficas correspondientes en el plano t-u (vea la figura 1.98).

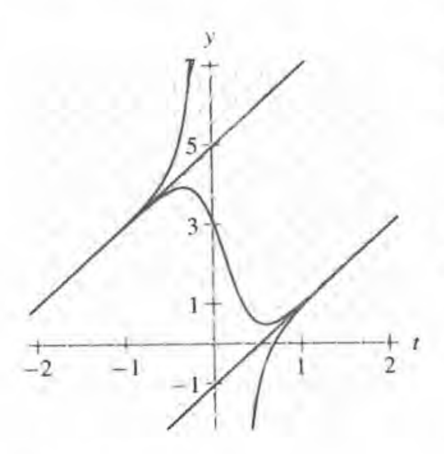


Figura 1.98
El campo de pendientes y gráficas de soluciones para la ecuación original

$$\frac{dy}{dt} = y^2 - 4ty + 4t^2 - 4y + 8t - 3.$$

Las soluciones tienden hacia la solución $y_1(t) = -1 + 2t$ cuando t crece. De manera similar, las soluciones se alejan de la solución $y_2(t) = 5 + 2t$.

Otro ejemplo

Como otro ejemplo, consideremos la ecuación

$$\frac{dv}{dt} = v - \frac{v^2}{t} + \frac{v}{t}.$$

Aunque podría haber varias selecciones razonables de nuevas variables para esta ecuación, trataremos de simplificar la ecuación deshaciéndonos de las fracciones en el lado derecho de la ecuación. Ensayamos

$$u = \frac{v}{t},$$

por lo que $tu = v$. La regla del producto da

$$\frac{dv}{dt} = t\frac{du}{dt} + u,$$

y la nueva ecuación es

$$t\frac{du}{dt} + u = tu - \frac{(tu)^2}{t} + \frac{tu}{t}.$$

Simplificando, encontramos

$$t\frac{du}{dt} + u = tu - tu^2 + u,$$

que es equivalente a

$$\frac{du}{dt} = (1 - u)u.$$

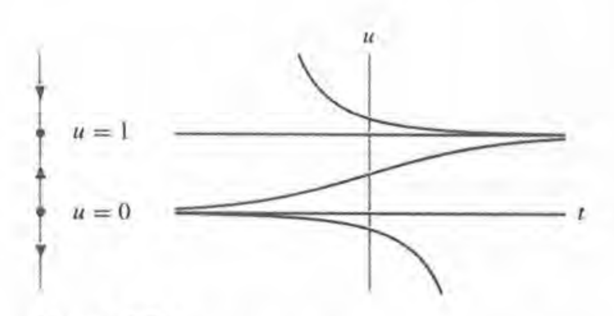


Figura 1.99
Línea de fase y gráficas de soluciones para la ecuación logística $du/dt = (1 - u)u$.

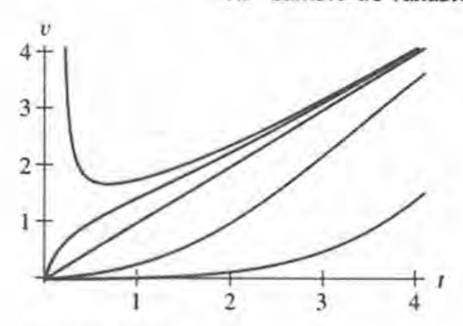


Figura 1.100
Gráficas de soluciones para la ecuación $dv/dt = v - v^2/t + v/t$.

Observe que esta ecuación es nuestra vieja conocida, la logística. Esbozamos la línea de fase y las soluciones para esta ecuación, probablemente hasta de memoria (vea la figura 1.99). Los puntos de equilibrio $u = 0$ y $u = 1$ pertenecen a las soluciones constantes $u_0(t) = 0$ y $u_1(t) = 1$, respectivamente, y las soluciones correspondientes en t y v son $v_0(t) = tu_0(t) = t \cdot 0 = 0$ y $v_1(t) = tu_1(t) = t \cdot 1 = t$. Además, como $u = 0$ es una fuente, las soluciones en el plano tv tienden a alejarse de la solución $v_0(t)$ cuando t aumenta. Asimismo, como $u = 1$ es un sumidero, las soluciones en el plano tv se aproximan a la solución $v_1(t)$ cuando t se incrementa (vea la figura 1.100).

Las gráficas de las soluciones $v_0(t) = 0$ y $v_1(t) = t$ se intersecan en $t = 0$. Esto nos pone nerviosos porque el teorema de existencia y unicidad dice que las soluciones cuyas gráficas se intersecan son en realidad las mismas. Sin embargo, no hay contradicción aquí porque ni la ecuación original ni el cambio de variable $u = v/t$ están definidas cuando $t = 0$. Cuando t es cercano a 0, un pequeño valor de v da un valor grande de u, por lo que la región cercana a $t = 0$ sobre el plano tv es "explotado" por el cambio de variables.

Nuevamente un problema de mezclado

Supongamos que un recipiente de 10 galones contiene 4 galones de agua limpia, y comenzamos vertiendo azúcar al recipiente en el tiempo $t = 0$ a razón de 0.25 libras por minuto. También agregamos agua limpia al recipiente a razón de 2 galones por minuto. Finalmente, digamos que el agua se mantiene bien mezclada de manera que la concentración de azúcar es uniforme en el recipiente, y que retiramos 1 galón por minuto de agua azucarada del fondo del recipiente (vea la figura 1.101). ¿Cuál será la concentración de azúcar en el momento en que el recipiente empieza a derramarse?

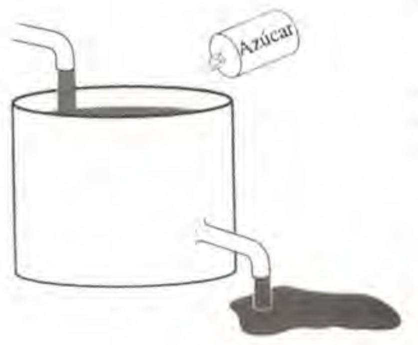


Figura 1.101
Esquema del tanque en el que se está agregando azúcar y agua limpia y se está retirando agua azucarada. El azúcar entra al tanque a razón de 0.25 libras por minuto, y el agua limpia a razón de 2 galones por minuto. El agua azucarada sale del tanque a razón de 1 galón por minuto.

Sea $S(t)$ la cantidad de azúcar en el recipiente en el tiempo t. La razón de cambio de S está determinada por la proporción del azúcar que entra (un término positivo) y que sale del recipiente (un término negativo). En este caso, la razón de azúcar que entra es una constante (0.25 libras por minuto), pero la razón de azúcar que sale depende de la concentración. En el tiempo t, la concentración es la razón de la cantidad total $S(t)$ de azúcar en el recipiente y el volumen total de líquido en él. Por tanto, la ecuación diferencial que gobierna el cambio de la cantidad de azúcar en el recipiente es

$$\frac{dS}{dt} = 0.25 - \frac{S}{4+t}.$$

El recipiente se derramará cuando $4 + t = 10$, es decir, cuando $t = 6$. Queremos determinar la concentración $S(6)/10$, correspondiente a la condición inicial $S(0) = 0$. La ecuación es lineal, por lo que podríamos usar el procedimiento de la sección 1.8: calculamos un factor de integración y resolvemos las integrales. Sin embargo, también podemos cambiar las variables, lo que hace la ecuación separable.

En este caso nuestra opción de la nueva variable depende de consideraciones físicas. Como nuestra meta es determinar la concentración en el tiempo $t = 6$, escogemos que la nueva variable sea $C(t)$, la concentración en el tiempo t en libras de azúcar por galón, por lo que

$$C = \frac{S}{4+t},$$

que puede expresarse como $(4 + t)C = S$. Para encontrar la nueva ecuación diferencial en términos de la concentración, diferenciamos la ecuación $(4 + t)C = S$ y obtenemos

$$(4+t)\frac{dC}{dt} + C = \frac{dS}{dt}.$$

Usando esta relación entre dC/dt y dS/dt, tenemos

$$\begin{aligned}(4+t)\frac{dC}{dt} + C &= \frac{dS}{dt} \\ &= 0.25 - \frac{S}{4+t} \\ &= 0.25 - C.\end{aligned}$$

En términos de la concentración, la ecuación diferencial es

$$\begin{aligned}(4+t)\frac{dC}{dt} + C &= 0.25 - C \\ \frac{dC}{dt} &= \frac{0.25 - 2C}{4+t}.\end{aligned}$$

Esta ecuación describe la misma situación física que la ecuación para dS/dt. Se trata realmente de la misma ecuación expresada en términos de la concentración C en lugar de la cantidad de azúcar S.

Es algo sorprendente que esta nueva ecuación sea separable. Al disociar las variables, encontramos que

$$\frac{1}{0.25 - 2C}\, dC = \frac{1}{4+t}\, dt,$$

e integrando ambos lados obtenemos

$$-\tfrac{1}{2}\ln(0.25 - 2C) = \ln(4 + t) + c,$$

donde c es la constante de integración. Como el agua en el recipiente está libre de azúcar en $t = 0$, la condición inicial es $C(0) = 0$, por lo que podemos determinar el valor de c mediante

$$-\tfrac{1}{2}\ln(0.25) = \ln(4) + c$$

que es lo mismo que

$$\tfrac{1}{2}\ln(4) = \ln(4) + c.$$

Entonces, $c = -(1/2)\ln(4) = \ln(4^{-1/2}) = \ln(1/2)$. Ahora que hemos determinado c, podemos despejar la concentración C. Tenemos

$$-\frac{1}{2}\ln(0.25 - 2C) = \ln(4 + t) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}(4 + t)\right) = \ln\left(2 + \frac{t}{2}\right).$$

Multiplicando ambos lados por -2, resulta

$$\ln\left(\frac{1}{4} - 2C\right) = -2\ln\left(2 + \frac{t}{2}\right) = \ln\left[\left(2 + \frac{t}{2}\right)^{-2}\right],$$

y exponenciando obtenemos

$$\frac{1}{4} - 2C = \left(2 + \frac{t}{2}\right)^{-2}.$$

Despejando a C, vemos que

$$C = \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\left(2 + \frac{t}{2}\right)^{-2}.$$

La concentración en el momento del derrame es $C(6) = 0.105$ libras de azúcar por galón.

Si esta ecuación fue más fácil o más difícil de resolver que la ecuación dS/dt, depende de la persona que hizo el álgebra. En cualquier problema es útil tener dos maneras de encontrar la solución, puesto que es improbable que un error aritmético dé la misma respuesta equivocada con ambos métodos. Desde un punto de vista teórico, resulta interesante que el cambio de la cantidad total de azúcar a la concentración de la misma haga una gran diferencia en el tipo de ecuación diferencial obtenida y en el procedimiento de solución usado.

Un problema de linearización

Como hemos indicado, el cambio de variables no sólo es un método de ayuda para encontrar soluciones analíticas. También puede ayudarnos a determinar el comportamiento cualitativo de las soluciones. Por ejemplo, consideremos el modelo logístico de población

$$\frac{dP}{dt} = 0.06P\left(1 - \frac{P}{500}\right),$$

donde $P(t)$ es una población en el tiempo t medido en cientos de miles de individuos. Note que el parámetro de razón de crecimiento es 0.06 y la capacidad de soporte es 500.

Los puntos de equilibrio son una fuente en $P = 0$ y un sumidero en $P = 500$. Todas las soluciones con condiciones iniciales positivas tienden al sumidero $P = 500$ cuando $t \to \infty$ (vea la figura 1.102). Sabemos que si P es pequeño, el término $(1 - P/500)$ está cercano a 1 y las soluciones de esta ecuación logística están muy próximas a las del modelo de crecimiento exponencial

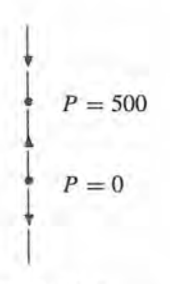


Figura 1.102
Línea de fase para la ecuación familiar

$$\frac{dP}{dt} = 0.06P\left(1 - \frac{P}{500}\right).$$

$$\frac{dP}{dt} = 0.06P,$$

que tiene la forma $P(t) = ke^{0.06t}$. Entonces, para P pequeña, la población crece a una razón exponencial de $0.06t$.

Después de un largo tiempo, esperamos que la población esté cerca de $P = 500$. Suponga que algún evento inesperado (no incluido en el modelo) la aleja de $P = 500$. Podría ser un clima extraordinariamente severo, una cacería ilegal o una inmigración inesperada de un pequeño número de individuos. Cualquiera de esos eventos dará una población cercana pero no igual a $P = 500$. Sabemos que si las condiciones retornan a las del modelo, la población entonces tenderá de nuevo a la capacidad de soporte de $P = 500$. Una pregunta natural sería: ¿cuánto tiempo tomará esta recuperación? En otras palabras, para $P(0)$ cercano a 500, ¿cómo se comportará la solución?

El tipo de respuesta que queremos es similar a la descripción del comportamiento de poblaciones pequeñas. Cambiamos variables moviendo el punto $P = 500$ hacia el origen. Con las nuevas variables, el comportamiento de las soluciones cerca del punto de equilibrio son más fáciles de detectar. Sea

$$u = P - 500$$

de manera que $P = u + 500$.

La nueva ecuación diferencial en términos de u está dada por

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{dP}{dt}\\ &= 0.06P\left(1 - \frac{P}{500}\right)\\ &= 0.06(u + 500)\left(1 - \frac{u + 500}{500}\right)\\ &= 0.06(u + 500)\left(-\frac{u}{500}\right).\end{aligned}$$

Agrupando términos, esta ecuación toma la forma

$$\frac{du}{dt} = -0.06u - 0.06\frac{u^2}{500}.$$

El punto de equilibrio $P = 500$ corresponde a su análogo $u = 0$ con la nueva variable. Para u muy cercana a cero, el término que contiene u^2 es el cuadrado de un número muy pequeño. Por consiguiente, para u cercana a cero, el comportamiento de las soluciones de esta ecuación será muy similar al de la ecuación donde despreciamos el término u^2, es decir

$$\frac{du}{dt} = -0.06u.$$

Las soluciones de esta ecuación son de la forma $u(t) = ke^{-0.06t}$, por lo que ellas decaen hacia $u = 0$ a una razón exponencial de $-0.06t$ (vea la figura 1.103). Debido a que la nueva variable dependiente u es meramente una traslación de la variable original P, las soluciones para la ecuación logística que tienen una condición inicial cercana a $P = 500$ tienden a $P = 500$ a una razón exponencial de $-0.06t$ (vea la figura 1.104).

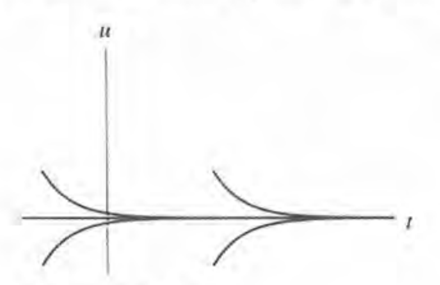


Figura 1.103
Soluciones de la ecuación $du/dt = -0.06u$.

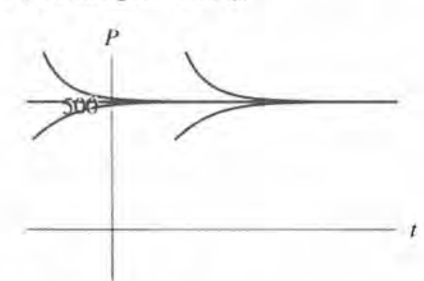


Figura 1.104
Soluciones de la ecuación $dP/dt = 0.06P(1 - P/500)$ con condición inicial cerca de $P = 500$.

Linearización

En general, para encontrar el comportamiento de una solución cerca de un punto de equilibrio, primero cambiamos las variables moviendo ese punto de equilibrio al origen. A continuación despreciamos todos los términos "no lineales" de la ecuación. Como sólo nos interesan los valores cercanos a 0 de la nueva variable, cualquier potencia superior de esa variable estará tan próxima a 0 que puede despreciarse con seguridad, por lo menos en una primera aproximación. La ecuación que resulta es lineal y por tanto fácil de analizar.

Este método implica una aproximación y por ello sólo es válido para datos de la variable en que esa aproximación es razonable. Una vez que la nueva variable adquiere valores grandes, los términos no lineales en la ecuación resultan importantes y no pueden ignorarse. Qué tan pequeño es pequeño y qué tan grande es grande depende de la ecuación particular que se esté considerando (vea los ejercicios).

Este procedimiento se llama **linearización**. La idea es aproximar una ecuación complicada por medio de una ecuación lineal más simple. Siempre se espera que la ecuación lineal resulte suficientemente sencilla para poder entender el comportamiento de las soluciones. La linearización es una herramienta importante en nuestro estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales y la analizaremos con detalle en la sección 5.1.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 1.9

En los ejercicios 1-4, cambie la variable dependiente de y a u usando el cambio de variables indicado. Describa la ecuación con la nueva variable (tal como separable, lineal, etcétera).

1. $\dfrac{dy}{dt} = y - 4t + y^2 - 8yt + 16t^2 + 4$, sea $u = y - 4t$

2. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y^2 + ty}{y^2 + 3t^2}$, sea $u = \dfrac{y}{t}$

3. $\dfrac{dy}{dt} = t(y + ty^2) + \cos ty,\qquad$ sea $u = ty$

4. $\dfrac{dy}{dt} = e^y + \dfrac{t^2}{e^y},\qquad$ sea $u = e^y$

En los ejercicios 5-7, encuentre un cambio de variables que transforme la ecuación en autónoma. Esboce la línea de fase para la nueva ecuación y úsela para esbozar las gráficas de soluci s de la original.

5. $\dfrac{dy}{dt} = (y - t)^2 - (y - t) - 1$

6. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y^2}{t} + 2y - 4t + \dfrac{y}{t}$

7. $\dfrac{dy}{dt} = y\cos(ty) - \dfrac{y}{t}$

En los ejercicios 8-10, cambie las variables como se indica y luego encuentre la solución general de la ecuación resultante. Use esta información para dar la solución general de la original.

8. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{ty}{2} + \dfrac{e^{t^2/2}}{2y},\qquad$ sea $y = \sqrt{u}$

9. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{1+t} - \dfrac{y}{t} + t^2(1+t),\qquad$ sea $u = \dfrac{y}{1+t}$

10. $\dfrac{dy}{dt} = y^2 - 2yt + t^2 + y - t + 1,\qquad$ sea $u = y - t$

En los ejercicios 11-13, genere sus propios problemas de cambio de variables. Comenzando con la simple ecuación $du/dt = (1 - u)u$, modifique las variables según se indica. Esboce las gráficas de las soluciones de las nuevas ecuaciones aplicando lo que sabe acerca de las soluciones de $du/dt = (1 - u)u$.

11. $y = u + 3t$

12. $y = \sqrt{u}$

13. $y = u^2$

14. Considere un tanque de 20 galones que en el tiempo $t = 0$ contiene 5 galones de agua limpia. Suponga que el agua entra al tanque por dos tubos. Por el primer tubo entra al tanque agua salada, que contiene 2 libras de sal por galón, a razón de 3 galones por minuto. Por el segundo tubo entra agua salada, que contiene 0.5 libras de sal por galón, a razón de 4 galones por minuto. Suponga que el agua se mantiene bien mezclada y que sale del tanque a razón de 2 galones por minuto.

(a) Obtenga una ecuación diferencial para la razón de cambio de la cantidad total de sal $S(t)$ en el tanque en el tiempo t.

(b) Convierta esta ecuación en una ecuación diferencial para la concentración $C(t)$ de sal en el tanque en el tiempo t.

(c) Encuentre la concentración de sal en el tanque en el instante en que comienza a derramarse.

15. Un tanque muy grande contiene inicialmente 10 galones de agua limpia. Suponga que el agua entra al tanque por dos tubos. Por el primero entra agua salada que contiene 2 libras de sal por galón a razón de 1 galón por minuto. Por el segundo tubo ingresa agua salada cuya concentración es de 0.2 libras de sal por galón a razón de 5 galones por minuto. Suponga que el líquido se mantiene bien mezclado y que sale del tanque a razón de 3 galones por minuto.

(a) Obtenga una ecuación diferencial para la cantidad total de sal $S(t)$ en el tanque en el tiempo t.
(b) Convierta esta ecuación a una ecuación diferencial para la concentración $C(t)$ de sal en el tanque en el tiempo t.
(c) ¿Cuál será la concentración de sal en el tanque después de un tiempo muy grande?
(d) Encuentre la concentración de sal en el tanque en el tiempo $t = 5$.

16. Suponga que un tanque de 20 galones contiene 10 galones de agua limpia en el tiempo $t = 0$. Considere también que cada minuto entran 2 galones de agua salada (a una concentración de 0.3 libras por galón). También ingresa agua limpia al tanque a razón de 1 galón por minuto. Finalmente, tome en cuenta que el líquido en el tanque está bien mezclado y que se retira 0.5 galón por minuto.

(a) Desarrolle una ecuación diferencial para la concentración $C(t)$ de sal en el tanque en el tiempo t. Asegúrese de justificar cuidadosamente cada término en su ecuación. [*Sugerencia:* Considere cómo cambia la concentración cada tubo. En particular, ¿afecta la concentración la salida de agua salada?]
(b) Convierta la ecuación para la razón de cambio de la concentración de sal en el tanque en una ecuación para la cantidad de sal en el tanque en el tiempo t. [*Sugerencia:* Ésta debe proporcionar una verificación de su ecuación diferencial para la concentración.]

En los ejercicios 17-20,

(a) Identifique los puntos de equilibrio. Para cada uno de ellos:
(b) dé el cambio de variable que mueve el punto al origen y proporcione la aproximación lineal del nuevo sistema cerca del origen. Identifique el punto de equilibrio como fuente, sumidero o nodo.
(c) describa cuantitativamente el comportamiento de las soluciones con valores iniciales que estén muy cercanos al punto de equilibrio. (Por ejemplo, ¿qué tan rápido se acerca o aleja del punto de equilibrio una solución que comienza muy cerca de éste, cuando t aumenta? En particular, aproxime la cantidad de tiempo que le toma a un punto reducir a la mitad o duplicar su distancia desde el punto de equilibrio cuando t se incrementa.

17. $\dfrac{dy}{dt} = 10y^3 - 1$

18. $\dfrac{dy}{dt} = (y+1)(y-3)$

19. $\dfrac{dy}{dt} = (y+1)(3-y)$

20. $\dfrac{dy}{dt} = y^3 - 3y^2 + y$

21. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = -3 \operatorname{sen} y.$$

(a) ¿Cuál es el polinomio de Taylor de tercer grado alrededor de $y = 0$ para sen y?
(b) ¿Cuál es la linearización de esta ecuación diferencial cerca del punto de equilibrio en $y = 0$?
(c) Use el resultado del inciso (b) para aproximar $y(2)$ para la solución que satisface la condición inicial $y(0) = 0.04$.

22. Considere el modelo de población (vea la sección 1.6, pág. 87)

$$\frac{dS}{dt} = 0.05S\left(\frac{S}{20} - 1\right)\left(1 - \frac{S}{100}\right).$$

donde S se mide en miles de individuos. Suponga que la población es cercana a la capacidad de soporte del sistema y que un tornado reduce repentinamente la población en 2 000 individuos.
(a) Aproximadamente, ¿qué tiempo le tomará a la población retornar a la capacidad de soporte con un margen de 1000 individuos?
(b) Aproximadamente, ¿qué tiempo le tomará a la población retornar a la capacidad de soporte con un margen de 100 individuos?

23. Considere el modelo de población logística con una pequeña cantidad de recolección periódica

$$\frac{dP}{dt} = 0.05P\left(1 - \frac{P}{100}\right) - 0.02(1 + \operatorname{sen} t).$$

(a) Cambie variables usando $u = P - 100$ para mover la capacidad de soporte a 0.
(b) Encuentre una ecuación lineal que sea cercana a su ecuación del inciso (a) si u es cercana a cero (es decir, P es cercana a 100).
(c) Resuelva la ecuación que encontró en el inciso (b).
(d) ¿Qué concluye usted acerca del comportamiento de la población con una pequeña recolección periódica dada por la ecuación anterior? (Por ejemplo, ¿cuánto predice usted que variará la población respecto al valor $P = 100$?)

24. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = -y + \frac{y^2}{4}.$$

(a) ¿Cuál es la aproximación lineal de esta ecuación cerca del punto de equilibrio $y = 0$?
(b) Si $y(0) = y_0$ es muy cercana a cero, ¿qué tiempo le tomará aproximadamente a la solución alcanzar el valor $y_0/2$?
(c) Si hacemos $f(y) = -y + y^2/4$, ¿para qué intervalo de la variable y próximo a $y = 0$ es $0.9\,|y| \leq |-y + y^{2/4}| = 1.1\,|y|$?
(d) ¿Para qué valor de $y(0) = y_0$ será aplicable su respuesta al inciso (b) a la ecuación no lineal? Justifíquela.

25. Considere la ecuación diferencial $dy/dt = f(y)$, donde $f(y)$ es una función suave (puede ser diferenciada tantas veces como sea necesario). Suponga que $y = y_0$ es un punto de equilibrio para esta ecuación.

(a) Si $u = y - y_0$, escriba la ecuación diferencial en términos de la nueva variable dependiente u.

(b) Demuestre que la aproximación lineal de la ecuación diferencial para du/dt cerca del punto de equilibrio en $u = 0$ está dada por

$$\frac{du}{dt} = f'(y_0)u.$$

26. Hasta ahora hemos cambiado sólo la variable dependiente. También es posible cambiar la variable independiente para obtener una nueva ecuación. Esto es análogo a cambiar la manera en que medimos el tiempo. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2y + 3t^5.$$

Suponga que definimos una nueva variable independiente tiempo usando la fórmula $s = t^3$. Entonces, $t = \sqrt[3]{s}$.

(a) Demuestre que

$$\frac{dy}{ds} = y + s.$$

(b) Encuentre la solución general de la ecuación diferencial con la variable s.

(c) ¿Cuál es la solución general de la ecuación diferencial original?

LABORATORIO 1.1 Modelos logísticos de población con recolección

En este laboratorio consideramos modelos logísticos del crecimiento de población que han sido modificados para incluir términos que toman en cuenta la "recolección". En particular, usted debería imaginar una población de peces sometida a varios grados y tipos de pesca. Los modelos de ecuaciones diferenciales se dan abajo. (Su profesor le indicará los valores de los parámetros k, N, a_1 y a_2 que debe usar. En la tabla 1.9 se dan varias opciones posibles.) En su reporte deberá incluir un análisis del significado de cada variable y parámetro, así como una explicación de por qué la ecuación se escribe de esa manera.

Hemos analizado tres enfoques generales que pueden usarse para estudiar una ecuación diferencial: los métodos numéricos dan gráficas de soluciones aproximadas, los procedimientos geométricos y cualitativos proporcionan predicciones del comportamiento a largo plazo de la solución, y en casos especiales, los procedimientos analíticos proporcionan fórmulas explícitas para la solución. En su reporte, usted debe emplear tantos de estos procedimientos como sea apropiado para ayudarle a entender los modelos.

Su reporte debe considerar las siguientes ecuaciones:

1. (Crecimiento logístico con recolección constante.) La ecuación

$$\frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{N}\right) - a$$

representa un modelo logístico del crecimiento de población con recolección constante con una razón igual a a. Para $a = a_1$, ¿qué le pasará a la población de peces para varias condiciones iniciales? (Nota: Esta ecuación es autónoma, por lo que puede usted sacar ventaja de los procedimientos especiales disponibles para tales ecuaciones.)

2. (Crecimiento logístico con recolección periódica.) La ecuación

$$\frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{N}\right) - a(1 + \operatorname{sen}(bt))$$

es una ecuación no autónoma que considera una recolección periódica. ¿Qué representan los parámetros a y b? Sea $b = 1$. Si $a = a_1$, ¿qué le pasará a la población de peces para diversas condiciones iniciales?

3. Considere la misma ecuación que en la parte 2, pero sea $a = a_2$. ¿Qué le pasará a la población de peces para diversas condiciones iniciales con este valor de a?

Sobre su reporte: En su reporte deberá tomar en cuenta estas tres preguntas, una a la vez, escribiendo para ello un corto ensayo. Comience las preguntas 1 y 2 con una descripción del significado de cada una de las variables y parámetros, así como una explicación de por qué la ecuación diferencial tiene la forma dada. Usted debe incluir fotografías y gráficas de datos y de las soluciones de sus modelos *según sea apropiado*. (Recuerde que una fotografía cuidadosamente escogida puede equivaler a mil palabras, pero mil fotografías no valen nada.)

Tabla 1.9
Posibles opciones para los parámetros

Opción	k	N	a_1	a_2
1	0.25	4	0.16	0.25
2	0.50	2	0.21	0.25
3	0.20	5	0.21	0.25
4	0.20	5	0.16	0.25
5	0.25	4	0.09	0.25
6	0.20	5	0.09	0.25
7	0.50	2	0.16	0.25
8	0.20	5	0.24	0.25
9	0.25	4	0.21	0.25
10	0.50	2	0.09	0.25

LABORATORIO 1.2 Modelo de velocidad de memorización

El aprendizaje humano es un proceso extremadamente complicado. La biología y química del aprendizaje están aún muy lejos de entenderse completamente. Si bien los modelos simples del aprendizaje no abarcan esta complejidad, sí pueden iluminar los aspectos limitados del proceso de aprendizaje. En este laboratorio estudiaremos un modelo simple del proceso de memorización de listas (listas de sílabas sin sentido o entradas de tablas de integrales).

El modelo se basa en la hipótesis de que la razón de aprendizaje es proporcional a la cantidad de material a aprender. Sea $L(t)$ la fracción de la lista ya aprendida de memoria en el tiempo t. Entonces $L = 0$ corresponde a no saber nada de la lista y $L = 1$ corresponde a saber toda la lista. La ecuación diferencial es

$$\frac{dL}{dt} = k(1 - L).$$

A diferentes personas les toman cantidades de tiempo distintas para memorizar una lista. De acuerdo con el modelo esto significa que cada individuo tiene su propio valor de k. Este valor debe determinarse para cada persona por experimento.

Dé los siguientes pasos:

1. En la tabla 1.10 se dan cuatro listas de números con tres dígitos, pero también pueden obtenerse listas extras mediante un generador de números aleatorios en una computadora. Junte los datos necesarios para determinar su valor personal k de la siguiente manera:
   (a) Estudie durante un minuto una de las listas de números en la tabla 1.10. (Mida el tiempo cuidadosamente. Puede ayudarle un amigo.)
   (b) Determine cuántos números ha memorizado usted, escribiendo todos los que recuerde en su orden correcto. (Puede saltar los que no recuerde y obtener "crédito" por los números que recuerde luego de la lista.) Haga a un lado la lista para calificarla después.

(c) Estudie la misma lista durante otro minuto más.
(d) Evalúese de nuevo.

Repita el proceso diez veces (o hasta que haya memorizado toda la lista). Califique sus pruebas (una respuesta correcta es tener un número correcto en su posición correcta en la lista). Compile sus datos en una gráfica con t, la cantidad de tiempo que ha pasado estudiando, sobre el eje horizontal y L, la fracción de la lista aprendida, sobre el eje vertical.

2. Use estos datos para estimar el valor de su k y compárelos con las predicciones del modelo. Puede emplear métodos numéricos o analíticos, pero explique detenidamente su trabajo. Estime cuánto tiempo le tomaría aprender una lista de 50 y otra de 100 números de tres dígitos.

3. Repita el proceso de la parte 1 en dos de las otras listas y calcule su valor k en esas listas. ¿Es constante su valor k o mejora con la práctica? Si k mejora con la práctica, ¿cómo modificaría usted el modelo para tomar esto en cuenta?

Sobre su reporte: En su reporte deberá dar sus datos clara y ordenadamente de las partes 1 y 3. Sus respuestas a las preguntas en las partes 2 y 3 deben estar en forma de pequeños ensayos. También incluirá gráficas (a mano o generadas por computadora) de sus datos y soluciones del modelo *según sea apropiado*. (Recuerde que una gráfica bien escogida vale mil palabras, pero que mil gráficas no valen nada.)

Tabla 1.10
Cuatro listas de números aleatorios con tres dígitos

	Lista 1	Lista 2	Lista 3	Lista 4
1	457	167	733	240
2	938	603	297	897
3	363	980	184	935
4	246	326	784	105
5	219	189	277	679
6	538	846	274	011
7	790	040	516	020
8	895	891	051	013
9	073	519	925	144
10	951	306	102	209
11	777	424	826	419
12	300	559	937	191
13	048	911	182	551
14	918	439	951	282
15	524	140	643	587
16	203	155	434	609
17	719	847	921	391
18	518	245	820	364
19	130	752	017	733
20	874	552	389	735

LABORATORIO 1.3 Modelos exponencial y logístico de población

En el texto modelamos la población de Estados Unidos de los últimos 200 años usando un modelo de crecimiento exponencial y un modelo de crecimiento logístico. En este proyecto de laboratorio le pedimos a usted que modele el crecimiento de la población de un estado particular. Los datos de la población de varios estados están dados en la tabla 1.11. (Su profesor le asignará el estado por considerar.)

También hemos analizado tres enfoques generales que pueden emplearse para estudiar una ecuación diferencial: los procedimientos numéricos dan gráficas de soluciones aproximadas, las técnicas geométricas y cualitativas proporcionan predicciones del comportamiento a largo plazo de la solución, y en casos especiales, las técnicas analíticas conducen a fórmulas explícitas para la solución. En su reporte debe emplear tantas de esas técnicas como sea apropiado para ayudarlo a entender los modelos.

En su reporte deberán estar contenidos los siguientes aspectos:

1. Usando un modelo de crecimiento exponencial, determine la población de su estado en el año 2000 por medio de una predicción tan exacta como sea posible. ¿Qué tanto difiere su predicción de la que resulta de una extrapolación lineal al usar las poblaciones de 1980 y 1990? ¿En qué medida concuerdan las soluciones de su modelo con los datos históricos?

2. Elabore un modelo de crecimiento logístico para la población de su estado. ¿Cuál es la capacidad de soporte para su modelo? Mediante el método de Euler, prediga la población en los años 2000 y 2050. Usando técnicas analíticas, obtenga una fórmula para la función de población $P(t)$ que satisfaga su modelo. ¿En qué medida concuerdan las soluciones de su modelo con los datos históricos?

3. Comente acerca de su confianza con respecto a sus predicciones de las poblaciones futuras. Analice qué modelo, el de crecimiento exponencial o el de crecimiento logístico, es mejor para sus datos y por qué (y si ninguno es muy bueno, sugiera alternativas).

Sobre su reporte: Su reporte debe contener los tres puntos anteriores, por separado, en forma de un breve ensayo. Para cada modelo escogerá valores específicos para ciertos parámetros (el parámetro de razón de crecimiento y el de capacidad de soporte). No olvide dar una justificación completa de por qué hizo tal selección específica. Incluya fotografías y gráficas de datos y de las soluciones de sus modelos *según sea apropiado*. (Recuerde que una fotografía cuidadosamente escogida vale por mil parabras, pero que mil fotografías no valen nada.)

Tabla 1.11
Población (en miles) de estados seleccionados (datos del *Almanaque Mundial de 1994*)

Año	Massachusetts	Nueva York	Carolina del Norte	Alabama	Florida	California	Montana	Hawaii
1790	379	340	394					
1800	423	589	478	1				
1810	472	959	556	9				
1820	523	1373	638	127				
1830	610	1919	738	309	35			
1840	738	2429	753	591	54			
1850	995	3097	869	772	87	93		
1860	1231	3881	993	964	140	380		
1870	1457	4383	1071	996	188	560	20	
1880	1783	5083	1399	1262	269	865	39	
1890	2239	6003	1618	1513	391	1213	143	
1900	2805	7269	1893	1829	529	1485	243	154
1910	3366	9114	2206	2138	753	2378	376	192
1920	3852	10385	2559	2348	968	3427	549	256
1930	4250	12588	3170	2646	1468	5677	538	368
1940	4317	13479	3571	2832	1897	6907	559	423
1950	4691	14830	4061	3062	2771	10586	591	500
1960	5149	16782	4556	3267	4952	15717	675	633
1970	5689	18241	5084	3444	6791	19971	694	770
1980	5737	17558	5880	3894	9747	23668	787	965
1990	6016	17990	6628	4040	12938	29760	799	1108

LABORATORIO 1.4 Crecimiento de una población de moho

En el texto modelamos la población de Estados Unidos usando un modelo de crecimiento exponencial y un modelo de crecimiento logístico. Las hipótesis que usamos para crear los modelos son fáciles de enunciar. Para el modelo exponencial supusimos sólo que el crecimiento de la población es proporcional al tamaño de la población. Para el modelo logístico, agregamos la hipótesis de que la razón de la población a la tasa de crecimiento decrece cuando la población aumenta. En este laboratorio aplicamos esos mismos principios para modelar la colonización de una pieza de pan por moho.

Coloque una pieza de pan libre de moho en una bolsa de plástico con una pequeña cantidad de agua y déjela en un lugar caliente. Diariamente, registre el área del pan que está cubierta con moho. (Una manera de hacer esto es calcar una retícula de una pieza de papel graficador sobre un acetato. Mantenga el plástico sobre el pan y cuente el número de cuadrados que están cubiertos por el moho.)

Advertencia: Toma por lo menos dos semanas acumular una cantidad razonable de datos. Algunos tipos de pan parecen ser resistentes al crecimiento del moho y el pan se seca. Si el moho crece, entonces, después de aproximadamente una semana, tendrá muy mal aspecto. Tome precauciones para que su pieza de trabajo no sea tirada a la basura.

En su reporte, considere las siguientes cuestiones:

1. Modele el crecimiento del moho usando un modelo de crecimiento exponencial. ¿Qué tan exactamente se ajusta el modelo a los datos? Explique cuidadosamente cómo obtuvo usted el valor para el parámetro de la razón de crecimiento.

2. Modele el crecimiento del moho usando un modelo logístico. ¿Qué tan exactamente se ajusta el modelo a los datos? Explique cuidadosamente cómo obtuvo usted el valor para el parámetro de la razón de crecimiento y de la capacidad de soporte.

3. Analice los modelos para el crecimiento de la población de moho. ¿Hubo sorpresas? ¿Tiene importancia que se mida el área cubierta por el moho en vez del peso total de éste? ¿En qué medida creería usted las predicciones futuras de la población de moho basadas en esos modelos?

Sobre su reporte: Incluya en su reporte los detalles del tipo de pan usado, dónde se mantuvo y cómo y con qué frecuencia fue medido el moho. Su análisis de los modelos pueden incluir consideraciones cualitativas, numéricas y analíticas, así como gráficas de datos y soluciones de sus modelos según sea apropiado. (Recuerde que una imagen bien escogida vale por mil palabras, pero mil imágenes no valen nada.) **No entregue la pieza de pan.**

2 SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

Pocos fenómenos son descritos completamente por un solo número. Por ejemplo, el tamaño de una población de conejos puede representarse usando un número, pero para conocer su razón de cambio, debemos considerar otras cantidades como el tamaño de la población depredadora y la disponibilidad de alimento.

En este capítulo comenzamos el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales, es decir, ecuaciones que contienen más de una variable dependiente. Los procedimientos para resolverlas, igual que con las ecuaciones de primer orden, caen en tres categorías generales: analítica, cualitativa y numérica. Sólo los sistemas especiales de ecuaciones diferenciales pueden solucionarse usando métodos analíticos, por lo que aquí nos enfocaremos en los cualitativos y numéricos. La clase principal que puede estudiarse analíticamente son los sistemas lineales, y éstos serán el tema del capítulo 3.

Continuaremos con los modelos que implican ecuaciones diferenciales y analizaremos aquellos que contienen más de una variable dependiente. Incluiremos un sistema conocido como el oscilador armónico. Este modelo particular tiene numerosas aplicaciones en muchas ramas de la ciencia como la mecánica, la electrónica y la física.

2.1 MODELACIÓN POR MEDIO DE SISTEMAS

En esta sección revisaremos modelos de dos fenómenos muy diferentes: la evolución de las dos poblaciones en un sistema depredador-presa y el movimiento de un sistema masa-resorte. De inicio parecen ser muy diferentes, pero desde el punto de vista correcto, poseen un buen número de similaridades.

El sistema depredador-presa revisitado

Comenzamos nuestro estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales considerando dos versiones del modelo depredador-presa analizado brevemente en la sección 1.1. Recuerde que $R(t)$ denota la población (en miles, o millones, o en cualquier otro múltiplo de la unidad) de presas presentes en el tiempo t y que $F(t)$ denota la población de depredadores. Suponemos que tanto $R(t)$ como $F(t)$ son positivos. Un sistema de ecuaciones diferenciales que podría gobernar los cambios en la población de esas dos especies es

$$\frac{dR}{dt} = 2R - 1.2RF$$
$$\frac{dF}{dt} = -F + 0.9RF.$$

El término $2R$ en la ecuación para dR/dt representa el crecimiento exponencial de la presa en ausencia de depredadores, y el término $-1.2RF$ corresponde al efecto negativo sobre la presa por la interacción de ambas especies. La expresión $-F$ en dF/dt corresponde a la hipótesis de que los depredadores mueren si no hay presa que comer, y $0.9RF$ es el efecto positivo sobre los depredadores por la misma interacción.

Los coeficientes 2, -1.2, -1 y 0.9 dependen de la especie implicada. Los sistemas similares con coeficientes distintos se consideran en los ejercicios. (Seleccionamos esos valores de los parámetros en este ejemplo sólo por conveniencia.)*

La presencia de los términos RF en esas ecuaciones dificulta resolver este sistema. Es imposible obtener fórmulas explícitas para la solución general, pero existen algunas condiciones iniciales que conducen a resultados simples. Por ejemplo, suponga que $R = 0$ y $F = 0$. Los lados derechos de ambas ecuaciones desaparecen entonces ($dR/dt = dF/dt = 0$) para toda t y, en consecuencia, el par de funciones constantes $R(t) = 0$ y $F(t) = 0$ forman una solución del sistema. Por analogía con las ecuaciones de primer orden, denominamos al par de funciones constantes una **solución de equilibrio** del sistema. Esta solución de equilibrio tiene sentido: si tanto las poblaciones de las dos especies desaparecen, ciertamente no podemos esperar que crezcan en cualquier tiempo posterior.

También podemos buscar otros valores de R y F que correspondan a soluciones constantes. Escribimos el sistema como

$$\frac{dR}{dt} = (2 - 1.2F)R$$
$$\frac{dF}{dt} = (-1 + 0.9R)F$$

*Para más detalles sobre el desarrollo, uso y limitaciones de este sistema como modelo de las interacciones depredador-presa en la naturaleza, referimos al lector a los excelentes análisis en J.P. Dempster, *Animal Population Ecology* (Nueva York: Academic Press, 1975) y M. Braun, *Differential Equations and Their Applications* (Nueva York: Springer-Verlag, 1993).

y observamos que ambas ecuaciones se anulan si $R = 1/0.9 \approx 1.11$ y $F = 2/1.2 \approx 1.67$. El par de funciones constantes $R(t) \approx 1.11$ y $F(t) \approx 1.67$ juntas forman otra solución de equilibrio. Está nos dice que, si la población presa es de 1.11 y la de depredador es de 1.67, el sistema está en equilibrio perfecto. Existen presas suficientes para soportar una población constante de depredadores de 1.67, y no hay ni demasiados depredadores (que podrían causar un descenso de la población presa) ni muy pocos (en cuyo caso el número de presas se elevaría). La razón de nacimiento de cada especie es exactamente igual a su razón de defunción y esas poblaciones se mantienen de manera indefinida. El sistema está en *equilibrio.*

En ciertas condiciones iniciales podemos usar los procedimientos que hemos desarrollado al estudiar los sistemas de ecuaciones de primer orden. Por ejemplo, si $R = 0$, desaparece la primera ecuación de este sistema. Por tanto, la función constante $R(t) = 0$ satisface esta ecuación diferencial sin importar qué condiciones iniciales escojamos para F. En este caso la segunda ecuación diferencial se reduce a

$$\frac{dF}{dt} = -F,$$

que reconocemos como el modelo para la declinación exponencial de la población depredadora; se trata de una ecuación diferencial familiar muy simple. De aquí podemos inferir que dicha población tiende a cero. Toda esta situación para $R = 0$ es razonable ya que si no hay presas en algún tiempo, entonces nunca las habrá, no importa cuántos depredadores haya. Además, sin un suministro de alimento, éstos deberán extinguirse.

De manera similar, note que la ecuación para dF/dt desaparece si $F = 0$ y la ecuación para dR/dt se reduce a

$$\frac{dR}{dt} = 2R$$

que representa un modelo de crecimiento exponencial. Como vimos en la sección 1.1, cualquier población presa no nula crece sin límite bajo esas hipótesis. Nuevamente, esas conclusiones tienen sentido porque no hay depredadores para controlar el crecimiento de la población presa. Por otra parte, podríamos formular la hipótesis más razonable de que la población presa obedece una ley de crecimiento logístico. Nuestro segundo ejemplo en esta sección incorpora esta suposición adicional.

Gráficas $R(t)$ y $F(t)$

Para entender todas las soluciones de este sistema depredador-presa

$$\frac{dR}{dt} = 2R - 1.2RF$$

$$\frac{dF}{dt} = -F + 0.9RF,$$

es importante señalar que la razón de cambio de cualquier población depende tanto de R como de F. Por tanto, necesitamos dos números, un valor inicial R_0 de R y F_0 de F, para determinar la manera en que esas poblaciones evolucionan con el tiempo. En otras palabras, una **condición inicial** que genere una solución para este sistema de ecuaciones es un par de números, R_0 y F_0, que son usados para calcular los valores iniciales de dR/dt y

dF/dt. Esta condición inicial da una **solución** del sistema que consiste en dos funciones $R(t)$ y $F(t)$ que, juntas, satisfacen el sistema de ecuaciones.

Para el estudio de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales, hay buenas y malas noticias. Las malas son que para muchos sistemas existen pocos procedimientos analíticos que conduzcan a fórmulas para solucionarlos. Las buenas noticias son que contamos con métodos numéricos y cualitativos que nos permiten entender lo esencial de las soluciones, aun cuando no podamos encontrar las representaciones analíticas para ellas. Por ejemplo, si especificamos las condiciones iniciales $R_0 = 1$ y $F_0 = 0.5$, podemos usar un método numérico similar al de Euler para obtener valores aproximados y con ellos solucionamos $R(t)$ y $F(t)$. (Este método lo desarrollaremos en la sección 2.4.)

En las figuras 2.1 y 2.2 graficamos las soluciones $R(t)$ y $F(t)$ que corresponden a la condición inicial $R_0 = 1$ y $F_0 = 0.5$, y vemos que $R(t)$ y $F(t)$ crecen y decrecen de manera *periódica.*

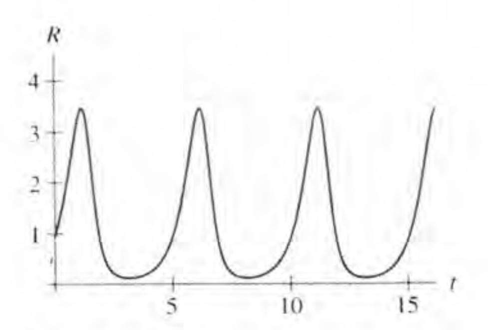


Figura 2.1
La gráfica $R(t)$ si $R_0 = 1$ y $F_0 = 0.5$.

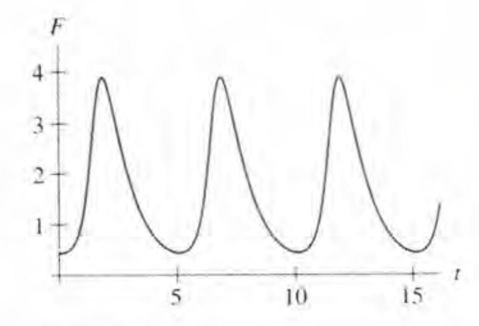


Figura 2.2
La gráfica $F(t)$ si $R_0 = 1$ y $F_0 = 0.5$.

En la figura 2.3 graficamos $R(t)$ y $F(t)$ sobre el mismo sistema de ejes. Aunque esta gráfica es algo confusa porque realmente hay dos escalas sobre el eje vertical, una que corresponde a las unidades de $R(t)$ y la otra a las unidades de $F(t)$, proporciona información que es difícil de leer a partir de las gráficas individuales $R(t)$ y $F(t)$. Por ejemplo, para esta solución particular vemos que los incrementos en la población depredador están retar-

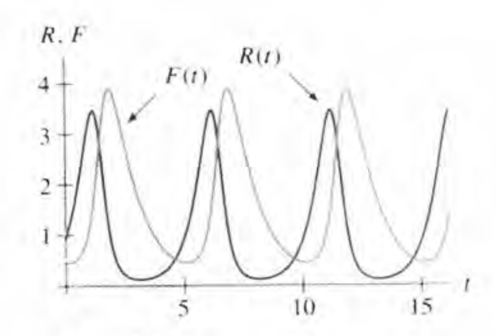


Figura 2.3
Las gráficas $R(t)$ y $F(t)$ dadas por la condición inicial $R_0 = 1$ y $F_0 = 0.5$.

dados respecto a los aumentos en la población presa y que la población depredador continúa creciendo por un corto tiempo después que la población presa comienza a declinar. Tal vez la observación más importante que podemos hacer sobre esta gráfica es que $R(t)$ y $F(t)$ parecen repetirse con el mismo periodo (aproximadamente cinco unidades de tiempo). Aunque podríamos llegar a las mismas conclusiones estudiando detenidamente las figuras 2.1 y 2.2, este hecho es mucho más fácil de observar si las gráficas de $R(t)$ y $F(t)$ se dibujan sobre el mismo sistema de ejes.

El retrato fase para este sistema

Hay otra manera de practicar la solución del sistema que corresponde a la condición inicial $(R_0, F_0) = (1, 0.5)$. Dados $R(t)$, $F(t)$ y un valor de t, podemos formar el par $(R(t), F(t))$ y considerarlo como un punto en el plano R-F. En otras palabras, las coordenadas del punto son los valores de las dos poblaciones en el tiempo t. Conforme t varía, el par $(R(t), F(t))$ barre una curva en el plano R-F. Ésta es la **curva solución** determinada por la condición inicial. Las coordenadas de cada punto sobre la curva son las poblaciones presa y depredadora en el tiempo asociado t y el punto (R_0, F_0) que corresponde a la condición inicial para la solución es llamado el **punto inicial** de esta curva solución.

A menudo es conveniente visualizar una curva solución de un sistema de ecuaciones diferenciales no como un conjunto de puntos en el plano, sino de una manera más dinámica, como un punto que sigue una curva que es determinada por la solución de la ecuación diferencial. En la figura 2.4 mostramos la curva solución correspondiente a la solución con condiciones iniciales $R_0 = 1$ y $F_0 = 0.5$ en el plano R-F. Esta curva parte del punto $P = (1, 0.5)$. Cuando t aumenta, el punto sobre la curva se mueve hacia la derecha. Este desplazamiento implica que $R(t)$ está creciendo, pero que al principio $F(t)$ permanece constante. Cerca de $R = 3$, la curva solución se vuelve significativamente hacia arriba. La población depredador $F(t)$ comienza entonces a crecer de manera considerable. Cuando $F(t)$ se acerca a $F = 2$, la curva empieza a dirigirse hacia la izquierda. $R(t)$ ha alcanzado un máximo y empieza a decrecer. Cuando t aumenta, los valores de $R(t)$ y $F(t)$ cambian como lo indica la forma de la curva solución. Finalmente, la curva solución regresa a su punto de inicio P y reinicia el ciclo.

El plano R-F se denomina el **plano fase** y es análogo a la línea fase para una ecuación diferencial autónoma de primer orden. Igual que esta línea, tiene un punto para cada

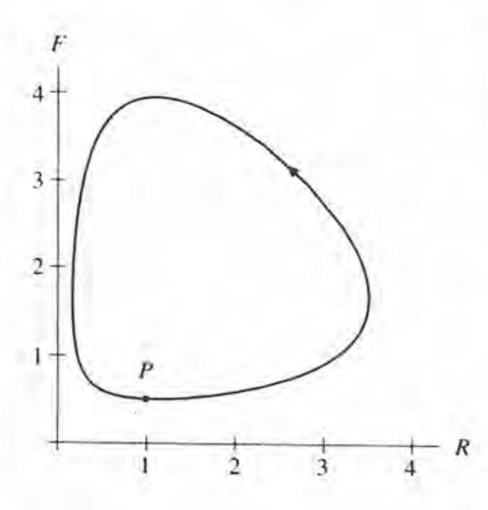


Figura 2.4
La curva solución para el sistema depredador-presa

$$\frac{dR}{dt} = 2R - 1.2RF$$
$$\frac{dF}{dt} = -F + 0.9RF,$$

correspondiente a la condición inicial $P = (R_0, F_0) = (1, 0.5)$.

valor de la variable dependiente pero no muestra explícitamente el valor correspondiente del tiempo, el plano fase tiene un punto para cada par ordenado (R, F) de poblaciones. La dependencia de una solución respecto a la variable independiente t puede sólo imaginarse como un punto moviéndose a lo largo de la curva solución conforme transcurre el tiempo.

Podemos dibujar muchas curvas solución sobre el plano fase simultáneamente. En la figura 2.5 vemos el **retrato fase** completo para nuestro sistema depredador-presa. Por supuesto, como las poblaciones negativas no tienen sentido para este modelo, restringimos nuestra atención al primer cuadrante del plano R-F.

Puesto que las soluciones de equilibrio son soluciones constantes, producen curvas solución $(R(t), F(t))$, donde $R(t)$ y $F(t)$ nunca varían. En otras palabras, las curvas solución que corresponden a soluciones de equilibrio son realmente puntos y nos referimos a ellos como a **puntos de equilibrio**. Igual que con la línea fase, los puntos de equilibrio en el plano fase son partes fundamentales del retrato fase y por lo general los marcamos con grandes puntos. [Note los puntos de equilibrio en (0, 0) y (1.11, 1.67) en la figura 2.5.]

En este sistema depredador-presa, todas las soluciones restantes para las que $R_0 > 0$ y $F_0 > 0$ dan curvas solución que se enlazan alrededor del punto de equilibrio (1.11, 1.67) en sentido contrario a las manecillas del reloj. Finalmente, retornan a sus puntos iniciales y por tanto, este modelo predice que, exceptuando la solución de equilibrio, $R(t)$ y $F(t)$ crecen y decrecen de manera periódica.

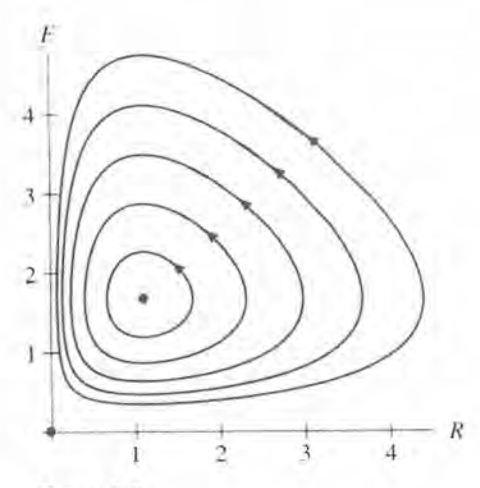


Figura 2.5
El plano fase para el sistema depredador-presa.

Un modelo modificado depredador-presa

Consideraremos ahora una modificación del modelo depredador-presa en el que suponemos que, en ausencia de depredadores, la población presa obedece un modelo logístico de crecimiento en vez de uno exponencial. Un modelo que representa esta situación es el sistema

$$\frac{dR}{dt} = 2R\left(1 - \frac{R}{2}\right) - 1.2RF$$

$$\frac{dF}{dt} = -F + 0.9RF.$$

Aquí, cuando no están presentes los depredadores (es decir, $F = 0$), la población presa obedece un modelo logístico de crecimiento con capacidad de soporte de 2. Nuevamente, con el uso de métodos numéricos vemos que los comportamientos de las curvas solución (y, por consiguiente, las predicciones hechas por este patrón) son bastante diferentes de los observados en el modelo previo para la misma interacción.

Encontremos primero las soluciones de equilibrio para este sistema. Recuerde que esas soluciones ocurren en puntos (R, F) donde desaparecen los lados derechos de ambas ecuaciones diferenciales. Igual que antes $(R, F) = (0, 0)$ es una solución de equilibrio. Hay otros dos que son: $(R, F) = (2, 0)$ y $(R, F) = (10/9, 20/27) \approx (1.11, 0.74)$.

Tal como en nuestro primer modelo depredador-presa, si no hay presas presentes, la población depredadora declina exponencialmente. En otras palabras, si $R = 0$, entonces $dR/dt = 0$ para toda t, por lo que $R(t) = 0$. La ecuación para dF/dt se reduce entonces al modelo familiar de decrecimiento exponencial

$$\frac{dF}{dt} = -F.$$

En ausencia de depredadores, la situación es algo diferente. Si $F = 0$, tenemos $dF/dt = 0$ para toda t y la ecuación para R se simplifica al familiar modelo logístico

$$\frac{dR}{dt} = 2R\left(1 - \frac{R}{2}\right).$$

De esta ecuación vemos que el coeficiente de crecimiento para poblaciones bajas de presa es 2 y la capacidad de soporte es también 2. En tal caso si $F = 0$, esperamos que cualquier población inicial no nula de presa tienda por último a 2.

Cuando tanto R como F son no nulas, la evolución de las dos poblaciones es más complicada. En la figura 2.6 trazamos tres curvas solución para $t \geq 0$. Observe que, en todos los casos, las soluciones tienden al punto de equilibrio A, que tiene coordenadas $(R, F) = (1.11, 0.74)$.

Una vez que tenemos la curva solución que corresponde a una condición inicial dada, conocemos las predicciones del modelo para la solución que cumple esta condición inicial. Por ejemplo, en la figura 2.6 vemos que la condición inicial B simboliza una sobreabundancia de depredadores y presas. Siguiendo la curva solución, observamos que al inicio la población depredadora crece, mientras que la especie presa declina hasta un número muy bajo; cuando esto ocurre, la población depredadora disminuye también por la

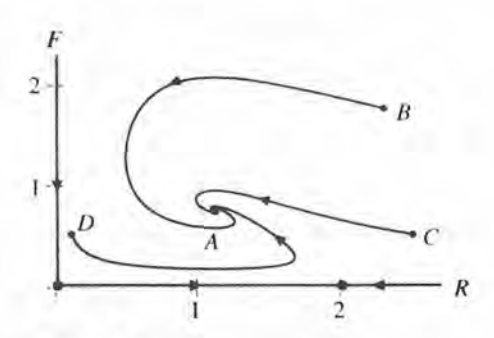


Figura 2.6
Los puntos de equilibrio y tres curvas solución para el modelo logístico depredador-presa.

falta de alimento y al final tiende al valor de equilibrio $F = 0.74$. Por otra parte, la población presa se recupera y estabiliza en el valor de equilibrio $R = 1.11$. Esta evolución de $R(t)$ y $F(t)$ es exactamente lo que vemos si trazamos las correspondientes gráficas de $R(t)$ y $F(t)$ (vea la figura 2.7).

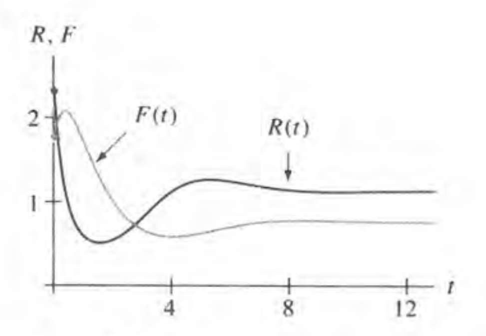


Figura 2.7
Las gráficas $R(t)$ y $F(t)$ para la curva solución B en la figura 2.6.

Las otras dos curvas solución que se muestran en la figura 2.6 pueden interpretarse de manera similar (vea las figuras 2.8 y 2.9). Note que las gráficas de $F(t)$ y $R(t)$ tienden a los valores de equilibrio $R = 1.11$ y $F = 0.74$. Podemos hacer esta predicción a partir de las curvas solución en el plano fase (vea la figura 2.6).

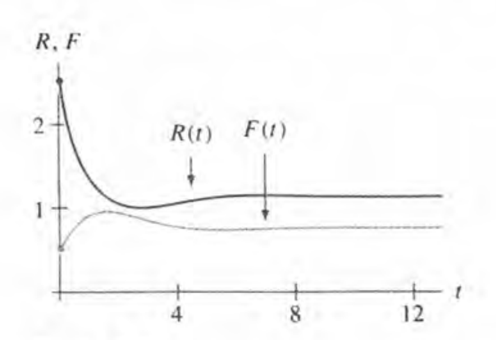


Figura 2.8
Las gráficas $R(t)$ y $F(t)$ para la curva solución C en la figura 2.6.

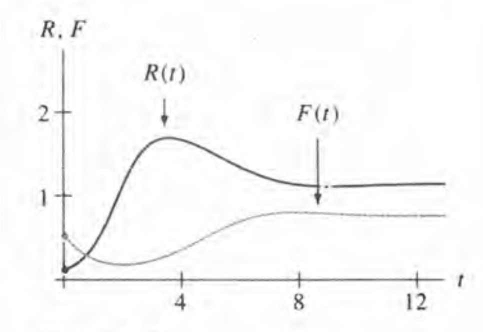


Figura 2.9
Las gráficas $R(t)$ y $F(t)$ para la curva solución D en la figura 2.6.

El movimiento de una masa unida a un resorte

A primera vista, el modelo estándar del movimiento de un sistema masa-resorte no amortiguado parece ser bastante diferente de los modelos de población que hemos analizado, pero hay algunas similitudes importantes en los modelos matemáticos correspondientes.

Consideremos una masa que está unida a un resorte y se desliza sobre una mesa sin fricción (vea la figura 2.10). Queremos calcular su movimiento horizontal cuando el re-

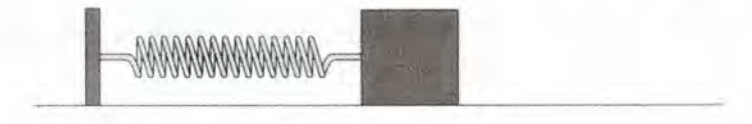


Figura 2.10
Un sistema masa-resorte.

sorte se estira (o comprime) y luego se libera. Para mantener el modelo tan simple como sea posible, suponemos que lo único que actúa sobre la masa es la fuerza del resorte. En particular, despreciamos la resistencia del aire y otras fuerzas que podrían amortiguar el movimiento de la masa.

Hay dos cantidades clave en este modelo: una que mide el desplazamiento de la masa desde su posición natural de reposo y la fuerza restauradora sobre la masa causada por el resorte. Deseamos determinar la posición de la masa en función del tiempo; sea entonces $y(t)$ la posición de la masa en el tiempo t. Es conveniente que $y = 0$ represente la posición de reposo de la masa (vea la figura 2.11). En la posición de reposo, el resorte no está estirado ni comprimido y tampoco ejerce ninguna fuerza sobre la masa. Adoptamos la convención de que $y(t) < 0$ si el resorte está comprimido y $y(t) > 0$ cuando está estirado, usando las unidades que sean convenientes (vea las figuras 2.11-2.13).

El concepto principal de física que requerimos para modelar este movimiento y obtener la ecuación diferencial es la segunda ley de Newton,

$$\text{Fuerza } F = \text{masa} \times \text{aceleración}.$$

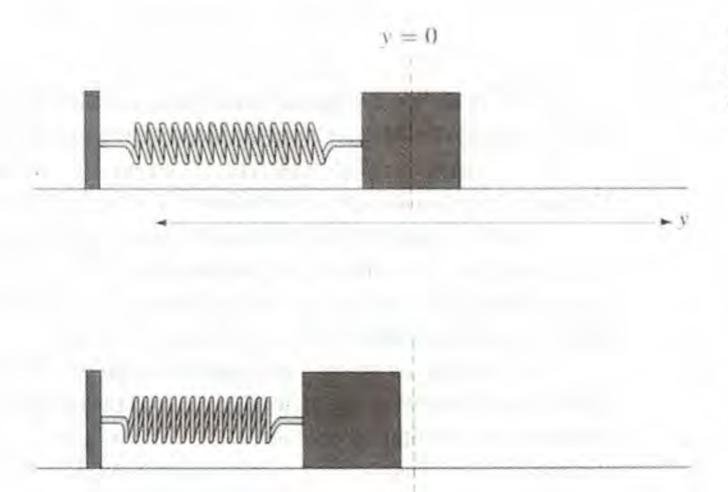


Figura 2.11
La posición de reposo de la masa, $y = 0$.

Figura 2.12
Una posición comprimida de la masa, $y < 0$.

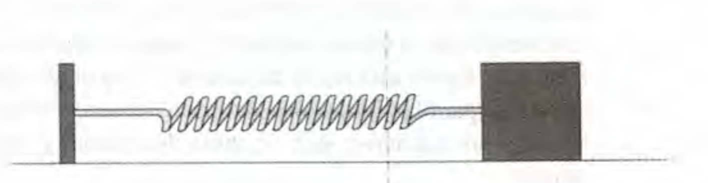


Figura 2.13
Una posición estirada de la masa, $y > 0$.

Como el desplazamiento es $y(t)$, la aceleración es d^2y/dt^2. Si m denota la masa, la ley de Newton se expresa como

$$F = m\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Para completar el modelo, debemos especificar una expresión que describa la fuerza que ejerce el resorte sobre la masa. Usamos la **ley de Hooke sobre los resortes** como nuestro modelo para la fuerza restauradora F_s del resorte:

> La fuerza restauradora ejercida por un resorte es linealmente proporcional al desplazamiento del resorte desde su posición de reposo y está dirigida hacia esa misma posición.

Por tanto, tenemos

$$F_s = -ky,$$

donde $k > 0$ es una constante de proporcionalidad llamada la **constante de resorte**, parámetro que podemos ajustar cambiando resortes. Combinando esta expresión para la fuerza con la ley de Newton, obtenemos la ecuación diferencial

$$F_s = -ky = m\frac{d^2y}{dt^2},$$

que modela el movimiento de la masa. Es común reescribirla en la forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0.$$

Es la ecuación diferencial para lo que suele llamarse un **oscilador armónico** simple (o sin amortiguamiento). Como contiene la segunda derivada de la variable dependiente y, es entonces una ecuación diferencial de **segundo orden**. Los coeficientes m y k son parámetros determinados por la masa y resorte particulares implicados.

Desde un punto de vista notacional, esta ecuación de segundo orden parece tener poco en común con los sistemas depredador-presa de primer orden que estudiamos antes en esta sección. En particular, porque incluye una sola variable dependiente e implica una segunda derivada en lugar de dos primeras derivadas.

Sin embargo, una vez que intentamos usar esta ecuación de segundo orden para describir el movimiento de un sistema particular masa-resorte, las similaridades comienzan a emerger. Por ejemplo, supongamos que queremos describir el movimiento de la masa. ¿Cuáles son las condiciones iniciales requeridas? Es cierto que necesitamos una condición inicial y_0 que corresponde al desplazamiento inicial de la masa, pero ¿y_0 sola determina el movimiento subsecuente de la masa? La respuesta es no, porque no podemos ignorar la velocidad inicial v_0 de la masa. Por ejemplo, el movimiento que resulta al extender el sistema masa-resorte una distancia de 1 pie y liberarlo es diferente que el que obtenemos al extenderlo (en la misma longitud) y luego empujarlo con una velocidad inicial de 1 pie-/segundo. Existe una teoría de existencia y unicidad para las soluciones de esta ecuación igual que para las ecuaciones de primer orden (vea la sección 2.4), y nos dice que necesitamos dos números, y_0 y v_0, para determinar el movimiento del oscilador armónico simple.

Ahora que la velocidad del movimiento ha sido identificada como una parte clave del modelo, estamos a sólo un paso de completar la analogía entre los sistemas de primer orden, como el sistema depredador-presa y las ecuaciones de segundo orden, y la ecuación para el oscilador armónico simple. Si $v(t)$ denota la velocidad de la masa en el tiempo t, sabemos que $v = dy/dt$. Por tanto, la aceleración d^2y/dt^2 es la derivada dv/dt de la velocidad y podemos reescribir nuestra ecuación de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}y$$

como

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}y.$$

En otras palabras, podemos reformar la ecuación como el sistema de primer orden

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}y.$$

Este procedimiento de reducir el orden del sistema incrementando el número de variables dependientes nos da dos maneras de representar el mismo modelo para el movimiento de la masa. Cada una tiene sus ventajas y desventajas. La representación del sistema masa-resorte como una ecuación de segundo orden con una variable es más conveniente para ciertos procedimientos analíticos, mientras que su modalidad como sistema de primer orden es mucho mejor para el análisis numérico y cualitativo.

Un problema de valor inicial

Para demostrar las relaciones entre esos dos puntos de vista, consideraremos un problema de valor inicial muy específico. Supongamos que m y k son constantes y suponiendo que $k/m = 1$. La ecuación de segundo orden se simplifica entonces a

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y.$$

En otras palabras, la segunda derivada de $y(t)$ es $-y(t)$. De inmediato recordamos dos funciones, seno y coseno. Como veremos en el capítulo 3, hay muchas otras funciones que también satisfacen esta ecuación diferencial, pero para los fines de este análisis nos centraremos en el problema de valor inicial $(y(0), v(0)) = (y_0, v_0) = (1, 0)$. En este caso, la función $y(t) = \cos t$ satisface esta condición inicial ya que $y(0) = \cos 0 = 1$ y $y'(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0$.

Si convertimos esta ecuación de segundo orden a una de primer orden donde $v = dy/dt$, obtenemos

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dy}{dt} = -y.$$

En este contexto, la misma condición inicial da una solución que consiste en el par de funciones $y(t) = \cos t$ y $v(t) = -\operatorname{sen} t$. Sus gráficas $y(t)$ y $v(t)$ se muestran en la figura 2.14.

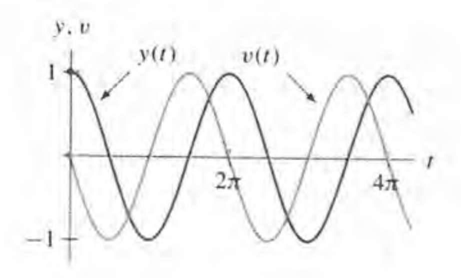


Figura 2.14
Gráficas de las soluciones $y(t)$ y $v(t)$ para el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad v(0) = 0.$$

En el plano fase y-v, la correspondiente curva solución es

$$(y(t), v(t)) = (\cos t, -\text{sen}\, t).$$

Con ayuda de la trigonometría vemos que

$$(y^2 + v^2 = (\cos t)^2 + (-\text{sen}\, t)^2 = 1,$$

y por tanto, esta curva barre el círculo unitario con centro en el origen. Debido al signo menos en $v(t) = -\text{sen}\, t$, el círculo unitario es barrido en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj (como lo indica la flecha sobre el círculo en la figura 2.15).

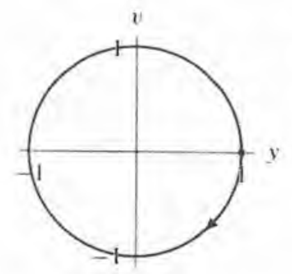


Figura 2.15
Gráfica de la curva solución en el plano fase yv para la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad v(0) = 0.$$

Las gráficas $y(t)$ y $v(t)$ (figura 2.14) o bien la parametrización del círculo unitario en el plano y-v (figura 2.15) indican que la solución es periódica, con $y(t)$ y $v(t)$ creciendo y decreciendo de manera alternada, y repite una y otra vez el mismo ciclo. La masa oscila para siempre de ida y vuelta a través de su posición de reposo, $y = 0$. Por supuesto, este fenómeno es posible sólo porque hemos despreciado el amortiguamiento.

Vistas juntas, las figuras 2.14 y 2.15 dan una imagen completa de la solución. Sería conveniente hacer una gráfica que incluyera toda la información contenida en las figuras 2.14 y 2.15. Tendría que ser tridimensional ya que tres importantes variables, t, y y v, están implicadas. Como estamos tan familiarizados con las funciones que aparecen en este ejemplo, podemos lograrlo con esta ecuación (vea la figura 2.16). Note que la figura 2.14 proviene de las proyecciones de la figura 2.16 sobre los planos t-y y t-v, y también es el reflejo de la figura 2.16 sobre el plano fase y-v.

El dibujo de esos tipos de figuras tridimensionales requiere considerable habilidad gráfica, aun cuando la solución $y(t)$ es la muy conocida función coseno. La interpretación de éstas requiere además una mayor habilidad de visualización. Por esto, en general evitamos las gráficas que implican las tres variables al mismo tiempo. Restringimos nuestra atención a las gráficas de las soluciones, es decir a las gráficas $y(t)$ y $v(t)$, y a la curva solución en el plano fase y-v.

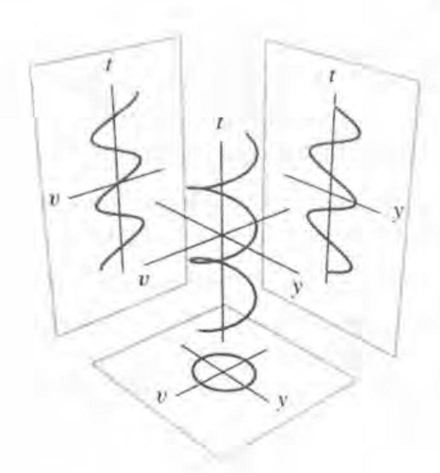


Figura 2.16
La gráfica de una solución de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$$

en el espacio tyv y sus proyecciones sobre los planos coordinados ty, tv y yv. Observe que la gráfica $y(t)$ es la gráfica de cos t, la de $v(t)$ corresponde a la gráfica de $-$sen t y la curva solución en el plano fase y-v es el círculo unitario.

El estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales

En el capítulo 1 aprendimos que hay tres maneras básicas de entender las soluciones de una ecuación diferencial: con el uso de procedimientos analíticos, geométricos (o cualitativos) y numéricos. En las tres secciones siguientes de este capítulo nos concentraremos en enfoques análogos para sistemas de ecuaciones de segundo orden. En la sección siguiente introduciremos la notación vectorial para proporcionar un enfoque analítico. En la sección 2.3 analizaremos procedimientos analíticos que pueden usarse para encontrar fórmulas explícitas para solucionar casos especiales, y en la sección 2.4 emplearemos la notación vectorial para generalizar el método de Euler.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 2.1

Los ejercicios 1-6 se refieren a los sistemas de ecuaciones siguientes:

(i)
$$\frac{dx}{dt} = 10x\left(1 - \frac{x}{10}\right) - 20xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -5y + \frac{xy}{20}$$

(ii)
$$\frac{dx}{dt} = 0.3x - \frac{xy}{100}$$
$$\frac{dy}{dt} = 15y\left(1 - \frac{y}{15}\right) + 25xy.$$

1. En uno de esos sistemas, las presas son animales muy grandes y los depredadores son animales muy pequeños, tales como elefantes y mosquitos. Se requieren entonces muchos de éstos para cazar una presa, pero cada animal devorado proporciona gran beneficio para la población depredadora. El otro sistema tiene depredadores muy grandes y presas muy pequeñas. Identifique cada sistema y dé una justificación para su respuesta.

2. Encuentre todos los puntos de equilibrio para los dos sistemas. Explique la importancia de esos puntos en términos de las poblaciones presa y depredadora.

3. Suponga que los depredadores están extintos en el tiempo $t_0 = 0$. Para cada sistema, compruebe que éstos permanecen extintos en todo tiempo.

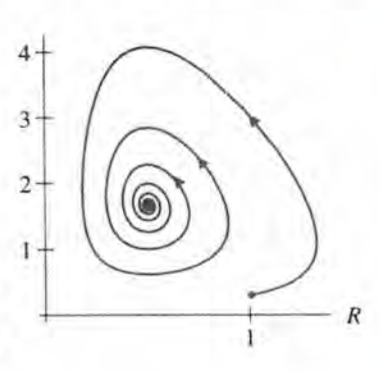
4. Para cada sistema, describa el comportamiento de la población presa si los depredadores están extintos. (Suponiendo que no hay depredadores, esboce la línea fase y también las gráficas para la población presa como función del tiempo para varias soluciones. Después interprételas para esta misma población.)

5. Para cada sistema, suponga que las presas están extintas en el tiempo $t_0 = 0$. Verifique que la extinción perdura todo tiempo.

6. Para cada sistema, describa el comportamiento de la población depredadora si las presas están extintas. (Tomando en cuenta la ausencia de presas, bosqueje la línea fase y también las gráficas de la población depredadora como función del tiempo para varias soluciones. Interprete luego esas gráficas para la población depredadora.)

7. Considere el sistema depredador-presa

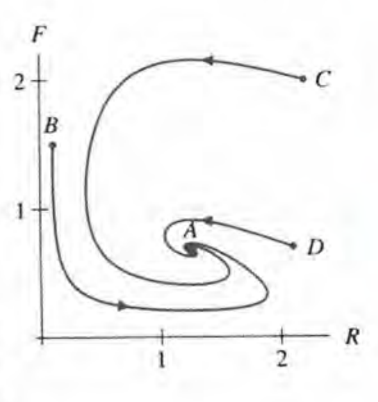
$$\frac{dR}{dt} = 2\left(1 - \frac{R}{3}\right)R - RF$$
$$\frac{dF}{dt} = -2F + 4RF.$$



La figura muestra una gráfica generada por computadora de una curva solución para este sistema en el plano R-F. ¿Qué puede predecir sobre el destino de las poblaciones presa (R) y depredador (F) con base en esta imagen?

8. Considere el sistema depredador-presa

$$\frac{dR}{dt} = 2R\left(1 - \frac{R}{2.5}\right) - 1.5RF$$
$$\frac{dF}{dt} = -F + 0.8RF$$



y las curvas solución en el plano fase en la figura.

(a) Esboce las gráficas $R(t)$ y $F(t)$ para las soluciones con puntos iniciales A, B, C y D.

(b) Interprete cada una de esas curvas solución en términos del comportamiento de las poblaciones en el tiempo.

Los ejercicios 9-14 se refieren a los sistemas depredador-presa anterior y modificado analizados en el texto (y revisados aquí por conveniencia):

(i)
$$\frac{dR}{dt} = 2R - 1.2RF$$
$$\frac{dF}{dt} = -F + 0.9RF$$

(ii)
$$\frac{dR}{dt} = 2R\left(1 - \frac{R}{2}\right) - 1.2RF$$
$$\frac{dF}{dt} = -F + 0.9RF.$$

9. ¿Cómo modificaría esos sistemas para incluir el efecto de la cacería de la presa a razón de α unidades de presa por unidad de tiempo?

10. ¿Qué cambiaría en esos sistemas para incluir el efecto de la cacería de los depredadores a una razón proporcional al número de depredadores?

11. Suponga que los depredadores descubren una segunda fuente ilimitada de comida, pero que aún prefieren comer presas cuando pueden capturarlas. ¿Cómo modificaría esos sistemas para incluir esta hipótesis?

12. Suponga que los depredadores encuentran una segunda fuente de comida pero limitada en magnitud. ¿Qué modificaciones haría en esos sistemas para incluir este hecho?

13. Suponga que los depredadores migran a un área en donde se quintuplica el número de ambas especies (es decir, $R > 5F$), y que se alejan de ella si la proporción es menos de cinco veces presas que depredadores. ¿Qué transformaciones haría en los sistemas para tomar esto en cuenta?

14. Suponga que las presas se alejan de un área a una razón proporcional al número de depredadores en el área. ¿Qué cambios requieren dichos sistemas para incluir esta consideración?

15. Considere los dos sistemas de ecuaciones diferenciales

(i)
$$\frac{dx}{dt} = 0.3x - 0.1xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -0.1y + 2xy$$

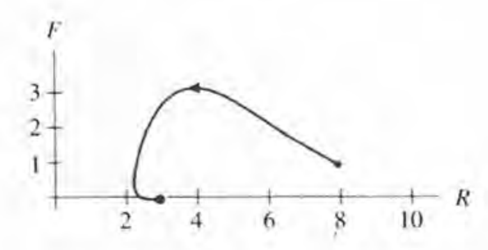
(ii)
$$\frac{dx}{dt} = 0.3x - 3xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -2y + 0.1xy.$$

Uno de esos sistemas se refiere a un sistema depredador-presa con depredadores muy letárgicos, es decir aquellos que rara vez capturan pero que pueden vivir durante largo tiempo con una sola presa (por ejemplo, la boa constrictora). El otro sistema se refiere a un cazador muy activo que requiere muchas presas para mantenerse en buen estado de salud (como un gato pequeño). La presa en cada caso es la misma. Identifique cada sistema y justifique su respuesta.

16. Considere el sistema de ecuaciones depredador-presa

$$\frac{dR}{dt} = 2\left(1 - \frac{R}{3}\right)R - RF$$
$$\frac{dF}{dt} = -16F + 4RF.$$

La figura muestra una gráfica generada por computadora de una curva solución para este sistema en el plano R-F. ¿Qué puede predecir acerca del destino de las poblaciones conejo R y zorro F con base en esta imagen?



17. Los pesticidas que matan a todas las especies de insectos no sólo son malos para el medio ambiente, sino también pueden ser eficientes en el control de las plagas. Suponga que una especie de plaga en un campo particular tiene población $R(t)$ en el tiempo t, y que su depredador principal es otra especie de insecto con población $F(t)$ en el tiempo t. Considere que las poblaciones de esas especies son modeladas precisamente por el sistema

$$\frac{dR}{dt} = 2R - 1.2RF$$
$$\frac{dF}{dt} = -F + 0.9RF$$

estudiado en esta sección. Por último, tome en cuenta que en el tiempo $t = 0$ se aplica un pesticida al campo que reduce ambas poblaciones a números muy pequeños pero no a cero.

(a) Usando las figuras 2.3 y 2.5, prediga qué pasará a la población plaga en el transcurso del tiempo.

(b) Escriba un corto ensayo, en lenguaje no técnico, advirtiendo sobre la posibilidad del "paradójico" efecto que la aplicación del pesticida puede tener en las poblaciones plaga.

18. Algunas especies de depredadores rara vez capturan presas adultas en buen estado de salud; más bien comen sólo las que están lastimadas o las débiles. Como éstas últimas consumen recursos pero no tienen mucho éxito en la reproducción, la dura realidad es que su captura incrementa la población presa. Comente cómo modificaría un sistema depredador-presa para modelar este tipo de interacción.

19. Considere el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$$

con $y(0) = 0$ y $y'(0) = v(0) = 1$.

(a) Demuestre que la función $y(t) = \text{sen}\, t$ es una solución de este problema de valor inicial.

(b) Trace la curva solución correspondiente a esta solución en el plano y-v.

(c) ¿Por qué diría usted que esta curva solución es la misma que se muestra en la figura 2.15?

(d) ¿Cuáles son las diferencias de esta curva con respecto a la de la figura 2.15?

20. Considere la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0$$

para el movimiento de un oscilador armónico simple.

(a) Considere la función $y(t) = \cos \beta t$. ¿Bajo qué condiciones de β es $y(t)$ una solución?

(b) ¿Cuál es el punto inicial en $t = 0$ que corresponde a esta solución?

(c) En términos de k y m, ¿cuál es el periodo de esta solución?

(d) Esboce la curva solución (en el plano y-v) asociada a esta solución. [*Sugerencia:* Considere la cantidad $y^2 + (v/\beta)^2$.]

21. Una masa con peso de 12 libras estira 3 pulgadas a un resorte. ¿Cuál es la constante para este resorte?

22. Una masa de 4 libras de peso estira 4 pulgadas a un resorte.

(a) Formule un problema de valor inicial que corresponda al movimiento de este sistema masa-resorte no amortiguado, si la masa se coloca a 1 pie de su posición de reposo y luego se suelta (sin velocidad inicial).

(b) Usando el resultado del ejercicio 20, encuentre la solución de este problema de valor inicial.

23. Los resortes en un colchón "extra firme", ¿tienen una constante de resorte grande o pequeña?

24. Considere un sistema masa-resorte como el mostrado en la figura siguiente.

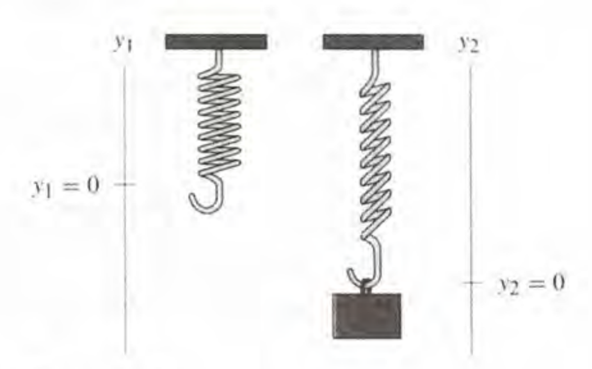


Figura 2.17
Sistema vertical masa-resorte.

Antes de colocar la masa en el extremo del resorte, éste tiene una longitud natural. Después de unir la masa al extremo del resorte, el sistema tiene una nueva posición de equilibrio, que corresponde al punto en que la fuerza sobre la masa debida a la gravedad, es igual a la fuerza sobre la masa debida al resorte.

(a) Suponiendo que las únicas fuerzas que actúan son la de gravedad y la del resorte, formule dos ecuaciones diferenciales distintas (pero relacionadas) de segundo orden que describan el movimiento de la masa. Para una ecuación, $y_1(t)$ es la posición medida desde el punto en el extremo del resorte cuando éste cuelga sin la masa. Para la otra, $y_2(t)$ es la posición medida desde el punto de equilibrio una vez que la masa se une al resorte.

(b) Reescriba esas dos ecuaciones de segundo orden como sistemas de primer orden y calcule sus puntos de equilibrio. Interprete sus resultados en términos del sistema masa-resorte.

(c) Dada una solución $y_1(t)$ de un sistema, ¿cómo puede obtener una solución $y_2(t)$ del segundo sistema?

(d) ¿Qué sistema coordinado, y_1 o y_2, prefiere? ¿Por qué?

Los ejercicios 25-30 se refieren a una situación que muestra similaridad con los modelos de población depredador-presa. Suponga que A y B representan dos sustancias que pueden combinarse para formar una nueva sustancia C (los químicos escriben $A + B \rightarrow C$). Tenemos un recipiente con una solución que contiene bajas concentraciones de las sustancias A y B, y las moléculas de A y B reaccionan sólo cuando entran en estrecho contacto entre sí. Si $a(t)$ y $b(t)$ representan la cantidad de A y B en la solución, respectivamente, entonces la probabilidad de que una molécula de A esté cercana a una de B en el tiempo t, es proporcional al producto $a(t) \cdot b(t)$. Por consiguiente, la razón de reacción de A y B para formar C es proporcional a ab. Suponga que C se precipita fuera de la solución tan pronto como se forma y que la solución está siempre bien mezclada.

25. Escriba un sistema de ecuaciones diferenciales que modele la evolución de $a(t)$ y $b(t)$. Identifique y describa cualesquiera parámetros que introduzca.

26. Describa el experimento que llevaría a cabo con el fin de encontrar un valor aproximado para el(los) parámetro(s) en el sistema que desarrolló en el ejercicio 25. Incluya los cálculos que efectuaría usando los datos de su experimento para determinar el(los) parámetro(s).

27. Digamos que las sustancias A y B se añaden a la solución a razones constantes (que pueden ser desiguales entre sí). ¿Cómo modificaría su sistema para incluir esta suposición?

28. Suponga que A y B se agregan a la solución a razones constantes (tal vez desiguales) y, en adición a la reacción $A + B \rightarrow C$, también puede ocurrir otra reacción $A + A \rightarrow D$ cuando dos moléculas de A están cercanas entre sí y la sustancia D se precipita fuera de la solución. ¿Cómo modificaría su sistema de ecuaciones para incluir esas hipótesis?

29. Considere que A y B están siendo añadidas a la solución a razones constantes (tal vez desiguales) y, aparte de la reacción $A + B \rightarrow C$, puede generarse otra reacción $B + B \rightarrow A$ cuando dos moléculas de B están cercanas entre sí. ¿Qué cambio operaría en su sistema de ecuaciones para incluir esos planteamientos?

30. Suponga que A y B se incorporan a la solución a razones constantes (tal vez desiguales) y, además de la reacción $A + B \rightarrow C$, puede ocurrir la reacción $A + 2B \rightarrow D$ cuando dos moléculas de B y una molécula A están próximas. Tome en cuenta que la sustancia D se precipita fuera de la solución. ¿Cómo modificaría su sistema de ecuaciones para incluir esas hipótesis?

2.2 GEOMETRÍA DE SISTEMAS

En la sección 2.1 exhibimos las gráficas $R(t)$ y $F(t)$ de soluciones de dos sistemas diferentes depredador-presa, pero no describimos cómo las generamos. Responderemos esta pregunta al finalizar la sección 2.4, en la que generalizaremos el método de Euler para producir aproximaciones numéricas a soluciones de sistemas. Sin embargo, primero debemos presentar la notación vectorial. Ésta proporciona una conveniente taquigrafía para escribir sistemas de ecuaciones diferenciales, pero también es importante por una razón fundamental. Usando vectores construimos una representación geométrica de un sistema de ecuaciones diferenciales. Como vimos cuando usamos campos de pendientes en el capítulo 1, la representación geométrica de una ecuación diferencial nos permite entender las soluciones correspondientes.

El campo vectorial depredador-presa

Recuerde que el sistema depredador-presa

$$\frac{dR}{dt} = 2R - 1.2RF$$
$$\frac{dF}{dt} = -F + 0.9RF$$

modela la evolución de dos poblaciones, R y F, en el tiempo. En la sección previa estudiamos dos maneras diferentes (pero relacionadas) de visualizar este cambio. Podemos trazar las gráficas de $R(t)$ y $F(t)$ como funciones de t o la curva solución $(R(t), F(t))$ en el plano R-F. Aunque podemos concebir $(R(t), F(t))$ simplemente como una combinación de las dos funciones escalares $R(t)$ y $F(t)$, se tendrán ventajas si consideramos un enfoque diferente. Tomemos el par $(R(t), F(t))$ como una función vectorial en el plano R-F.

Para cada t, $\mathbf{P}(t)$ denota el vector

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} R(t) \\ F(t) \end{pmatrix}.$$

La función vectorial $\mathbf{P}(t)$ corresponde entonces a la curva solución $(R(t), F(t))$ en el plano R-F.

Para calcular la derivada de la función vectorial $\mathbf{P}(t)$, determinamos las derivadas de cada componente. Es decir,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dR}{dt} \\ \dfrac{dF}{dt} \end{pmatrix}.$$

Usando esta notación, podemos reescribir el sistema depredador-presa como la ecuación vectorial

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dR}{dt} \\ \dfrac{dF}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2R - 1.2RF \\ -F + 0.9RF \end{pmatrix}.$$

Hasta ahora sólo hemos introducido más notaciones. Convertimos nuestro sistema de primer orden, que consiste en dos ecuaciones escalares, en una sola ecuación vectorial que contiene vectores con dos componentes.

Las ventajas de la notación vectorial comienzan a ser evidentes una vez que consideramos el lado derecho de este sistema como un *campo vectorial*. El lado derecho del sistema depredador-presa es una función que asigna un vector a cada punto en el plano R-F. Si denotamos esta función usando el vector $\mathbf{V}$, tenemos

$$\mathbf{V}\begin{pmatrix} R \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2R - 1.2RF \\ -F + 0.9RF \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, en el punto $(R, F) = (2, 1)$,

$$\mathbf{V}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(2) - 1.2(2)(1) \\ -(1) + 0.9(2)(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}.$$

Para ahorrar papel, a veces escribimos los vectores verticalmente (como vectores "columna") y en otras ocasiones de manera horizontal (como vectores "fila"). En cualquier caso, siempre escribimos los vectores en negritas para distinguirlos de los escalares. Escrito como un vector fila, el campo vectorial depredador-presa se expresa

$$\mathbf{V}(R, F) = (2R - 1.2RF, -F + 0.9RF),$$

y $\mathbf{V}(2, 1) = (1.6, 0.8)$.

En el cálculo previo no había nada especial acerca del punto $(R, F) = (2, 1)$. De manera similar, tenemos $\mathbf{V}(1, 1) = (0.8, -0.1)$, $\mathbf{V}(0.5, 2.2) = (-0.32, -1.21)$, etc. La función $\mathbf{V}(R, F)$ puede evaluarse en cualquier punto del plano R-F.

El uso de vectores nos permite simplificar considerablemente la notación. Ahora podemos escribir el sistema depredador-presa de manera abreviada

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{P}).$$

Pero la notación vectorial es algo más que una manera de ahorrar tinta. Nos da también una nueva manera de pensar y visualizar los sistemas de ecuaciones diferenciales. Podemos bosquejar el campo vectorial $\mathbf{V}$ uniendo el vector $\mathbf{V}(\mathbf{P})$ al punto correspondiente $(\mathbf{P})$ en el plano. Calcular $\mathbf{V}(\mathbf{P})$ para muchos valores diferentes de $\mathbf{P}$ y graficarlos suele resultar tedioso pero es justamente el tipo de trabajo para el que son muy buenas las computadoras y las calculadoras. En la figura 2.18 se muestran unos cuantos vectores del campo vectorial $\mathbf{V}$ depredador-presa. En general, lo visualizamos como un "campo" de flechas, una en cada punto del plano R-F.

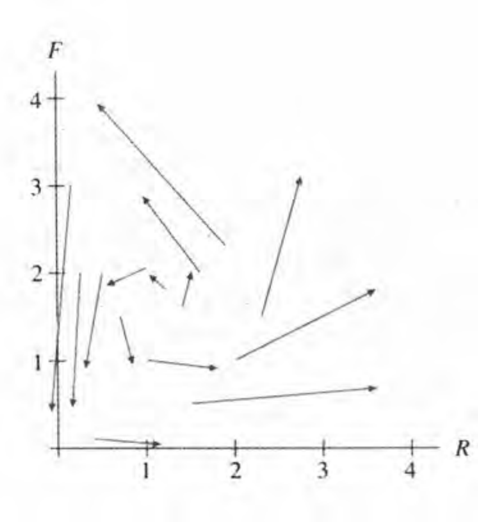


Figura 2.18
Vectores seleccionados en el campo vectorial $\mathbf{V}(R, F)$ para las ecuaciones depredador-presa

$$\frac{dR}{dt} = 2R - 1.2RF$$
$$\frac{dF}{dt} = -F + 0.9RF.$$

En cada punto (R, F), el vector $\mathbf{V}(R, F)$ se dibuja comenzando en (R, F).

El campo vectorial de un oscilador armónico simple

En la sección 2.1 modelamos el movimiento de un sistema masa-resorte no amortiguado por medio de una ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0,$$

donde k es la constante del resorte y m es la masa. Vimos también que este sistema masa-resorte puede escribirse como el sistema de primer orden

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}y,$$

donde $v = dy/dt$ es la velocidad de la masa.

En el caso especial en que $k/m = 1$, obtuvimos el bonito sistema

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -y.$$

Una razón por la que este sistema tiene tan buen aspecto es que su campo vectorial $\mathbf{F}(y, v) = (v, -y)$ en el plano y-v es fácil de entender. Después de trazar unos cuantos vectores en el campo vectorial, es natural preguntarse si todos son tangentes a círculos con centro en el origen, y de hecho lo son (vea la figura 2.19 y el ejercicio 32.)

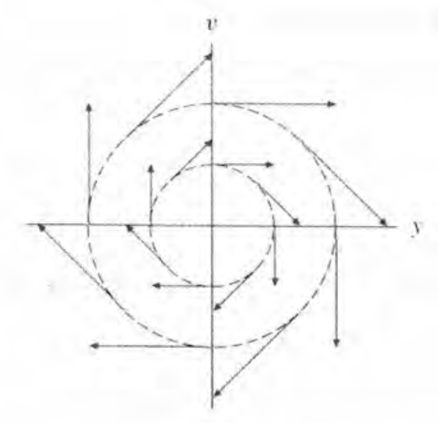


Figura 2.19
Vectores seleccionados en el campo vectorial $\mathbf{F}(y, v) = (v, -y)$. Note que todos son tangentes a círculos con centro en el origen.

Aunque las computadoras pueden eliminar el tedio del proceso de trazar los campos vectoriales, hay un aspecto que los hace mucho más difíciles de graficar que a los campos de pendientes. Por definición, los vectores en un campo vectorial tienen varias longitudes determinadas por el sistema de ecuaciones; algunos pueden ser muy cortos y otros muy largos. Por tanto, si graficamos un campo vectorial evaluándolo sobre una red regular en el plano, a menudo obtenemos vectores que se traslapan. Por ejemplo, la figura 2.20

es una gráfica del campo vectorial $\mathbf{F}(y, v) = (v, -y)$ para el oscilador armónico simple. No tenemos que tomar muchos puntos antes de terminar con una imagen que es básicamente de utilidad nula.

Para evitar la confusión de los vectores traslapados en nuestras imágenes de campos vectoriales, con frecuencia escalamos los vectores de manera que todos ellos tengan la misma longitud (cortos). La imagen resultante se llama el **campo de direcciones** asociado con el campo vectorial original. La figura 2.21 es una gráfica que representa la asociación de estos campos para un oscilador armónico simple $\mathbf{F}(y, v) = (v, -y)$.

Aunque el campo de direcciones da una imagen que es mucho más fácil de visualizar que el campo vectorial, se tiene alguna pérdida de información. Las longitudes de un vector en el campo vectorial dan la rapidez de la solución cuando ésta pasa por el punto asociado en el plano. En el campo de direcciones se pierde toda la información acerca de la rapidez de la solución. Pero debido a las ventajas artísticas de usar el campo de direcciones, casi siempre estamos dispuestos a aceptar esta pérdida.

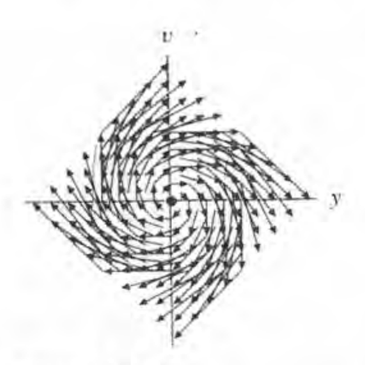


Figura 2.20
Campo vectorial para $\mathbf{F}(y, v) = (v, -y)$.

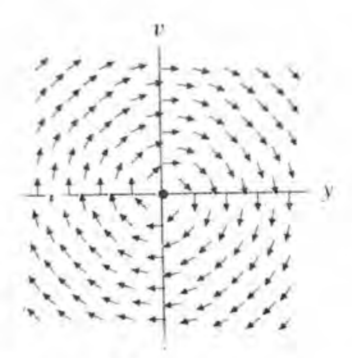


Figura 2.21
Campo de direcciones para $\mathbf{F}(y, v) = (v, -y)$.

Ejemplos de sistemas y campos vectoriales

En general, para un sistema con dos variables dependientes de la forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x, y),$$

introducimos el vector $\mathbf{Y}(t) = (x(t), y(t))$ y el **campo vectorial**

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y}) = \mathbf{F}(x, y) = (f(x, y), g(x, y)).$$

Con esta notación, el sistema de dos ecuaciones puede escribirse en la forma compacta

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}),$$

o aún más reducida como

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}).$$

Ejemplos elementales (pero importantes)

El sistema

$$\frac{dx}{dt} = x$$
$$\frac{dy}{dt} = y$$

da el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$, y los vectores dentro de él siempre señalan directamente alejándose del origen (vea la figura 2.22). Por otra parte, el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -x$$
$$\frac{dy}{dt} = -y$$

proporciona el campo vectorial $\mathbf{G}(x, y) = (-x, -y)$, y sus vectores apuntan hacia el origen (vea la figura 2.23).

En el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -x$$
$$\frac{dy}{dt} = -2y$$

también los vectores del campo $\mathbf{H}(x, y) = (-x, -2y)$ señalan (más o menos) hacia el origen (vea la figura 2.24). Veremos pronto que un ojo entrenado puede distinguir diferencias importantes entre los campos vectoriales $\mathbf{G}(x, y)$ en la figura 2.23 y $\mathbf{H}(x, y)$ en la figura 2.24.

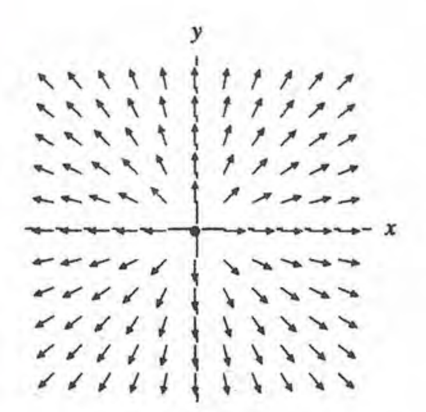


Figura 2.22
Campo de direcciones para $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$.

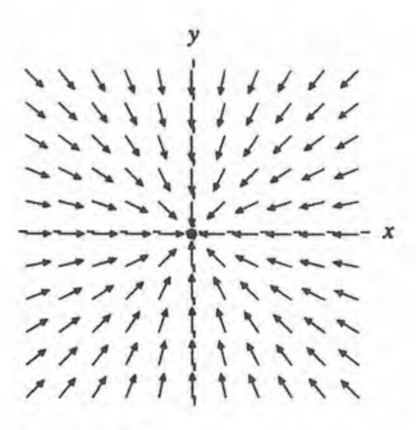


Figura 2.23
Campo de direcciones para $\mathbf{G}(x, y) = (-x, -y)$.

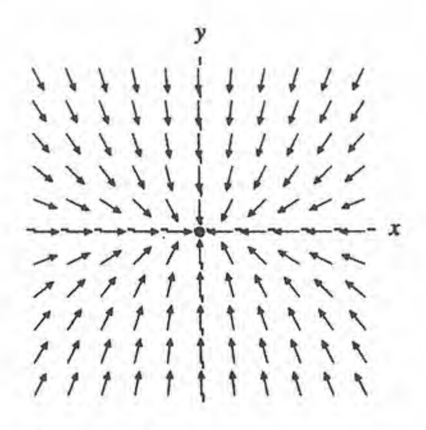


Figura 2.24
Campo de direcciones para $\mathbf{H}(x, y) = (-x, -2y)$.

La geometría de soluciones

Podemos considerar la imagen de un campo de direcciones o vectorial como la representación de un sistema de ecuaciones diferenciales y emplearla para esbozar las curvas solución. Para ser más precisos, consideremos un sistema de la forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x, y).$$

Como hemos visto, este sistema genera el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$. Haciendo $\mathbf{Y}(t) = (x(t), y(t))$, el sistema puede escribirse en términos de la ecuación vectorial

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}).$$

Desde el punto de vista de la geometría, la interpretación de esta ecuación vectorial es la clave para entender este sistema de ecuaciones diferenciales. Si vemos una solución $\mathbf{Y}(t) = (x(t), y(t))$ como una parametrización de una curva en el plano x-y, entonces $d\mathbf{Y}/dt$ provee los vectores tangentes de la curva. Por tanto, la ecuación $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{F}(\mathbf{Y})$ expresa que los vectores tangentes para las curvas solución están determinados por los que se encuentran dentro del campo vectorial.

Una consecuencia de esta interpretación geométrica es que podemos pasar directamente de un croquis de un campo vectorial $\mathbf{F}$ (o su campo de direcciones) al de las curvas solución de la ecuación $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{F}(\mathbf{Y})$ aun sin conocer una fórmula para $\mathbf{F}$ (vea las figuras 2.25 y 2.26).

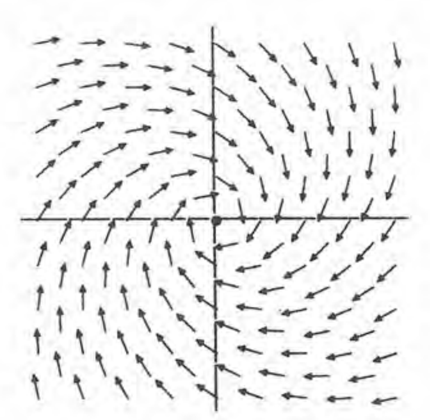


Figura 2.25
Un campo de dirección en espiral alrededor del origen.

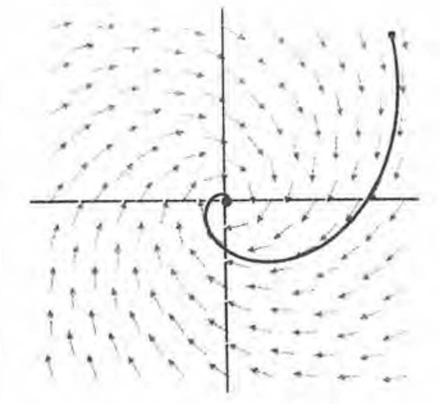


Figura 2.26
Una curva solución para la solución correspondiente a la condición inicial indicada.

Metáfora del parque de estacionamiento

Para ayudar en la visualización de las curvas solución de un sistema desde este punto de vista, imagine un parque de estacionamiento infinito, perfectamente plano. En cada pun-

to del estacionamiento, se pinta una flecha sobre el pavimento. Esas flechas se derivan del campo vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{Y})$. Conforme conduce usted por el estacionamiento, sus instrucciones son ver hacia el pavimento a través de la ventana y conducir de tal manera que su vector velocidad siempre concuerde con la flecha en el terreno. (Usted es un conductor profesional en un estacionamiento cerrado.) Maneje su vehículo siguiendo la dirección de la flecha y tan rápido como lo indique la longitud del vector. La flecha fuera de su ventana cambia, por lo que debe ajustar consecuentemente la rapidez y dirección del vehículo. La trayectoria que sigue es la curva solución asociada con una solución del sistema. De hecho, como lo veremos pronto, puede emplear esta misma idea para esbozar las curvas solución de un sistema usando sólo esta interpretación del campo vectorial.

Una curva solución del oscilador armónico

Por ejemplo, en la sección 2.1 vimos que las funciones $y(t) = \cos t$ y $v(t) = -\text{sen}\, t$, satisfacen el sistema del oscilador armónico simple

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -y.$$

Como $y^2 + v^2 = 1$, sabemos que la función vectorial

$$\mathbf{Y}(t) = (y(t), v(t)) = (\cos t, -\text{sen}\, t)$$

barre el círculo unitario con centro en el origen del plano y-v en sentido de las manecillas del reloj. Como vemos en la figura 2.27, los vectores velocidad para este movimiento concuerdan precisamente con los del campo vectorial $\mathbf{F}(y, v) = (v, -y)$.

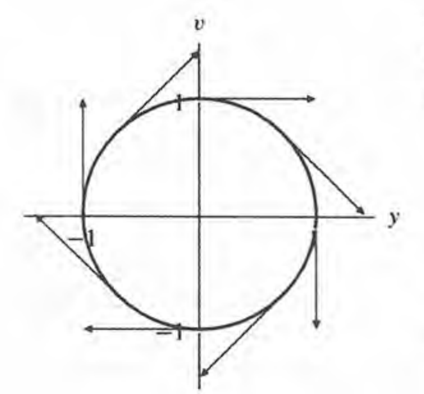


Figura 2.27
El círculo unitario en el plano y-v es una curva solución para el sistema

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -y.$$

Recuerde que los vectores en este campo vectorial son siempre tangentes a círculos con centro en el origen.

Una curva solución para un sistema depredador-presa

En la sección 2.1 graficamos la curva solución del sistema

$$\frac{dR}{dt} = 2R - 1.2RF$$
$$\frac{dF}{dt} = -F + 0.9RF$$

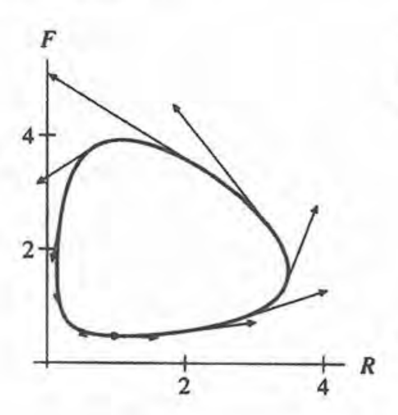


Figura 2.28
La curva solución correspondiente a la solución del sistema depredador-presa

$$\frac{dR}{dt} = 2R - 1.2RF$$
$$\frac{dF}{dt} = -F + 0.9RF$$

con la condición inicial $(R_0, F_0) = (1, 0.5)$, junto con vectores del campo vectorial depredador-presa.

correspondiente a la condición inicial $(R_0, F_0) = (1, 0.5)$. En la figura 2.28 se observa la relación entre la curva solución y los vectores en el campo vectorial.

Soluciones de equilibrio

Así como hay puntos especiales, o equilibrio, sobre la línea fase, hay puntos distinguidos en el plano fase de sistemas de la forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x, y).$$

Esos puntos también corresponden a soluciones constantes.

DEFINICIÓN El punto $\mathbf{Y}_0$ es un **punto de equilibrio** para el sistema $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{F}(\mathbf{Y})$ si $\mathbf{F}(\mathbf{Y}_0) = \mathbf{0}$. La función constante $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}_0$ es una **solución de equilibrio.** ■

Los puntos de equilibrio son simplemente puntos en los que el lado derecho del sistema desaparece. Si $\mathbf{Y}_0$ es un punto de equilibrio, entonces la función constante

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}_0 \text{ para toda } t$$

es una solución del sistema. Para comprobarlo, notamos que la función constante tiene $d\mathbf{Y}/dt = (0, 0)$ para toda t. Por otra parte, $\mathbf{F}(\mathbf{Y}(t)) = \mathbf{F}(\mathbf{Y}_0) = (0, 0)$ en un punto de equilibrio. Por consiguiente, los puntos de equilibrio en el campo vectorial corresponden a soluciones constantes.

Cálculo de puntos de equilibrio

El sistema

$$\frac{dx}{dt} = 3x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = x - y$$

tiene sólo un punto de equilibrio que es el origen (0, 0). Para ver por qué ocurre, resolvemos las dos ecuaciones simultáneas

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x - y = 0, \end{cases}$$

que están dadas por el lado derecho del sistema. (Sume la primera ecuación a la segunda para verificar que $x = 0$, luego use cualquier ecuación para concluir que $y = 0$.) Si nos fijamos en el campo vectorial de este sistema, observamos que los vectores cercanos al origen son relativamente cortos (vea la figura 2.29). Así entonces, las curvas solución se mueven lentamente al pasar cerca del origen. Aunque por definición todos los vectores no nulos en el campo de direcciones son de la misma longitud, podemos atrevernos a afirmar que existe un punto de equilibrio en el origen debido a que las trayectorias de los vectores en el campo de direcciones cambian radicalmente cerca del origen (0, 0) (vea la figura 2.30).

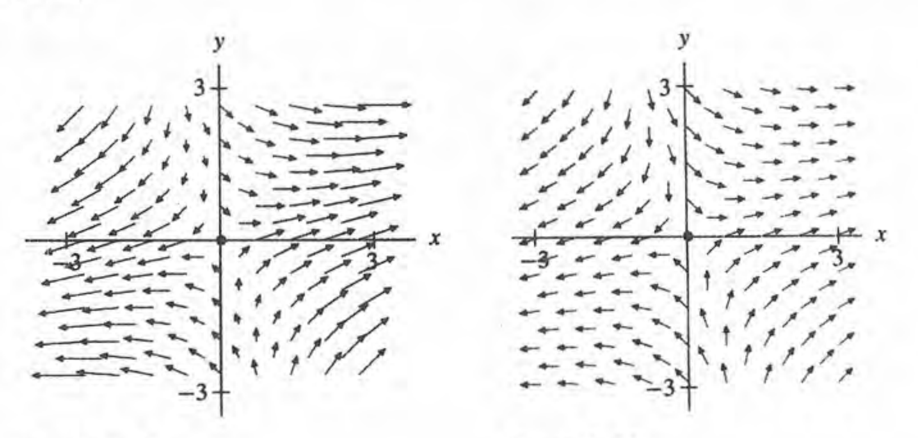


Figura 2.29
Campo vectorial.

Figura 2.30
Campo de direcciones.

A medida que una solución se acerca al punto de equilibrio, dx/dt y dy/dt se aproximan a cero. Por lo tanto, las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ se vuelven más planas sobre el intervalo correspondiente (vea la figura 2.31).

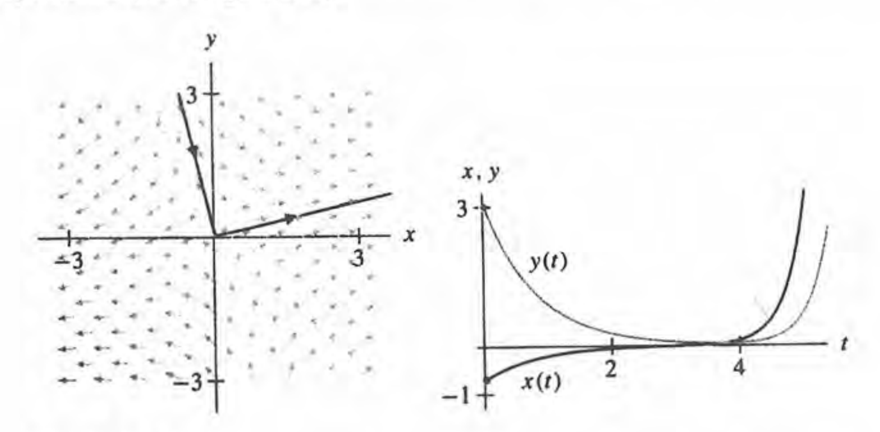


Figura 2.31
Conforme una curva solución se desplaza cerca de un punto de equilibrio, las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ son casi planas.

Un modelo de población para dos especies en competencia

Para ilustrar todos los conceptos presentados en esta sección, concluiremos con un análisis del sistema

$$\frac{dx}{dt} = 2x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 3y\left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy.$$

Consideramos que x y y representan las poblaciones de dos especies que compiten por el mismo recurso. Note que cada especie evoluciona por sí misma, de acuerdo con un modelo de crecimiento logístico de población. La interacción de las dos especies es modelada por los términos xy en ambas ecuaciones. Por ejemplo, el efecto de la población y, sobre la razón de cambio de x, está determinado por el término $-xy$ en la ecuación dx/dt. Este término es negativo ya que estamos suponiendo que las dos especies compiten por los mismos recursos. De manera similar, $-2xy$ define el efecto de la población x sobre la razón de cambio de y. Como x y y representan poblaciones, centraremos nuestra atención en las soluciones cuyas condiciones iniciales se encuentren en el primer cuadrante.

Localización de los puntos de equilibrio

Primero encontramos los puntos de equilibrio igualando a cero los lados derechos de las ecuaciones diferenciales y despejando x y y en los sistemas de ecuaciones resultantes

$$\begin{cases} 2x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy = 0 \\ 3y\left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy = 0. \end{cases}$$

Esas ecuaciones pueden reescribirse en la forma

$$\begin{cases} x(2 - x - y) = 0 \\ y(3 - y - 2x) = 0. \end{cases}$$

La primera ecuación se cumple si $x = 0$ o si $2 - x - y = 0$, y la segunda ecuación se satisface si $y = 0$ o $3 - y - 2x = 0$.

Supongamos primero que $x = 0$. La ecuación $y = 0$ proporciona entonces un punto de equilibrio en el origen, y la ecuación $3 - y - 2x = 0$ lo da en $(0, 3)$.

Digamos ahora que $2 - x - y = 0$. La ecuación $y = 0$ genera entonces un punto de equilibrio en $(2, 0)$, y $3 - y - 2x = 0$ da un punto de equilibrio en $(1, 1)$. (Resuelva el sistema de ecuaciones sumultáneas $2 - x - y = 0$ y $3 - y - 2x = 0$.) Los puntos de equilibrio resultantes son $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(2, 0)$ y $(1, 1)$.

Esbozo del retrato fase

A continuación usamos el campo de direcciones para esbozar curvas solución. Para obtener un buen bosquejo del retrato fase, debemos escoger suficientes soluciones para ver todos los tipos diferentes de curvas, pero no tantas que el dibujo se vuelva confuso (vea la figura 2.32). Es aconsejable hacerlo con ayuda de una computadora o una calculadora; en la sección 2.4 generalizaremos el método de Euler para aproximar numéricamente curvas solución. Note que el retrato fase para este modelo de especies en competencia sugiere que en la mayor parte de las condiciones iniciales, una u otra de las especies muere y la población que sobrevive se estabiliza.

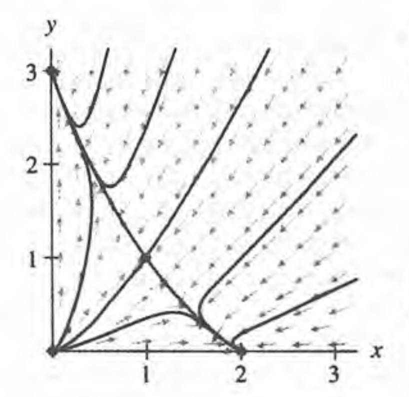


Figura 2.32
Campo de direcciones y retrato fase para el modelo de las especies en competencia

$$\frac{dx}{dt} = 2x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 3y\left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy.$$

Note que este retrato fase sugiere que para la mayor parte de las condiciones iniciales, una u otra especie muere y que la población sobreviviente se estabiliza.

Tal como lo hicimos en el capítulo 1, cuando comenzamos a delinear los campos de pendientes y las gráficas de soluciones, deberíamos ahora reflexionar y preguntarnos si estas aproximaciones representan el verdadero comportamiento de las soluciones. Por ejemplo, ¿cómo sabemos que las curvas solución localizadas en el plano fase no se cortan o se tocan? Igual que en el capítulo 1, la respuesta se deriva de un poderoso teorema relativo a la unicidad de las soluciones. Estudiaremos este teorema en la sección 2.4.

Gráficas $x(t)$ y $y(t)$

Como estudiamos en la sección 2.1, el retrato fase es sólo una manera de visualizar las soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales, pero no encontraremos la información suficiente para resolver un problema específico. En particular, cuando observamos un dibujo de una curva solución en el plano fase, no vemos la variable tiempo, por lo que no sabemos qué tan rápido recorre la curva la solución. La mejor manera de obtener información sobre esta variable es tomar el "tiempo real" en que una computadora traza la curva solución. Otra posibilidad es dar la solución en el plano fase, junto con las gráficas $x(t)$ y $y(t)$.

En la figura 2.33 vemos las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ para dos soluciones del modelo de especies en competencia. Para una condición inicial la población y está esencialmente extinta después de $t = 8$, pero para la otra condición la población x no muere, por lo menos hasta $t = 15$.

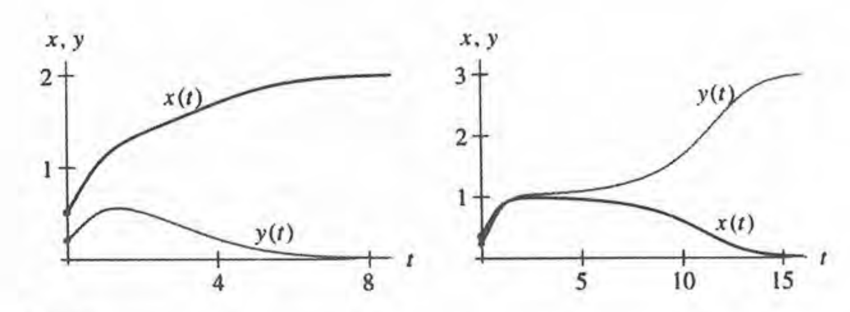


Figura 2.33
Las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ para dos soluciones con condiciones iniciales cercanas. Observe que ilustran de manera muy clara comportamientos diferentes a largo plazo.

Aun cuando las curvas solución y las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ exhiben información diferente sobre las soluciones, es importante conectar las dos representaciones diferentes. Dos curvas solución que se derivan de esas condiciones iniciales particulares se muestran en la figura 2.34. De la curva correspondiente a la condición inicial a la derecha, podemos concluir que la solución tiende al punto de equilibrio (2, 0). De manera específica, para esta condición la población y se extingue. La solución para la condición inicial a la izquierda tiende al punto de equilibrio (0, 3), por lo que la población x desaparece. Ya observamos el mismo comportamiento a largo plazo cuando trazamos las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ (vea la figura 2.33).

En el plano fase también notamos que la curva solución para la condición inicial a la izquierda cruza la línea $y = x$. En otras palabras, a partir de esa curva podemos ver que en el retrato fase hay un tiempo t en el que las dos poblaciones son iguales. Sin embargo, para determinar ese intervalo particular debemos consultar las gráficas correspondientes $x(t)$ y $y(t)$. Del mismo modo, para la otra condición inicial, sabemos que la población x es siempre mayor que la población y.

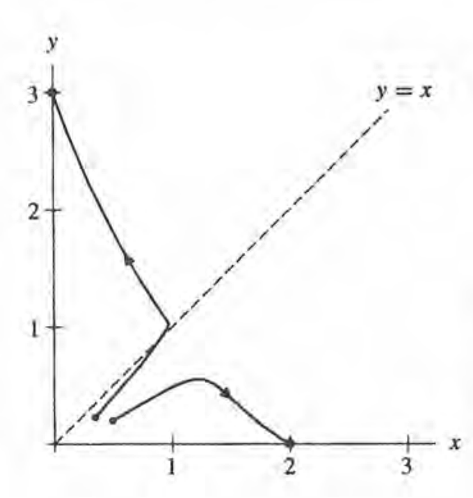


Figura 2.34
Dos curvas solución para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = 2x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 3y\left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy.$$

Esas curvas corresponden a soluciones con condiciones iniciales cercanas. El comportamiento a largo plazo de ambas también está ilustrado en la figura 2.33.

Consideraciones cualitativas

En todos los sistemas considerados hasta ahora, la variable independiente no ha aparecido en el lado derecho. Los sistemas con esta propiedad se llaman **autónomos**. La palabra *autónomo* significa autogobernante y un sistema autónomo es autogobernante, porque evoluciona de acuerdo con ecuaciones diferenciales que están determinadas enteramente por los valores de las variables dependientes. Una consecuencia geométrica importante es que el campo vectorial asociado con un sistema autónomo sólo está supeditado a las variables dependientes. Por lo tanto, no tenemos que considerar la variable independiente al esbozar el campo vectorial (o el campo de direcciones), las curvas solución y el retrato fase.

Aunque continuaremos enfocados en los sistemas autónomos por el resto de este capítulo y en el siguiente, muchos sistemas importantes no son autónomos. A estos últimos los estudiaremos por primera vez en el capítulo 4. En las dos secciones siguientes de este capítulo, complementamos el enfoque geométrico presentado aquí con los métodos analíticos y numéricos.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 2.2

En los ejercicios 1-6,

(a) determine el campo vectorial asociado con el sistema de primer orden especificado,

(b) muestre suficientes vectores en el campo vectorial para tener una idea de su estructura geométrica,

(c) esboce un campo de direcciones asociado, y

(d) haga un croquis aproximado del retrato fase del sistema.

1. $\dfrac{dx}{dt} = 1$, $\dfrac{dy}{dt} = 0$

2. $\dfrac{dx}{dt} = x$, $\dfrac{dy}{dt} = 1$

3. $\dfrac{dy}{dt} = -v$, $\dfrac{dv}{dt} = y$

4. $\dfrac{du}{dt} = u - 1$, $\dfrac{dv}{dt} = v - 1$

5. $\dfrac{dx}{dt} = x$, $\dfrac{dy}{dt} = -y$

6. $\dfrac{dx}{dt} = x$, $\dfrac{dy}{dt} = 2y$

7. Convierta la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0$$

en un sistema de primer orden en términos de y y v, donde $v = dy/dt$, y

(a) determine el campo vectorial asociado con el sistema de primer orden,

(b) dibuje suficientes vectores en el campo vectorial para tener una idea de su estructura geométrica,

(c) esboce un campo de direcciones asociado, y

(d) haga un croquis del retrato fase del sistema.

8. Convierta la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = 0$$

en un sistema de primer orden en términos de y y v, donde $v = dy/dt$, y

(a) determine el campo vectorial asociado con el sistema de primer orden,

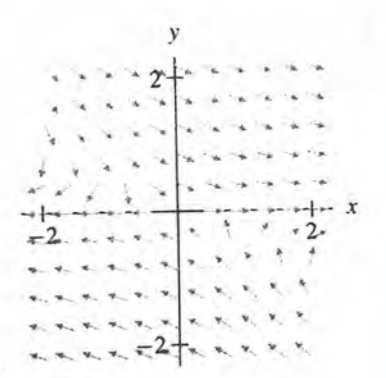
(b) esboce suficientes vectores en el campo vectorial para tener una idea de su estructura geométrica,

(c) bosqueje un campo de direcciones asociado, y

(d) haga un croquis aproximado del retrato fase del sistema.

9. Considere el sistema

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y$$
$$\frac{dy}{dt} = -y$$



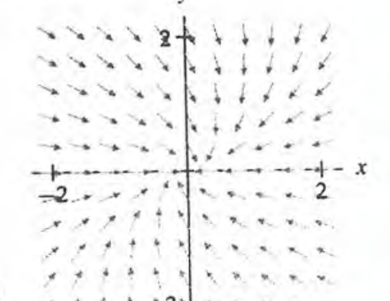
y su campo de direcciones correspondiente.

(a) Dibuje varias curvas solución diferentes sobre el plano fase.

(b) Describa el comportamiento de la solución que satisface la condición inicial $(x_0, y_0) = (-2, 2)$.

10. Considere el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -2x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = -2y$$



y el campo de direcciones correspondiente.

(a) Trace varias curvas solución diferentes sobre el plano fase.

(b) Describa el comportamiento de la solución que satisface la condición inicial $(x_0, y_0) = (0, 2)$.

En los ejercicios 11-16,

(a) encuentre los puntos de equilibrio del sistema,

(b) usando una computadora o calculadora, esboce el campo de direcciones del sistema, y

(c) usando el campo de direcciones, bosqueje el retrato fase para el sistema.

11.
$$\frac{dx}{dt} = 4x - 7y + 2$$
$$\frac{dy}{dt} = 3x + 6y - 1$$

12.
$$\frac{dR}{dt} = 4R - 7F - 1$$
$$\frac{dF}{dt} = 3R + 6F - 12$$

13.
$$\frac{dz}{dt} = \cos w$$
$$\frac{dw}{dt} = -z + w$$

14.
$$\frac{dx}{dt} = y$$
$$\frac{dy}{dt} = x - x^3 - y$$

15.
$$\frac{dx}{dt} = y$$
$$\frac{dy}{dt} = -\cos x - y$$

16.
$$\frac{dx}{dt} = y(x^2 + y^2 - 1)$$
$$\frac{dy}{dt} = -x(x^2 + y^2 - 1)$$

En los ejercicios, asocie el campo de direcciones con uno de los ocho sistemas siguientes. Justifique sus selecciones.

(i) $\dfrac{dx}{dt} = -x$, $\dfrac{dy}{dt} = y - 1$

(ii) $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - 1$, $\dfrac{dy}{dt} = y$

(iii) $\dfrac{dx}{dt} = x + 2y$, $\dfrac{dy}{dt} = -y$

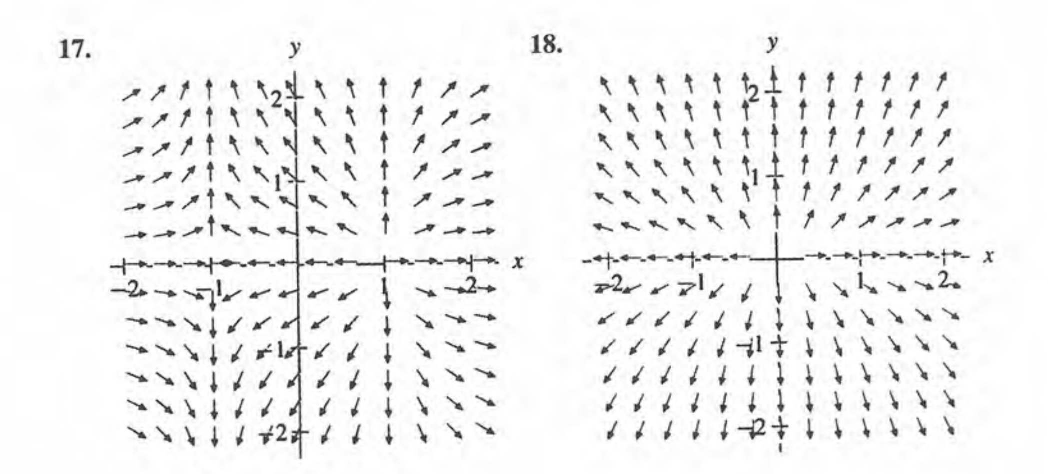
(iv) $\dfrac{dx}{dt} = 2x$, $\dfrac{dy}{dt} = y$

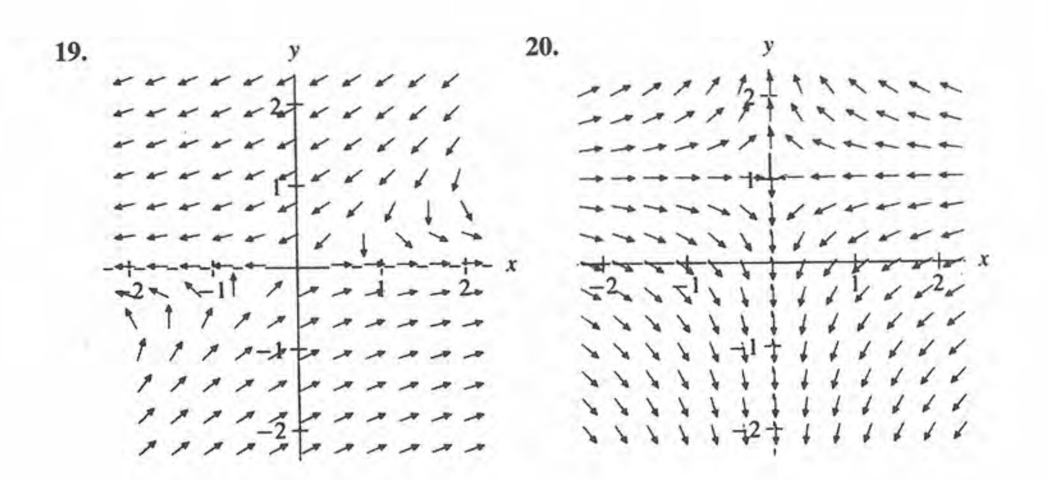
(v) $\dfrac{dx}{dt} = x$, $\dfrac{dy}{dt} = 2y$

(vi) $\dfrac{dx}{dt} = x - 1$, $\dfrac{dy}{dt} = -y$

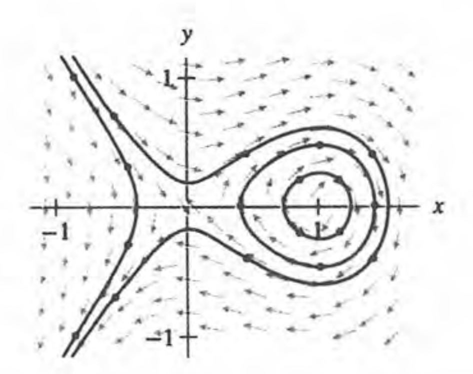
(vii) $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - 1$, $\dfrac{dy}{dt} = -y$

(viii) $\dfrac{dx}{dt} = x - 2y$, $\dfrac{dy}{dt} = -y$



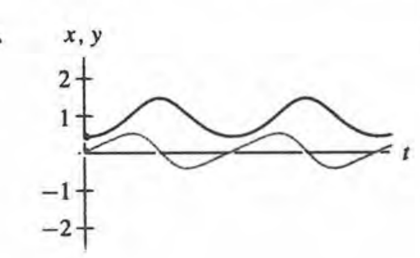


Los ejercicios 21-24 implican las cuatro curvas solución mostradas en el retrato fase que se da a continuación.

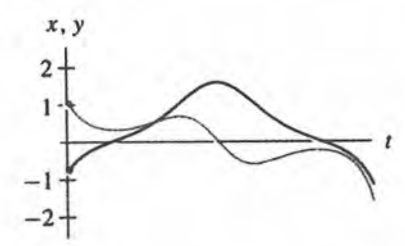


En cada ejercicio se muestra un par de gráficas $x(t)$ y $y(t)$. Determine qué curva solución corresponde a las gráficas suministradas. Luego, sobre el eje t, marque los valores t que corresponden a los puntos distinguidos a lo largo de la curva.

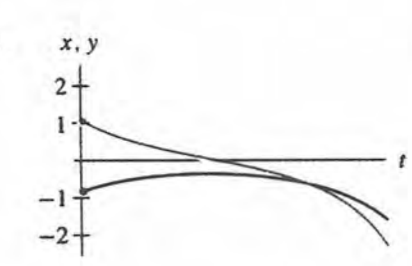
21.



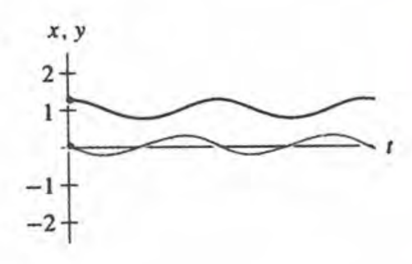
22.



23.

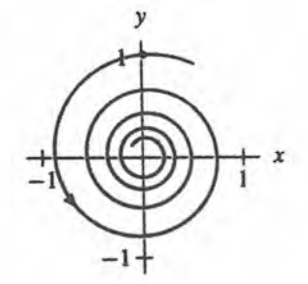


24.

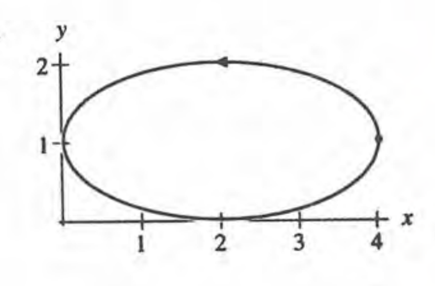


En los ejercicios 25-28 se especifican una curva solución en el plano x-y y su condición inicial. Esboce las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ para la solución.

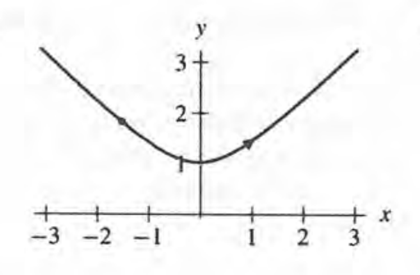
25.



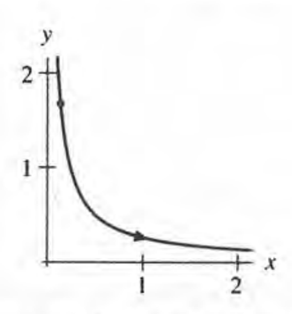
26.



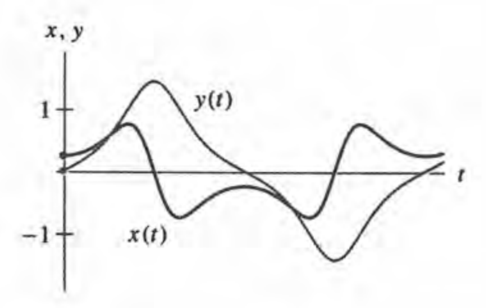
27.



28.



29. Las siguientes son las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ para una curva solución en el plano fase x-y. Trace esa curva e indique la dirección que recorre la solución cuando el tiempo se incrementa.



30. Recuerde la metáfora del parque de estacionamiento de esta sección. Suponga que dos personas, digamos Carlos y Enrique, están manejando automóviles en el estacionamiento y ambos siguen finalmente las reglas prescritas en la metáfora. Si ellos comienzan en el tiempo $t = 0$ en puntos diferentes, ¿entrarán en colisión? (Desprecie el ancho de sus vehículos.)

31. Considere los dos conductores, Carlos y Enrique, del ejercicio 30. Suponga que en el tiempo $t = 0$, ellos empiezan en puntos diferentes del estacionamiento, pero que en el tiempo $t = 1$, Carlos pasa sobre el punto donde Enrique comenzó a guiar. ¿Al final entrarán en colisión? ¿Qué puede decir sobre sus trayectorias?

32. Demuestre que todos los vectores en el campo vectorial $\mathbf{F}(y, v) = (v, -y)$ son tangentes a círculos con centro en el origen (vea la figura 2.19). [*Sugerencia:* Usted puede verificar este hecho usando pendientes o el producto punto de dos vectores.]

2.3 MÉTODOS ANALÍTICOS PARA SISTEMAS ESPECIALES

Cuando estudiamos las ecuaciones diferenciales de primer orden en el capítulo 1, vimos que a veces podíamos obtener una fórmula para la solución general si la ecuación diferencial tenía una forma especial. En este caso, los procedimientos analíticos para calcular las soluciones estaban especialmente adaptados a la forma de la ecuación diferencial.

Existen pocos sistemas de ecuaciones diferenciales especiales en los que podemos aplicar procedimientos analíticos para encontrar soluciones explícitas. Y precisamente por su rareza, esos sistemas son muy valiosos. Podemos usarlos para desarrollar la intuición

que luego emplearemos al estudiar sistemas para los cuales no se dispone de procedimientos analíticos.

La clase de sistemas más importantes que podemos resolver explícitamente son los sistemas lineales, que estudiaremos en forma detallada en el capítulo 3. En esta sección veremos procedimientos analíticos aplicables a clases muy especiales de ecuaciones. Usaremos las fórmulas que obtengamos para familiarizarnos más con las curvas solución y las gráficas $x(t)$ y $y(t)$.

Verificación de soluciones

Como se indicó antes, encontrar las fórmulas para solucionar un sistema puede ser difícil o hasta imposible. Sin embargo, una vez que las tenemos, no es tan complicado verificar su validez. Esta observación es importante por dos razones. En primer lugar, podemos comprobar nuevamente la aritmética que usamos para calcular las fórmulas. En segundo lugar, y más importante aún, es que muchos de los "procedimientos" para resolver sistemas son en realidad esquemas complejos de conjeturar. Una vez que planteamos la suposición, la probamos para ver si en verdad es una solución.

Considere el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = -3x - 5y.$$

Podemos reescribirlo en notación vectorial como

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}),$$

donde $\mathbf{Y}(t) = (x(t), y(t))$ y $\mathbf{F}(x, y) = (-x + y, -3x - 5y)$. Supongamos ahora que alguien dice que

$$\mathbf{Y}(t) = (x(t), y(t)) = (e^{-4t} - 3e^{-2t}, -3e^{-4t} + 3e^{-2t})$$

es una solución de este sistema.

Para verificar esta afirmación, calculamos las derivadas de $x(t)$ y $y(t)$. Tenemos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(e^{-4t} - 3e^{-2t})}{dt} = -4e^{-4t} + 6e^{-2t}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(-3e^{-4t} + 3e^{-2t})}{dt} = 12e^{-4t} - 6e^{-2t}.$$

Debemos sustituir también $x(t)$ y $y(t)$ en el lado derecho del sistema. Obtenemos

$$-x + y = -(e^{-4t} - 3e^{-2t}) + (-3e^{-4t} + 3e^{-2t}) = -4e^{-4t} + 6e^{-2t}$$

y

$$-3x - 5y = -3(e^{-4t} - 3e^{-2t}) - 5(-3e^{-4t} + 3e^{-2t}) = 12e^{-4t} - 6e^{-2t}.$$

Entonces, dx/dt es igual a $-x + y$ y dy/dt es igual a $-3x - 5y$ para toda t. Por consiguiente,

$$\mathbf{Y}(t) = (x(t), y(t)) = (e^{-4t} - 3e^{-2t}, -3e^{-4t} + 3e^{-2t})$$

es una solución.

Note que $\mathbf{Y}(0) = (-2, 0)$. En consecuencia, hemos verificado que $\mathbf{Y}(t)$ es una solución del problema con valor inicial

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}), \quad \mathbf{Y}(0) = (-2, 0).$$

Como segundo ejemplo, consideremos el sistema

$$\frac{dx}{dt} = 2x - y$$
$$\frac{dy}{dt} = x - 2y,$$

y supongamos que queremos comprobar si la función $\mathbf{Y}(t) = (e^{-t}, 3e^{-t})$ es una solución que satisface la condición inicial $\mathbf{Y}(0) = (1, 3)$.

Para verificar que $\mathbf{Y}(t)$ satisface la condición inicial, la evaluamos en $t = 0$. Esto da $\mathbf{Y}(0) = (e^{-0}, 3e^{-0}) = (1, 3)$. A continuación revisamos si la primera ecuación del sistema se satisface. Tenemos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(e^{-t})}{dt} = -e^{-t}.$$

Sustituyendo $x(t)$ y $y(t)$ en el lado derecho de la ecuación para dx/dt, obtenemos

$$2x - y = 2e^{-t} - 3e^{-t} = -e^{-t}.$$

La primera ecuación es válida para toda t. Finalmente, debemos revisar la segunda ecuación del sistema. Entonces

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(3e^{-t})}{dt} = -3e^{-t},$$

y

$$x - 2y = e^{-t} - 2(3e^{-t}) = -5e^{-t}.$$

Como la segunda ecuación no se satisface, la función $\mathbf{Y}(t) = (e^{-t}, 3e^{-t})$ no es una solución del problema de valor inicial.

Las enseñanzas de esos dos ejemplos son muy importantes y a menudo se pasan por alto. Dada una fórmula para $\mathbf{Y}(t)$, siempre podemos verificar si esa función satisface el sistema mediante el cálculo directo. Es cierto que este tipo de cálculo no es la parte más interesante del tema, pero es directa. Y nos permite determinar de manera inmediata si una función vectorial dada es una solución.

Sistemas desacoplados

Una de las cosas que hace a los sistemas de ecuaciones diferenciales tan difíciles (y tan interesantes) es que la razón de cambio de cada una de las variables dependientes depende a menudo de los valores de otras variables dependientes. Sin embargo, a veces no hay demasiada interdependencia entre las variables, y en ese caso podemos obtener la solución general usando los procedimientos del capítulo 1.

Se dice que un sistema de ecuaciones diferenciales está *desacoplado* si la razón de cambio de una o más de las variables dependientes depende sólo de su propio valor.

Un ejemplo de un sistema completamente desacoplado

Consideremos el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -2x$$
$$\frac{dy}{dt} = -y.$$

Como la ecuación para dx/dt contiene sólo a x y la ecuación para dy/dt incluye únicamente a y, podemos resolverlas por separado. Cuando esto ocurre, decimos que el sistema está **completamente desacoplado**. La solución general de $dx/dt = -2x$ es $x(t) = k_1e^{-2t}$, donde k_1 es una constante cualquiera. La solución general de $dy/dt = -y$ es $y(t) = k_2e^{-t}$, donde k_2 también es una constante. Podemos juntar estas expresiones para encontrar la solución general

$$(x(t), y(t)) = (k_1e^{-2t}, k_2e^{-t})$$

del sistema. Esta solución general tiene dos constantes indeterminadas, k_1 y k_2. Ambas pueden ajustarse de manera que cualquier condición inicial dada pueda ser satisfecha. Por ejemplo, dada la condición inicial $\mathbf{Y}(0) = (1, 1)$, hacemos $k_1 = 1$ y $k_2 = 1$ para obtener la solución

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

En la figura 2.35 practicamos esta curva junto con el campo de direcciones asociado con el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (-2x, -y)$. De la fórmula para $\mathbf{Y}(t)$, vemos que $\mathbf{Y}(t)$ da una parametrización de la mitad superior de la curva $x = y^2$ en el plano ya que

$$(y(t))^2 = (e^{-t})^2 = e^{-2t} = x(t).$$

Obtenemos sólo la mitad superior de esta parábola porque $y(t) = e^{-t} > 0$ para toda t.

La curva solución en el plano fase oculta el comportamiento de nuestra solución (que tiende al origen en forma exponencial) con respecto a la variable independiente t. Como tenemos las fórmulas para $x(t)$ y $y(t)$, no es difícil dibujar las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ (vea la figura 2.36).

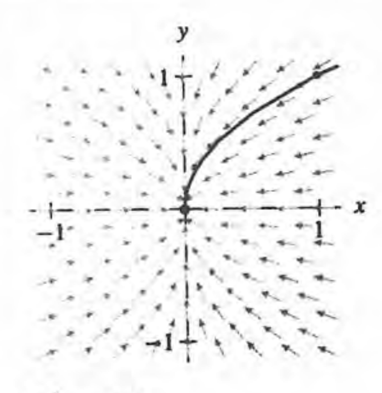


Figura 2.35
La curva solución
$\mathbf{Y}(t) = (e^{-2t}, e^{-t})$.

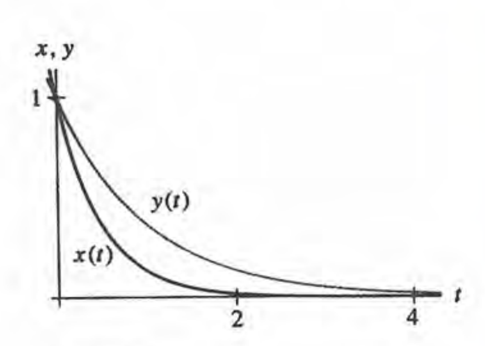


Figura 2.36
Las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ para la solución
$(x(t), y(t)) = (e^{-2t}, e^{-t})$.

Un ejemplo de sistema parcialmente desacoplado

Nuestro siguiente ejemplo es el sistema

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 3y$$
$$\frac{dy}{dt} = -4y.$$

Aquí la razón de cambio de x depende tanto de x como de y, pero la de y depende sólo de y. Decimos que la variable dependiente y se desacopla del sistema y que el sistema es **parcialmente desacoplado**.

La solución general de la ecuación para y es $y(t) = k_2 e^{-4t}$, donde k_2 es una constante arbitraria. Al sustituir esta expresión para y en la ecuación para x obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 3k_2 e^{-4t}.$$

Ésta es una ecuación lineal de primer orden. Recuerde que en la sección 1.8 escribimos esta ecuación en la forma

$$\frac{dx}{dt} - 2x = 3k_2 e^{-4t}$$

para encontrar la solución general. Multiplicando ambos lados por el factor de integración

$$e^{\int -2\,dt} = e^{-2t},$$

obtenemos

$$e^{-2t}\frac{dx}{dt} - 2e^{-2t}x = 3k_2 e^{-6t},$$

que es equivalente a

$$\frac{d(e^{-2t}x)}{dt} = 3k_2 e^{-6t}.$$

Integrando ambos lados con respecto a t, resulta

$$e^{-2t}x = -\tfrac{1}{2}k_2 e^{-6t} + k_1,$$

donde k_1 es cualquier constante. Al simplificar, tenemos

$$x(t) = k_1 e^{2t} - \tfrac{1}{2}k_2 e^{-4t}.$$

Juntando esta expresión con la solución general de la ecuación para y, la solución general es

$$x(t) = k_1 e^{2t} - \tfrac{1}{2}k_2 e^{-4t}$$
$$y(t) = k_2 e^{-4t}.$$

Las constantes k_1 y k_2 pueden ajustarse para dar cualquier condición inicial deseada. Por ejemplo, supongamos que tenemos $x(0) = 0$ y $y(0) = 1$. Para encontrar los valores apropiados de k_1 y k_2, sustituimos $t = 0$ en la fórmula para la solución general y despejamos. Es decir,

$$x(0) = 0 = k_1 - \tfrac{1}{2}k_2$$
$$y(0) = 1 = k_2,$$

que da $k_1 = 1/2$ y $k_2 = 1$. La solución del problema de valor inicial es entonces

$$x(t) = \tfrac{1}{2}e^{2t} - \tfrac{1}{2}e^{-4t}$$
$$y(t) = e^{-4t}.$$

Para la condición inicial $(x(0), y(0)) = (-1/2, 1)$, podemos seguir los mismos pasos anteriores y obtenemos $k_1 = 0$ y $k_2 = 1$. La fórmula para esta solución es

$$x(t) = -\tfrac{1}{2}e^{-4t}$$
$$y(t) = e^{-4t}.$$

Observe que $y(t)/x(t) = -2$ para toda t, y por tanto la solución tiende al punto de equilibrio en el origen cuando t crece y hacia infinito cuando t decrece. Como la razón y/x es constante, la curva solución se encuentra sobre una línea que pasa por el origen en el plano fase (vea la figura 2.37). El hecho de que este sistema tenga una curva solución que se encuentra sobre una línea, es una consecuencia de la simple álgebra de las ecuaciones. Este tipo especial de geometría se utilizará ampliamente en el capítulo 3.

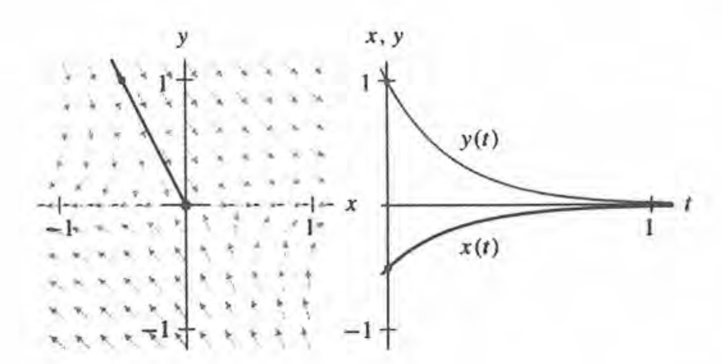


Figura 2.37
Aunque las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ son gráficas de funciones exponenciales, la curva solución correspondiente se encuentra sobre una línea en el plano fase xy.

El oscilador armónico amortiguado

Como ejemplo final, volvemos al modelo del oscilador armónico que analizamos en la sección 2.1 (vea la figura 2.38). Sea $y(t)$ la posición de la masa medida desde la posición de reposo del resorte. La ecuación del oscilador armónico no amortiguado es

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky,$$

donde m es la masa y k es la constante del resorte.

En las secciones 2.1 y 2.2 vimos que esta ecuación tiene soluciones que contienen las funciones seno y coseno. Tales soluciones oscilan siempre con amplitud constante y por tanto corresponden a un movimiento perpetuo. Para hacer el modelo más real, debemos incluir alguna fuerza de fricción o amortiguamiento. Esto retarda el movimiento, di-

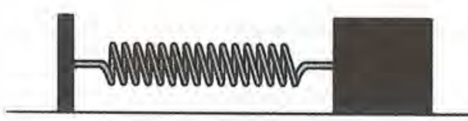


Figura 2.38
Sistema masa-resorte.

sipando energía del sistema. Un modelo real que incluya la resistencia del aire y fuerzas de fricción entre la masa y la mesa resulta muy complicado ya que la fricción es un fenómeno sorprendentemente sutil.* Como un primer modelo, agruparemos todas las fuerzas de amortiguamiento y supondremos que la magnitud es proporcional a la velocidad. La forma de la fuerza de amortiguamiento es entonces

$$-b\left(\frac{dy}{dt}\right),$$

donde $b > 0$ es llamado el **coeficiente de amortiguamiento**. El signo menos indica que el amortiguamiento se opone a la dirección del movimiento, reduciendo siempre la velocidad. El parámetro b puede ajustarse modificando la viscosidad del medio a través del cual se mueve la masa (por ejemplo, colocando todo el mecanismo en la bañera).

Para obtener el nuevo modelo, igualamos el producto de la masa y la aceleración con la suma de la fuerza del resorte y del amortiguamiento y obtenemos

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - b\frac{dy}{dt},$$

que se escribe típicamente como

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = 0.$$

A la que suele llamarse ecuación del **oscilador armónico amortiguado.** Para simplificarla, hacemos $p = b/m$ y $q = k/m$, y la escribimos como

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0.$$

Podemos convertir esta ecuación de segundo orden en un sistema si v denota la velocidad, por lo que $v = dy/dt$ y tenemos entonces

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v\\ \frac{dv}{dt} &= -qy - pv.\end{aligned}$$

Conjetura de soluciones

Para obtener una idea del comportamiento de las soluciones del oscilador armónico amortiguado, convendría tener algunas soluciones explícitas y para obtenerlas podemos usar el

* Véase Jacqueline Krim, "Friction at the Atomic Scale", *Scientific American*, Vol. 275, Núm. 4, octubre de 1966, donde se presenta un interesante análisis de la fricción.

tradicional método de *conjetura y prueba*. La idea de este "método" es hacer una conjetura razonable de la forma de la solución y después se sustituye esta suposición en la ecuación diferencial. Se espera que al ajustarla lleguemos a una solución.

Consideremos la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0.$$

Una solución $y(t)$ es una función cuya segunda derivada puede expresarse en términos de y, dy/dt, y las constantes. La función más común cuya derivada es casi exactamente ella misma es la exponencial, por lo que conjeturamos que hay una solución de la forma $y(t) = e^{st}$ para alguna selección de la constante s. Para determinar qué opciones (si las hay) de s convierten a $y(t)$ en una solución, sustituimos $y(t) = e^{st}$ en el lado izquierdo de la ecuación diferencial, y obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y &= \frac{d^2(e^{st})}{dt^2} + 5\frac{d(e^{st})}{dt} + 6(e^{st})\\ &= s^2e^{st} + 5se^{st} + 6e^{st}\\ &= (s^2 + 5s + 6)e^{st}\end{aligned}$$

Para que $y(t) = e^{st}$ sea una solución, esta expresión debe ser igual al lado derecho de la ecuación diferencial para toda t. En otras palabras, debemos tener

$$(s^2 + 5s + 6)e^{st} = 0$$

para toda t. Ahora, $e^{st} \neq 0$ para toda t, por lo que debemos escoger s de modo que

$$s^2 + 5s + 6 = 0.$$

Esta ecuación se satisface sólo si $s = -2$ o $s = -3$. Por consiguiente, este procedimiento da dos soluciones: $y_1(t) = e^{-2t}$ y $y_2(t) = e^{-3t}$.

Estas soluciones pueden convertirse en soluciones del sistema haciendo $v_1 = dy_1/dt = -2e^{-2t}$ y $v_2 = dy_2/dt = -3e^{-3t}$. Entonces, $\mathbf{Y}_1(t) = (e^{-2t}, -2e^{-2t})$ y $\mathbf{Y}_2(t) = (e^{-3t}, -3e^{-3t})$ son las soluciones del sistema asociado.

Las curvas solución y las gráficas $y(t)$ y $v(t)$ para esas dos soluciones se proporcionan en las figuras 2.39-2.41. El campo de direcciones indica que todas las soluciones tien-

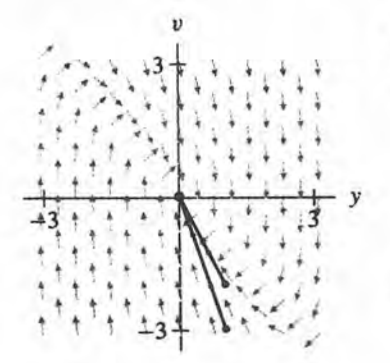


Figura 2.39
Las dos curvas solución que corresponden a las soluciones $y_1(t) = e^{-2t}$ y $y_2(t) = e^{-3t}$ de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0.$$

Ambas curvas se encuentran sobre las líneas del plano yv.

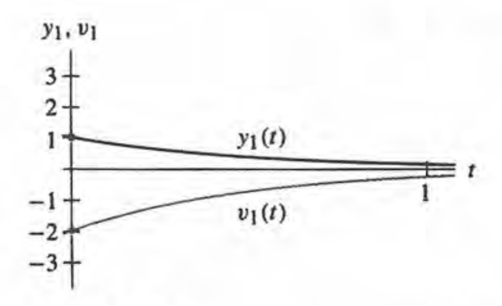


Figura 2.40
Las gráficas $y(t)$ y $v(t)$ para la solución $y_1(t) = e^{-2t}$.

Figura 2.41
Las gráficas $y(t)$ y $v(t)$ para la solución $y_2(t) = e^{-3t}$.

den al origen. Esto no debe sorprendernos puesto que el amortiguamiento reduce la velocidad. Los dos resultantes que hemos calculado son especiales porque las curvas solución se encuentran sobre líneas en el plano fase. Del campo de direcciones podemos ver que la mayor parte de las curvas solución no son líneas rectas.

Comentarios generales sobre los métodos de conjetura y prueba

El "método" de conjetura y prueba para hallar soluciones explícitas no es satisfactorio. ¿Cómo sabemos qué conjeturar si aún no conocemos la solución? Si nuestra primera conjetura no sirve, ¿qué hacemos entonces? En el capítulo 3 estudiaremos los sistemas lineales (incluido el oscilador armónico amortiguado). Veremos ahí que nuestra "conjetura" anterior de e^{st} es un resultado de la interacción entre la forma algebraica de las ecuaciones y la estructura geométrica de las curvas solución en el plano fase para esos sistemas.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 2.3

En los ejercicios 1-4, consideramos el sistema

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 2y$$
$$\frac{dy}{dt} = x + 3y.$$

Para las funciones dadas $\mathbf{Y}(t) = (x(t), y(t))$, compruebe si $\mathbf{Y}(t)$ es una solución del sistema.

1. $(x(t), y(t)) = (2e^t, -e^t)$

2. $(x(t), y(t)) = (3e^{2t} + e^t, -e^t + e^{4t})$

3. $(x(t), y(t)) = (2e^t - e^{4t}, -e^t + e^{4t})$

4. $(x(t), y(t)) = (4e^t + e^{4t}, -2e^t + e^{4t})$

En los ejercicios 5-12, empleamos el sistema parcialmente desacoplado

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = -y.$$

5. Aunque podemos usar el método descrito en esta sección para obtener la solución general de este sistema, ¿por qué deberíamos saber inmediatamente que $\mathbf{Y}(t) = (x(t), y(t)) = (e^{2t} - e^{-t}, e^{-2t})$ *no* lo resolverá?

6. Aunque podemos emplear el procedimiento descrito para obtener la solución general, ¿hay una manera más fácil de mostrar que $\mathbf{Y}(t) = (x(t), y(t)) = (4e^{2t} - e^{-t}, 3e^{-t})$ es una solución del sistema?

7. Use el método descrito en esta sección y encuentre la solución general de este sistema.

8. **(a)** ¿Puede escoger constantes en la solución general obtenida en el ejercicio 7 que den la función $\mathbf{Y}(t) = (e^{-t}, 3e^{-t})$?

(b) Suponga que el resultado en el ejercicio 7 no estaba disponible. ¿Cómo podría comprobar que $\mathbf{Y}(t) = (e^{-t}, 3e^{-t})$ no es una solución?

9. **(a)** Usando el resultado del ejercicio 7, determine la solución que satisface la condición inicial $\mathbf{Y}(0) = (x(0), y(0)) = (1, 0)$.

(b) En el plano fase x-y grafique la curva solución asociada con esta solución.

(c) Trace las correspondientes gráficas $x(t)$ y $y(t)$.

10. **(a)** Usando el resultado del ejercicio 7, determine la solución que satisface la condición inicial $\mathbf{Y}(0) = ((x(0), y(0)) = (-1, 3)$.

(b) En el plano fase x-y trace la gráfica de la curva solución asociada con esta solución.

(c) Dibuje las correspondientes gráficas $x(t)$ y $y(t)$.

11. **(a)** Usando el resultado del ejercicio 7, determine la solución que satisface la condición inicial $\mathbf{Y}(0) = (x(0), y(0)) = (0, 1)$.

(b) Usando una computadora o calculadora, grafique la curva solución en el plano fase x-y y compare el resultado con la que usted habría dibujado a partir del campo de direcciones para el sistema.

(c) Usando sólo la curva solución, esboce las gráficas $x(t)$ y $y(t)$.

(d) Compárelas con las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ que proporciona la computadora.

12. **(a)** Usando el resultado del ejercicio 7, determine la solución que satisface la condición inicial $\mathbf{Y}(0) = (x(0), y(0)) = (1, -1)$.

(b) Usando una computadora o calculadora, grafique la curva solución en plano fase x-y y compare el resultado con la que habría usted dibujado directamente a partir del campo de direcciones para el sistema.

(c) Usando sólo la curva solución, esboce las gráficas $x(t)$ y $y(t)$.

(d) Compare su bosquejo con las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ que proporciona la computadora.

En los ejercicios 13-16 se da una ecuación de segundo orden para $y(t)$.

(a) Trace su campo de direcciones en el plano y-v, donde $v = dy/dt$.

(b) Usando el método de conjetura y prueba descrito en esta sección, encuentre dos soluciones no nulas que no sean múltiplos una de otra.

(c) Para cada solución, dibuje su curva solución en el plano y-v y sus gráficas $y(t)$ y $v(t)$.

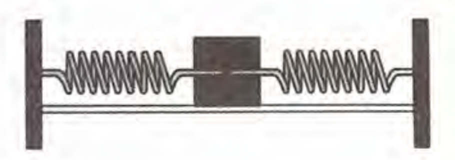
13. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} - 10y = 0$

14. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = 0$

15. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + y = 0$

16. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = 0$

En los ejercicios 17 y 18, consideramos una masa que se desliza sobre una mesa sin fricción entre dos topes separados a una distancia de 1 unidad; la masa está conectada a ambos topes por resortes, como se muestra en la figura.



k_1 y k_2 son las constantes del resorte izquierdo y derecho, respectivamente; sean m la masa y b el coeficiente de amortiguamiento del medio a través del cual los resortes se mueven. Suponga que L_1 y L_2 son las longitudes en reposo de los resortes izquierdo y derecho.

17. Escriba una ecuación diferencial de segundo orden para la posición de la masa en el tiempo t. [*Sugerencia*: El primer paso es escoger un origen, es decir, un punto donde la posición es 0. A la mitad de la distancia entre los topes es una opción natural, pero recuerde que en este punto el sistema puede no estar en equilibrio. Los resortes pueden estar ejerciendo fuerzas, dependiendo de sus longitudes en reposo.]

18. **(a)** Convierta la ecuación diferencial de segundo orden del ejercicio 17 en un sistema de primer orden.

(b) Encuentre el punto de equilibrio de este sistema.

(c) Usando su resultado del inciso (b), escoja un nuevo sistema coordenado y reescríbalo en términos de este nuevo sistema coordenado.

(d) ¿Cómo lo compararía con el sistema para un oscilador armónico amortiguado?

19. Considere el sistema parcialmente acoplado

$$\frac{dx}{dt} = xy$$
$$\frac{dy}{dt} = y + 1.$$

(a) Obtenga la solución general.

(b) Calcule los puntos de equilibrio del sistema.

(c) Encuentre la solución que satisface la condición inicial $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

(d) Con ayuda de una computadora o calculadora, grafique el retrato fase para este sistema e identifique la curva solución que corresponde a la solución con condición inicial $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

2.4 MÉTODO DE EULER PARA SISTEMAS

Muchos de los ejemplos en este capítulo incluyen algún tipo de trazo de soluciones, ya sea de las curvas en el plano fase o de las gráficas $x(t)$ o $y(t)$. En la mayor parte de los casos se han proporcionado sin ninguna indicación de cómo los obtuvimos. Algunas veces las soluciones son segmentos de línea o círculos o elipses, y podemos verificarlos analíticamente. Sin embargo, con mayor frecuencia las soluciones no se encuentran sobre curvas familiares. Por ejemplo, considere el sistema tipo depredador-presa

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 1.2xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -y + 1.2xy$$

y la solución que satisface la condición inicial $(x(0), y(0)) = (1.75, 1.0)$. La figura 2.42 muestra esta solución en el plano fase, el plano x-y y la figura 2.43 contiene las correspondientes gráficas $x(t)$ y $y(t)$. La figura 2.42 sugiere que esta solución es una curva cerrada, pero la curva no es ni circular ni elíptica. Aunque en apariencia las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ son periódicas, no corresponden a las gráficas de ninguna de las funciones periódicas estándar (seno, coseno, etc.). ¿Cómo calculamos esas gráficas?

La respuesta a esta pregunta es esencialmente la misma que la que se formuló acerca de las ecuaciones de primer orden. Usamos un procedimiento numérico confiable y una computadora. En esta sección definimos el método de Euler para sistemas de primer orden. En el capítulo 7 se analizarán otros métodos numéricos.

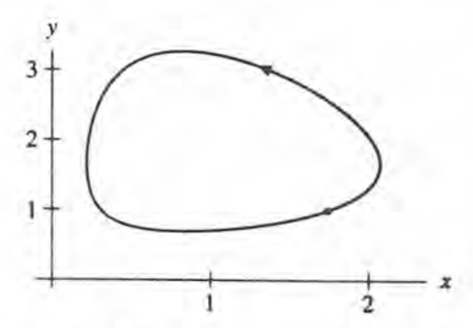


Figura 2.42
Curva solución correspondiente a la condición inicial $(x_0, y_0) = (1.75, 1.0)$.

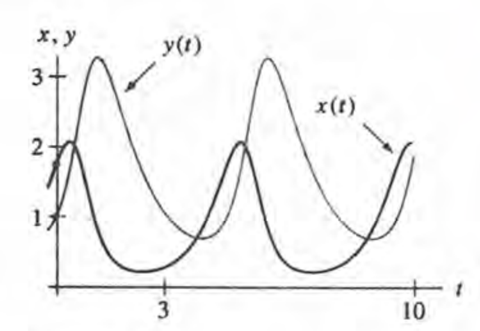


Figura 2.43
Gráficas $x(t)$ y $y(t)$ para la curva solución en la figura 2.42.

Obtención del método de Euler

Considere el sistema autónomo de primer orden

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x, y),$$

junto con la condición inicial $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$. Hemos visto que podemos usar notación vectorial para reescribir este sistema como

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}),$$

donde $\mathbf{Y} = (x, y)$, $d\mathbf{Y}/dt = (dx/dt, dy/dt)$ y $\mathbf{F}(\mathbf{Y}) = (f(x, y), g(x, y))$. La función vectorial $\mathbf{F}$ da un campo vectorial, y una solución es una curva cuyo vector tangente en cualquier punto sobre la curva concuerda con el campo vectorial (vea la figura 2.44). En otras palabras, el vector "velocidad" para la curva es igual al vector $\mathbf{F}(x(t), y(t))$.

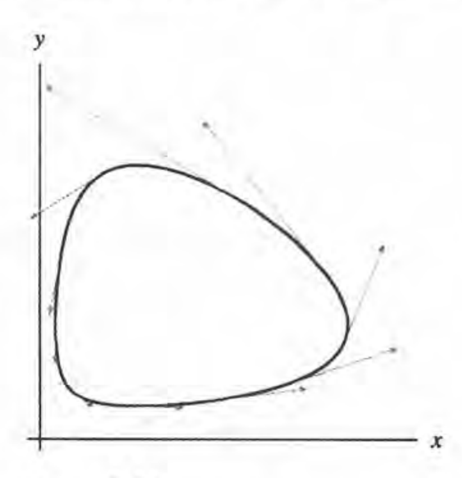


Figura 2.44
Una curva solución es una curva que es tangente en todas partes al campo vectorial.

Como vimos en la sección 1.4, el método de Euler para una ecuación de primer orden se basa en la idea de aproximar la gráfica de una solución mediante segmentos de línea, cuyas pendientes se obtienen de la ecuación diferencial. En el esquema de aproximación de Euler opera el mismo principio interpretado en un marco vectorial.

Con una condición inicial (x_0, y_0), ¿cómo podemos usar el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y)$ para aproximar la curva solución? Igual que para las ecuaciones, escogemos primero un tamaño de paso Δt. El vector $\mathbf{F}(x_0, y_0)$ corresponde a la velocidad de la solución que pasa por (x_0, y_0), por lo que comenzamos nuestra solución aproximada usando $\Delta t\mathbf{F}(x_0, y_0)$ para formar el primer "paso". En otras palabras pasamos de (x_0, y_0) a (x_1, y_1), donde el punto (x_1, y_1) está dado por

$$(x_1, y_1) = (x_0, y_0) + \Delta t\, \mathbf{F}(x_0, y_0)$$

(vea la figura 2.45). Esto es como viajar a lo largo de una línea recta durante el tiempo Δt con velocidad $\mathbf{F}(x_0, y_0)$.

Una vez calculado un punto (x_1, y_1) sobre la curva solución aproximada, calculamos el nuevo vector velocidad $\mathbf{F}(x_1, y_1)$. El segundo paso es

$$(x_2, y_2) = (x_1, y_1) + \Delta t\, \mathbf{F}(x_1, y_1).$$

Repetimos este esquema y obtenemos una curva solución aproximada (vea la figura 2.46).

$\mathbf{F}(x_0, y_0)$
(x_1, y_1)
(x_0, y_0)

Figura 2.45
El vector en (x_0, y_0) y el punto (x_1, y_1) obtenido de un paso del método de Euler.

Figura 2.46
La curva solución aproximada obtenida de cuatro pasos del método de Euler.

En la práctica escogemos un tamaño de paso Δt que sea suficientemente pequeño para proporcionar una solución exacta sobre el intervalo dado. (Vea el capítulo 7 donde se analiza técnicamente la magnitud de lo pequeño y lo demasiado pequeño.)

Método de Euler para sistemas autónomos

El método de Euler para sistemas puede escribirse sin la notación vectorial como sigue. Con el sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x, y),$$

la condición inicial (x_0, y_0) y el tamaño de paso Δt, determinamos la aproximación de Euler repitiendo los cálculos:

$$m_k = f(x_k, y_k)$$
$$n_k = g(x_k, y_k),$$

$$x_{k+1} = x_k + m_k \Delta t$$
$$y_{k+1} = y_k + n_k \Delta t.$$

Método de Euler aplicado a la ecuación de Van der Pol

Por ejemplo, considere la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0.$$

A ésta se demonina **ecuación de Van der Pol**. Para estudiarla numéricamente, primero la convertimos en un sistema de primer orden haciendo $y = dx/dt$. El sistema resultante es

$$\frac{dx}{dt} = y$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + (1 - x^2)y.$$

Suponga que queremos encontrar una solución aproximada para la condición inicial $(x(0), y(0)) = (1, 1)$. Realizamos los primeros cálculos a mano para ver cómo responde el método de Euler y luego dejamos que la computadora efectúe la parte iterativa. El método se ilustra de manera adecuada haciendo un cálculo con un tamaño de paso relativamente grande, aunque en la práctica nunca usaríamos un valor tan grande para Δt.

Sea $\Delta t = 0.25$. Dada la condición inicial $(x_0, y_0) = (1, 1)$, calculamos el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (y, -x + (1 - x^2)y)$$

en (1, 1). Obtenemos el vector $\mathbf{F}(1, 1) = (1, -1)$. Nuestro primer paso comienza entonces en (1, 1) y termina en

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) &= (x_0, y_0) + \Delta t\, \mathbf{F}(x_0, y_0)\\ &= (1, 1) + 0.25\,(1, -1)\\ &= (1.25, 0.75).\end{aligned}$$

En otras palabras, como $\Delta t = 0.25$, obtenemos (x_1, y_1) a partir de (x_0, y_0) avanzando la cuarta parte del camino a lo largo del vector de desplazamiento $(1, -1)$ (vea la figura 2.47).

El paso siguiente se determina calculando el campo vectorial en (x_1, y_1). Tenemos $\mathbf{F}(1.25, 0.75) = (0.75, -1.67)$ (con 2 decimales). En consecuencia, nuestro próximo paso empieza en (1.25, 0.75) y finaliza en

$$\begin{aligned}(x_2, y_2) &= (1.25, 0.75) + 0.25\,(0.75, -1.67)\\ &= (1.44, 0.33)\end{aligned}$$

(vea la figura 2.47).

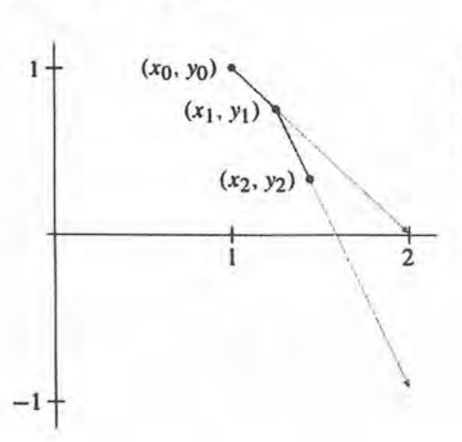


Figura 2.47
Dos pasos del método de Euler aplicados a la ecuación de Van der Pol con condición inicial $(x_0, y_0) = (1, 1)$ y tamaño de paso $\Delta t = 0.25$.

Tabla 2.1
Diez pasos del método de Euler.

i	x_i	y_i	m_i	n_i
0	1	1	1	−1
1	1.25	0.75	0.75	−1.671875
2	1.4375	0.332031	0.332031	−1.791580
3	1.520507	−0.115864	−0.115864	−1.368501
4	1.491542	−0.457989	−0.457989	−0.930644
5	1.377045	−0.690650	−0.690650	−0.758048
6	1.204382	−0.880162	−0.880162	−0.807837
7	0.984342	−1.082121	−1.082121	−1.017965
8	0.713811	−1.336613	−1.336613	−1.369384
9	0.379658	−1.678959	−1.678959	−1.816611
10	−0.040082	−2.133112		

La tabla 2.1 ilustra los cálculos necesarios para determinar diez pasos del método de Euler, y principia en la condición inicial $(x_0, y_0) = (1, 1)$ con $\Delta t = 0.25$. La curva solución aproximada resultante se muestra en la figura 2.48.

Como mencionamos antes, el $\Delta t = 0.25$ es mucho mayor que el tamaño de paso típico, por lo que repetiremos nuestros cálculos con $\Delta t = 0.1$. Como usaremos una computadora para efectuarlos, tomaremos en cuenta más pasos. La figura 2.49 muestra el resultado. Podemos observar los puntos obtenidos en el cálculo así como una gráfica de una curva solución aproximada, obtenida uniendo puntos sucesivos por medio de segmentos de líneas. Note que la curva no posee una forma "estándar" y es casi cerrada.

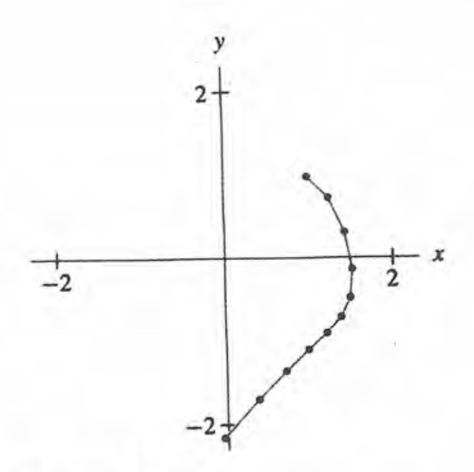


Figura 2.48
Diez pasos del método de Euler aplicados a la ecuación de Van der Pol con condición inicial $(x_0, y_0) = (1, 1)$ y tamaño de paso $\Delta t = 0.25$.

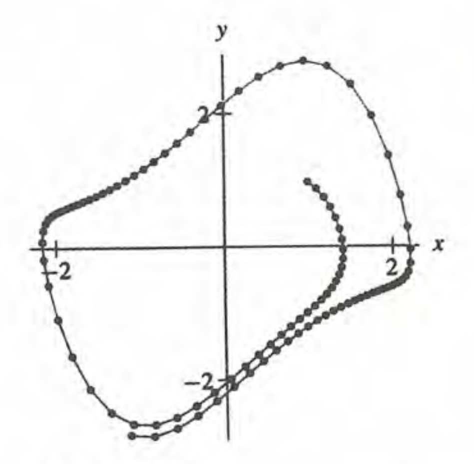


Figura 2.49
Cien pasos del método de Euler aplicados a la ecuación de Van der Pol con condición inicial $(x_0, y_0) = (1, 1)$ y tamaño de paso $\Delta t = 0.1$.



James H. Curry (1948-) recibió su Ph.D. en matemáticas en la Universidad de California, en Berkeley, en 1976. Pasó varios años en el MIT en una estancia posdoctoral y en el National Center for Atmospheric Research; ahí conoció y trabajó con E. N. Lorenz. Ha enseñado en la Howard University y en la Universidad de Colorado donde actualmente es profesor de matemáticas aplicadas y director asociado del departamento de matemáticas aplicadas.

Las investigaciones del profesor Curry se han enfocado al estudio de métodos cualitativos en ecuaciones diferenciales que modelan la atmósfera. También ha publicado una gran cantidad de artículos sobre métodos iterativos para la solución de ecuaciones no lineales. Los métodos que Curry considera son más rápidos y avanzados que el tipo de métodos numéricos que estudiamos en esta sección. Describiremos algunos de esos procedimientos más avanzados en el capítulo 7.

Para mostrar las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ de esta solución aproximada, debemos incluir información sobre la variable independiente t en nuestra tabla del método de Euler. Si suponemos que la condición inicial $(x_0, y_0) = (1, 1)$ corresponde al tiempo inicial $t_0 = 0$, podemos añadir a esta tabla los tiempos correspondientes (vea la tabla 2.2). Tenemos entonces la información para producir gráficas $x(t)$ y $y(t)$ de soluciones aproximadas (vea las

Tabla 2.2
Diez pasos del método de Euler con $t_0 = 0$.

i	t_i	x_i	y_i	m_i	n_i
0	0	1	1	1	−1
1	0.25	1.25	0.75	0.75	−1.671875
2	0.50	1.4375	0.332031	0.332031	−1.791580
3	0.75	1.520507	−0.115864	−0.115864	−1.368501
4	1.00	1.491542	−0.457989	−0.457989	−0.930644
5	1.25	1.377045	−0.690650	−0.690650	−0.758048
6	1.50	1.204382	−0.880162	−0.880162	−0.807837
7	1.75	0.984342	−1.082121	−1.082121	−1.017965
8	2.00	0.713811	−1.336613	−1.336613	−1.369384
9	2.25	0.379658	−1.678959	−1.678959	−1.816611
10	2.50	−0.040082	−2.133112		

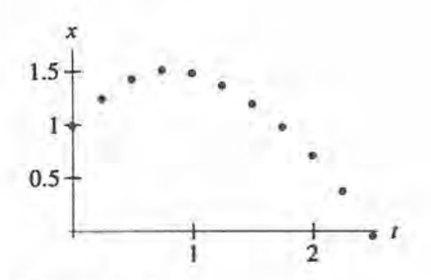


Figura 2.50
La gráfica $x(t)$ correspondiente a la curva solución aproximada obtenida en la tabla 2.2.

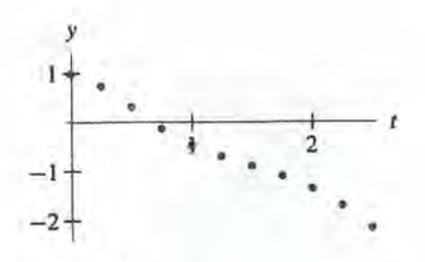


Figura 2.51
La gráfica $y(t)$ correspondiente a la curva solución aproximada obtenida en la tabla 2.2.

figuras 2.50 y 2.51). Las figuras 2.52 y 2.53 ilustran la correspondencia entre la curva solución "casi" cerrada en el plano fase (el plano x-y) y las funciones $x(t)$ y $y(t)$, que son esencialmente periódicas.

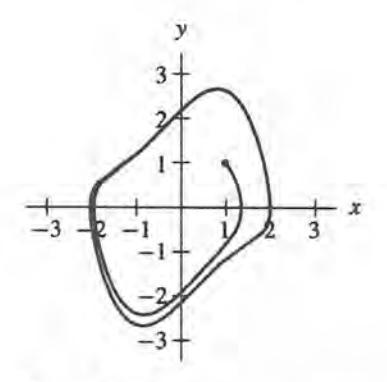


Figura 2.52
La curva solución aproximada en el plano xy.

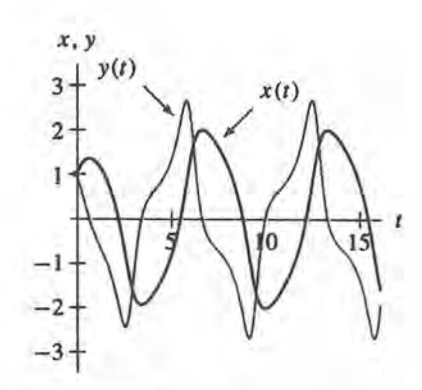


Figura 2.53
Las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ correspondientes.

Existencia y unicidad

Los métodos numéricos, como el método de Euler, dan aproximaciones a las soluciones. Controlar la diferencia entre la aproximación numérica y la solución real es un problema difícil, ya que por lo general no conocemos la solución (vea el capítulo 7). Como vimos en la sección 1.5, el teorema de existencia y unicidad nos proporciona (entre otras cosas) información cualitativa sobre las soluciones, que podemos usar para verificar nuestros números. Lo mismo se aplica para sistemas.

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD Sea

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y})$$

un sistema de ecuaciones diferenciales. Supongamos que t_0 es un tiempo inicial y $\mathbf{Y}_0$ es un valor inicial y que la función $\mathbf{F}$ es continuamente diferenciable. Existe entonces un $\epsilon > 0$

y una función $\mathbf{Y}(t)$ definida para $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$, tal que $\mathbf{Y}(t)$ satisface el problema cuyo valor inicial es $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y})$ y $\mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0$. Además, esta solución es única para t en este intervalo. ■

Hacemos hincapié en que, como con las ecuaciones, primero debemos verificar las hipótesis de este teorema para aplicarlo de manera apropiada. Si éstas no se cumplen, entonces el teorema no da ninguna información válida. En este caso, quizá no existan soluciones o no sean las únicas.

La parte de existencia del teorema es sobre todo alentador. Si estamos estudiando un cierto sistema, es gratificante saber que lo que estamos estudiando existe. La parte de unicidad es útil en una manera más práctica. En síntesis, el teorema de la unicidad dice que dos soluciones diferentes no pueden comenzar en el mismo lugar al mismo tiempo.

Todos los sistemas que estudiamos en este capítulo y en el capítulo 3 son autónomos. En otras palabras, los lados derechos de las ecuaciones diferenciales no dependen de la variable independiente t, por lo que tienen la forma $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{F}(\mathbf{Y})$. Para este tipo de sistema en particular, el teorema de la unicidad es útil. Como el campo vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{Y})$ no cambia con el tiempo, obtenemos las mismas curvas solución de dos soluciones diferentes que empiezan en el mismo punto $\mathbf{Y}_0$ en tiempos diferentes. Esta observación geométrica implica que las distintas curvas solución $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$ no pueden intersecarse.

Para verificar esta conclusión, supongamos que dos curvas solución se intersecan en el punto $\mathbf{Y}_0$. En otras palabras, digamos que

$$\mathbf{Y}_1(t_1) = \mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}_2(t_2)$$

para dos soluciones $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$. En ese caso, la curva solución para $\mathbf{Y}_1(t)$ antes y después del tiempo t_1 es exactamente la misma que la curva para $\mathbf{Y}_2$ antes y después del tiempo t_2, es decir,

$$\mathbf{Y}_1(t_1 + t) = \mathbf{Y}_2(t_2 + t)$$

para toda t. Por tanto, si dos curvas solución se intersecan, entonces sus imágenes son las mismas curvas en el plano fase y difieren sólo en sus parámetros (vea los ejercicios 14 y 15).

Las consecuencias del teorema de la unicidad no son tan fuertes si el sistema no es autónomo. Por ejemplo, es posible tener curvas solución que se intersequen en el plano fase. En el capítulo 4 estudiaremos la geometría de los sistemas no autónomos, pero mientras tanto, podemos suponer que curvas solución diferentes no se tocan en tanto que el sistema satisfaga las hipótesis del teorema de la unicidad.

Un rascacielos oscilante

Como ejemplo de un sistema para el cual se requieren un análisis cualitativo (incluido el teorema de unicidad) y un análisis numérico para entender el comportamiento, consideraremos un modelo del movimiento oscilante de un edificio alto. Los modernos rascacielos se construyen flexibles. Frente a fuertes ráfagas de viento o sismos, tienden a oscilar para absorber las cargas dinámicas. Son comunes las oscilaciones con una amplitud de un metro y periodos del orden de 5 a 10 segundos.

Como aplicación del método de Euler, veamos cómo podemos analizar dos simples ecuaciones diferenciales que modelan la oscilación de un edificio.

El modelo

Para describir el movimiento oscilatorio del rascacielos, sea $y(t)$ una medida de cuánto se flexiona el edificio, es decir, el desplazamiento (en metros) de la parte superior del edifi-



Figura 2.54
Esquema de un rascacielos oscilando.

cio con $y = 0$ correspondiendo a la posición perfectamente vertical. Cuando y no es cero, el edificio está flexionado y la estructura aplica una fuerte fuerza restauradora enorme hacia la vertical (vea la figura 2.54). Esto recuerda el oscilador armónico descrito en la sección 2.3. Por tanto, como una primera aproximación del movimiento oscilatorio del edificio, usamos la ecuación del oscilador armónico amortiguado

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0.$$

Aquí las constantes q y p se escogen para reflejar las características del edificio particular en estudio. De manera arbitraria, escogeremos las constantes $p = 0.2$ y $q = 0.25$ y la ecuación de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 0.2\frac{dy}{dt} + 0.25y = 0$$

y el correspondiente sistema

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -0.25y - 0.2v.$$

Esos números se eligen con el fin de demostrar el comportamiento de las soluciones (y no se refieren a ningún edificio real).

En este sistema podríamos emplear procedimientos analíticos para obtener una solución exacta (vea el capítulo 3). Sin embargo, en la práctica, aun cuando se dispone de otros procedimientos, solemos empezar obteniendo una idea del comportamiento de las soluciones usando métodos numéricos. Con el método de Euler podemos esbozar el plano fase para el sistema (vea la figura 2.55). Todas las soluciones se mueven en espiral hacia el origen en el plano y-v. Así, este modelo predice que una vez desplazado de la vertical, el edificio oscilará y que la amplitud de la oscilación decrece con cada desplaza-

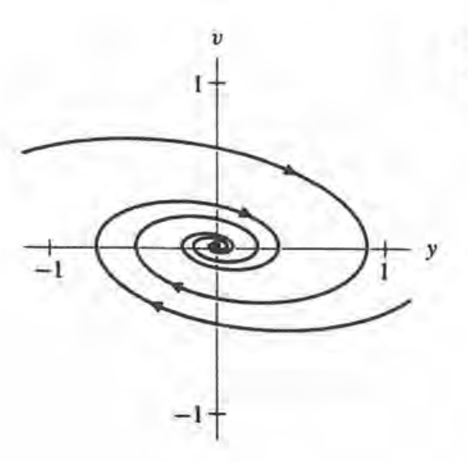


Figura 2.55
Retrato fase para el sistema

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -0.25y - 0.2v.$$

miento. Si esbozamos la gráfica $y(t)$ para varias condiciones iniciales diferentes, vemos que esas oscilaciones siempre tienen la misma frecuencia independientemente de su amplitud o condición inicial (vea la figura 2.56). Esta periodicidad es llamada *frecuencia natural* del oscilador armónico y es una característica fundamental de las soluciones de esas ecuaciones (vea la sección 3.4).

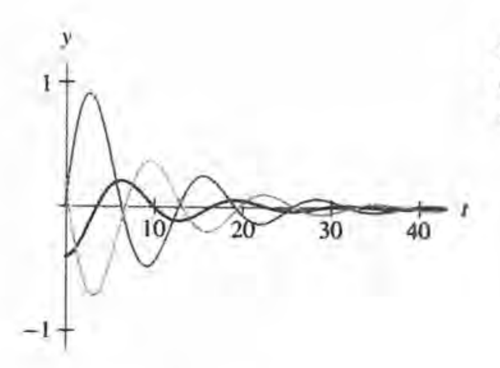


Figura 2.56
Gráficas de $y(t)$ para tres soluciones diferentes del sistema

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -0.25y - 0.2v.$$

El efecto P-Delta

La modelación de un edificio oscilante por medio de la ecuación de un oscilador armónico es en extremo imperfecta. No afirmamos que las fuerzas presentes en un edificio en oscilación sean idénticas a las de un resorte. El oscilador armónico es sólo una primera aproximación a un sistema físico complicado. Para extender la utilidad de este modelo, debemos considerar otros factores que gobiernan el movimiento de un edificio oscilante.

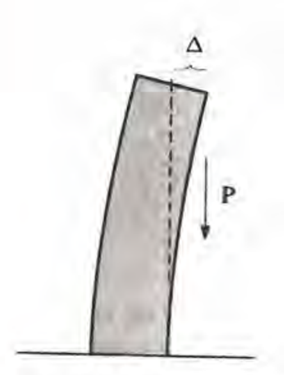


Figura 2.57
La fuerza de gravedad sobre un edificio flexionado.

Un aspecto del modelo del edificio oscilante que aún no hemos incluido es el efecto de la gravedad. Cuando el edificio sufre pequeñas oscilaciones, este parámetro no juega un papel muy importante. Sin embargo, si las oscilaciones son significativas, entonces la gravedad puede tener un efecto importante. Cuando $y(t)$ adquiere su valor máximo, una porción del edificio no está directamente arriba de ninguna otra parte de éste (vea la figura 2.57). En consecuencia, la gravedad jala hacia abajo dicha porción del edificio y esta fuerza tiende a flexionar aún más el edificio. Éste es el efecto "P-Delta" ("Delta" es la distancia en voladizo y "P" es la fuerza de la gravedad).*

Para incluir este efecto en nuestro modelo de manera que sea cuantitativamente exacto, se requiere conocer la densidad del edificio y la flexibilidad de los materiales de construcción. Sin entrar en detalles específicos, podemos construir un modelo muy simplificado que es una caricatura del efecto P-Delta.

El efecto P-Delta es muy pequeño cuando y es pequeña, mucho más aún que la fuerza restauradora. Cuando y crece, el efecto P-Delta se vuelve muy grande. Como un primer modelo, podemos suponer que la fuerza proporcionada por el efecto P-Delta es proporcional a y^3. Agregar esta fuerza equivale a aumentar un término a la expresión para la aceleración de y, es decir, añadir un término proporcional a y^3 al lado derecho de la ecuación diferencial de segundo orden. Para el sistema se agrega un término proporcional a y^3 a la ecuación para dv/dt.

* Matthys Levy y Mario Salvadori, *Why Buildings Fall Down*, Nueva York: W. W. Norton and Co., 1992, p. 109, da una excelente descripción de este modelo junto con una entretenida historia del John Hancock Tower en Boston.

Para estudiar el comportamiento cualitativo de las soluciones, suponemos que el coeficiente del término y^3 es 1 puesto que no tenemos ningún edificio particular en mente. Por tanto, nuestro nuevo modelo es

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 0.2\frac{dy}{dt} + 0.25y = y^3,$$

que se convierte en el sistema de primer orden

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -0.25y + y^3 - 0.2v.\end{aligned}$$

Usando el método de Euler, podemos calcular las soluciones sobre el plano fase y las gráficas $y(t)$ y $v(t)$ (vea las figuras 2.58 y 2.59). El comportamiento de las soluciones es algo inquietante. Si la condición inicial es suficientemente cercana a cero, la solución se mueve entonces en espiral hacia el origen como en el caso de nuestro modelo original. Sin embargo, si la condición inicial está bastante lejos del origen, el comportamiento es muy diferente. La solución en el plano fase se aleja del origen. Las soluciones con esos dos tipos de comportamiento están separadas por curvas solución que tienden a los puntos de equilibrio conforme t se incrementa.

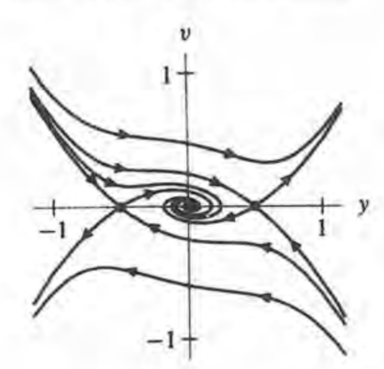


Figura 2.58
Plano fase para el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -0.25y + y^3 - 0.2v.\end{aligned}$$

La interpretación del comportamiento de esas soluciones en términos del comportamiento del edificio conduce a resultados significativos. Para pequeñas oscilaciones, el edificio se desplaza lateralmente con amplitud decreciente y al final regresa a su posición de reposo. Pero si el desplazamiento inicial excede una distancia umbral, entonces la amplitud de la solución se aleja rápidamente de cero. Cuando el edificio oscila de manera más violenta, el resultado es un desastre.

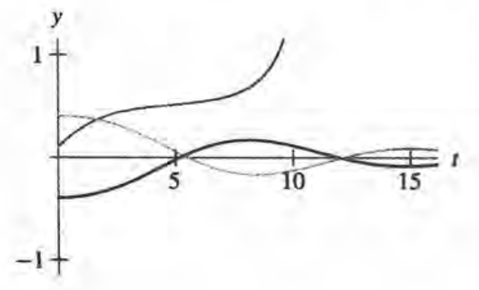


Figura 2.59
Gráfica de $y(t)$ para tres soluciones diferentes del sistema

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -0.25y + y^3 - 0.2v.\end{aligned}$$

Revisión de la realidad

Debemos recalcar que este modelo es sólo una caricatura de la dinámica real de un edificio en oscilación. Sin embargo, nos enseña una lección importante. Las soluciones con condiciones iniciales en una región del plano fase pueden comportarse de manera muy diferente a las soluciones en otra región. El teorema de unicidad nos garantiza que si una condición inicial está en una de esas regiones, entonces la solución correspondiente permanece en la región todo el tiempo. La transición entre los tipos diferentes de soluciones puede ocurrir abruptamente cuando las condiciones iniciales varían. No porque un sistema físico sea "estable" con respecto a desplazamientos iniciales pequeños, implica que lo será en todas las condiciones iniciales. Si este modelo simple puede comportarse en una manera tan radical, no debería sorprendernos entonces encontrar tal comportamiento extraño en un edificio real.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 2.4

1. Para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -y$$
$$\frac{dy}{dt} = x,$$

la curva $\mathbf{Y}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ es una solución periódica. Su posición inicial es $\mathbf{Y}(0) = (1, 0)$ y regresa a este punto cuando $t = 2\pi$. Entonces $\mathbf{Y}(2\pi) = (1, 0)$ y $\mathbf{Y}(t + 2\pi) = \mathbf{Y}(t)$ para toda t.

(a) Verifique que $\mathbf{Y}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ es una solución.

(b) Use el método de Euler con un tamaño de paso de 0.5 para aproximar esta solución y revise qué tanto se acerca a la solución real cuando $t = 4$, $t = 6$ y $t = 10$.

(c) Use el método de Euler con un tamaño de paso de 0.1 para aproximar esta solución y analícela. ¿Qué tan cerca se encuentra de la solución real cuando $t = 4$, $t = 6$ y $t = 10$.

(d) Todos los puntos sobre la curva solución $\mathbf{Y}(t)$ están a una distancia de 1 unidad del origen. ¿Se aplica esto a las soluciones aproximadas? ¿Están muy lejos o muy cerca del origen? ¿Qué pasará con otros tamaños de paso (es decir, las soluciones obtenidas a partir de esos tamaños estarán muy lejos o muy cerca del origen)?

[Es conveniente usar una computadora o una calculadora para ayudar con la aritmética del método de Euler.]

2. Para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = 2x$$
$$\frac{dy}{dt} = y,$$

afirmamos que la curva $\mathbf{Y}(t) = (e^{2t}, 3e^{t})$ es una solución. Su posición inicial es $\mathbf{Y}(0) = (1, 3)$.

(a) Verifique que $\mathbf{Y}(t) = (e^{2t}, 3e^{t})$ es una solución.

(b) Use el método de Euler con tamaño de paso $\Delta t = 0.5$ para aproximar esta solución y determine su cercanía a la solución real cuando $t = 2$, $t = 4$ y $t = 6$.

(c) Use el método de Euler con tamaño de paso $\Delta t = 0.1$ y aproxime esta solución, y calcule qué tan cerca está de la solución real cuando $t = 2$, $t = 4$ y $t = 6$.

(d) Explique por qué y cómo difieren las aproximaciones de Euler de la solución real.

[Es conveniente usar una computadora o una calculadora para ayudar con la aritmética del método de Euler.]

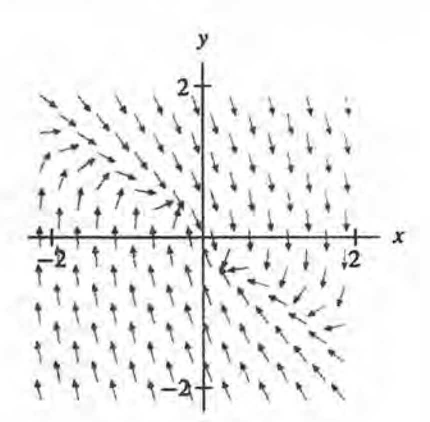
En los ejercicios 3-6 se dan un sistema, una condición inicial, un tamaño de paso y un entero n. También se proporciona el campo de direcciones para el sistema.

(a) Calcule la solución aproximada obtenida por el método de Euler para el sistema y la condición inicial dados y el tamaño de paso para n pasos.

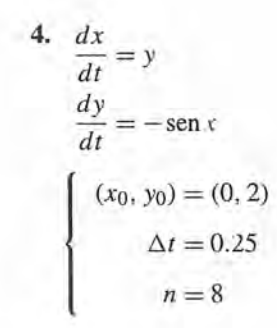
(b) Trace su solución aproximada sobre el campo de direcciones. Asegúrese de que ésta sea consistente con el campo de direcciones.

(c) Usando una computadora o una calculadora graficadora, obtenga un croquis más detallado del retrato fase para el sistema.

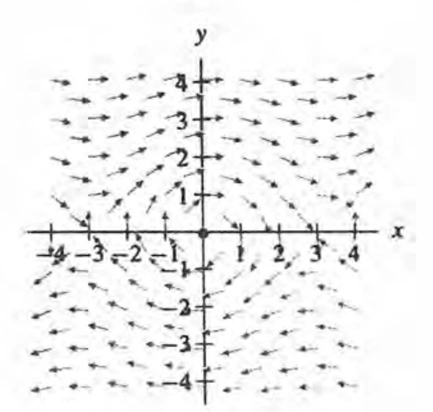
3.
$$\frac{dx}{dt} = y$$
$$\frac{dy}{dt} = -2x - 3y$$
$$\begin{cases} (x_0, y_0) = (1, 1) \\ \Delta t = 0.25 \\ n = 5 \end{cases}$$



4.



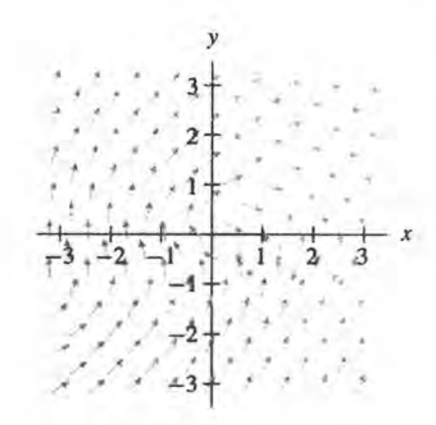
$$\frac{dx}{dt} = y$$
$$\frac{dy}{dt} = -\operatorname{sen} x$$
$$\begin{cases} (x_0, y_0) = (0, 2) \\ \Delta t = 0.25 \\ n = 8 \end{cases}$$



5. $\dfrac{dx}{dt} = y + y^2$

$\dfrac{dy}{dt} = -x + \dfrac{y}{5} - xy + \dfrac{6y^2}{5}$

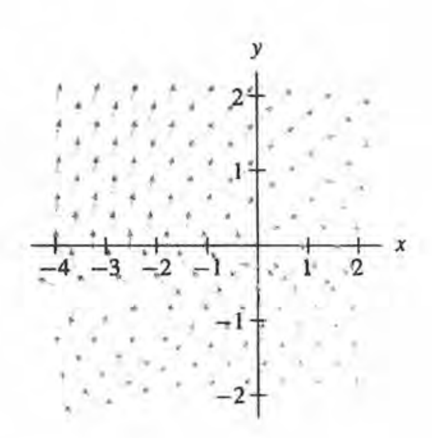
$$\begin{cases} (x_0, y_0) = (1, 1) \\ \Delta t = 0.25 \\ n = 5 \end{cases}$$



6. $\dfrac{dx}{dt} = y + y^2$

$\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{5} - xy + \dfrac{6y^2}{5}$

$$\begin{cases} (x_0, y_0) = (-0.5, 0) \\ \Delta t = 0.25 \\ n = 7 \end{cases}$$



En los ejercicios 7-9, considere el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -x + 3y$$
$$\frac{dy}{dt} = -3x - y.$$

7. Verifique que $\mathbf{Y}_1(t) = (e^{-t} \operatorname{sen}(3t), e^{-t} \cos(3t))$ es una solución de este sistema.

8. Compruebe que $\mathbf{Y}_2(t) = (e^{-(t-1)} \operatorname{sen}(3(t-1)), e^{-(t-1)} \cos(3(t-1)))$ es una solución.

9. Esboce las curvas solución para $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$ en el plano fase x-y. ¿Por qué $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$ no contradicen el teorema de unicidad?

10. Usando una computadora o calculadora, aplique el método de Euler para esbozar una aproximación a la curva solución para la solución del problema de valor inicial

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 4y = 0,$$

donde $(y_0, v_0) = (2, 0)$. ¿Cómo afecta su resultado el Δt escogido?

11. Empleando una computadora o calculadora, aplique el método de Euler para bosquejar una aproximación a la curva solución para la solución del problema de valor inicial

$$5\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 5y = 0,$$

donde $(y_0, v_0) = (0, 1)$. ¿Cómo afecta su resultado el Δt escogido?

12. Recuerde la metáfora del parque de estacionamiento de la sección 2.2. Suponga que dos personas, digamos Carlos y Enrique, están manejando automóviles en el estacionamiento y ambos siguen cuidadosamente las reglas prescritas en la metáfora. Si comienzan en el tiempo $t = 0$ en puntos diferentes, ¿terminarán haciendo colisión? (Desprecie el ancho de sus vehículos.)

13. Considere los dos conductores, Carlos y Enrique, del ejercicio 12. Suponga que en el tiempo $t = 0$ empiezan en puntos diferentes del estacionamiento, pero que en el tiempo $t = 1$, Carlos pasa sobre el punto de donde Enrique comenzó a guiar. ¿Entrarán en colisión? ¿Qué puede decir sobre sus trayectorias?

14. **(a)** Suponga que $\mathbf{Y}_1(t)$ es una solución de un sistema autónomo $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{F}(\mathbf{Y})$. Demuestre que $\mathbf{Y}_2(t) = \mathbf{Y}_1(t + t_0)$ también es una solución para cualquier constante t_0.
    (b) ¿Cuál es la relación entre las curvas solución de $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$?

15. Considere que $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$ son soluciones de un sistema autónomo $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{F}(\mathbf{Y})$, donde $\mathbf{F}(\mathbf{Y})$ satisface las hipótesis del teorema de unicidad. Suponga también que $\mathbf{Y}_2(1) = \mathbf{Y}_1(0)$. ¿Cómo están relacionadas $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$?

16. En el sistema

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + y$$
$$\frac{dy}{dt} = x^2y^2.$$

Demuestre que, para la solución $(x(t), y(t))$ con condición inicial $x(0) = y(0) = 1$, hay un tiempo t_* tal que $x(t) \to \infty$ cuando $t \to t_*$. En otras palabras, la solución explota en un tiempo finito. [*Sugerencia:* Note que $dy/dt \geq 0$ para toda x y y.]

2.5 ECUACIONES DE LORENZ

Hemos visto que el comportamiento de las soluciones de sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales puede ser mucho más interesante y complicado que el de las ecuaciones autónomas simples. Para ecuaciones autónomas con una variable dependiente, las soluciones viven sobre una línea fase y su conducta es completamente gobernada por la posición y naturaleza de los puntos de equilibrio. Las soluciones de sistemas con dos variables dependientes viven en planos fase dimensionales. Un plano tiene mucho más "espacio" que una línea, por lo que las soluciones en un plano fase pueden hacer muchas cosas más interesantes. Esto incluye la formación de lazos (soluciones periódicas) y el acercamiento y retirada desde puntos de equilibrio.

Sin embargo, aún hay severas restricciones sobre los tipos de retratos de planos fase posibles para sistemas. El teorema de unicidad dice que las curvas solución en el plano no se cortan. Así, por ejemplo, si hay una solución periódica que forma un lazo en el plano fase, entonces las soluciones con condiciones iniciales dentro del lazo deben per-

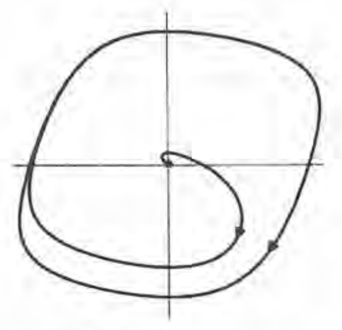


Figura 2.60
Las soluciones con condiciones iniciales en una solución periódica deben estar dentro en todo tiempo.

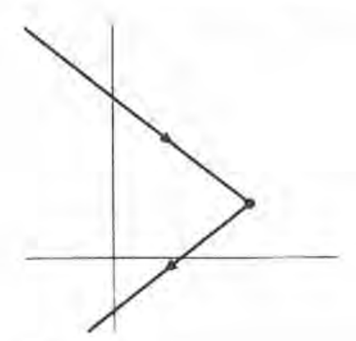


Figura 2.61
Dos soluciones y un punto de equilibrio cortan el plano fase en regiones. Las soluciones con condiciones iniciales en una región deben estar dentro de ésta todo el tiempo.

manecer en la región todo el tiempo (vea la figura 2.60). Además, dos o tres soluciones pueden dividir el plano fase y, según el teorema de unicidad, éstas deben permanecer en la misma región que sus puntos iniciales (vea la figura 2.61).

Si aumentamos el número de variables dependientes a tres, la situación se vuelve más complicada. Una solución de un sistema autónomo con tres variables dependientes es una curva en un "espacio de fase" tridimensional. El teorema de unicidad aún se aplica, por lo que las curvas solución no se cruzan, pero en tres dimensiones esta restricción no es tan definitiva como lo es en un espacio bidimensional. En la figura 2.62 vemos ejemplos de curvas en tres dimensiones que no se cruzan. Éstas pueden anudarse y eslabonarse en modos muy complicados.

El primero en darse cuenta de las posibles complicaciones de los sistemas tridimensionales fue Henri Poincaré. Alrededor de 1890, mientras trabajaba en el problema newtoniano de los tres cuerpos, Poincaré se percató de que los sistemas con tres variables dependientes pueden tener un comportamiento tan complicado que ni siquiera intentó di-

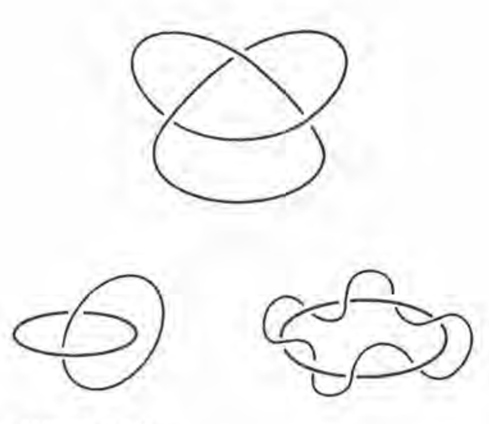


Figura 2.62
Un nudo y dos eslabones en el espacio.

bujarlos. Con una computadora, podemos dibujar muy fácil las aproximaciones numéricas de complicadas curvas solución. El problema ahora es darle sentido a las gráficas. En la actualidad, ésta es un área de investigación muy activa para los sistemas dinámicos, puesto que la explicación completa de los sistemas con tres variables dependientes aún está lejos de ser formulada.

En esta sección estudiaremos un sistema tridimensional conocido como las ecuaciones de Lorenz. Este sistema fue primero estudiado por Ed Lorenz en 1963 en un esfuerzo por modelar el clima. Es importante porque el campo vectorial está formado por ecuaciones muy simples, pero cuyas soluciones conducen a curvas muy complicadas.

El sistema de Lorenz

El comportamiento de un sistema físico como el clima de la Tierra es extremadamente complicado. Para predecir el clima se han desarrollado muchos modelos matemáticos. Las lecturas de estaciones meteorológicas y satélites se usan como condiciones iniciales y se usan aproximaciones numéricas de las soluciones para hacer predicciones.

El éxito de los pronósticos a largo plazo del clima (es decir, más de cinco días a futuro) es muy limitado. Tal vez se deba a que las ecuaciones del modelo son inexactas en sus representaciones de algún aspecto de la evolución del clima. También es posible que el modelo sea exacto pero que alguna propiedad de las ecuaciones haga difícil el pronóstico.

Como el clima es tan complicado, es necesario comenzar el estudio teórico haciendo algunas simplificaciones. Y es precisamente a través de este proceso que el meteorólogo Ed Lorenz llegó al sistema siguiente

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= \rho x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta z + xy, \end{aligned}$$

donde x, y y z son variables dependientes y σ, ρ y β son parámetros. Este sistema es tan simple que las ecuaciones usadas para modelar el clima que no tiene nada que decirnos sobre la temperatura de mañana. Sin embargo, al estudiarlo, Lorenz dio inicio a una revolución científica haciendo que los científicos e ingenieros tomaran conciencia del campo de las matemáticas llamado ahora teoría del caos.

El campo vectorial

Lorenz escogió estudiar el sistema con los siguientes valores para los parámetros: $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ y $\rho = 28$, es decir

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 10(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= 28x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{8}{3}z + xy. \end{aligned}$$

Los lados derechos de esas ecuaciones definen un campo vectorial en el espacio tridimensional

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (10(y-x), 28x - y - xz, -\tfrac{8}{3}z + xy),$$

que asigna un vector de tres componentes a cada punto (x, y, z). Tal como en dos dimensiones, los puntos de equilibrio son (x, y, z) para los cuales el campo vectorial es cero, es decir, $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Por cálculo directo (vea el ejercicio 1) encontramos que los puntos de equilibrio son $(0, 0, 0)$, $(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$ y $(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$.

Un punto inicial para una solución debe incluir valores para las tres coordenadas x, y y z por ser un punto en el espacio. Con éste podemos esbozar la solución trazando una curva cuyo vector velocidad sea igual al campo vectorial en ese punto. Por ejemplo, supongamos que escogemos el punto inicial $(x(0), y(0), z(0)) = (10, 7, 7)$. El campo vectorial en este punto es entonces $\mathbf{F}(10, 7, 7) = (-30, 203, 154/3)$. Al movernos a lo largo de la solución, calculamos el campo vectorial y de acuerdo con éste ajustamos el vector velocidad. En la figura 2.63 esbozamos una pequeña porción de la solución con la condición inicial (10, 7, 7) usando este método. Como podemos observar en la figura, el bosquejo de soluciones empleando el campo vectorial representa un reto.

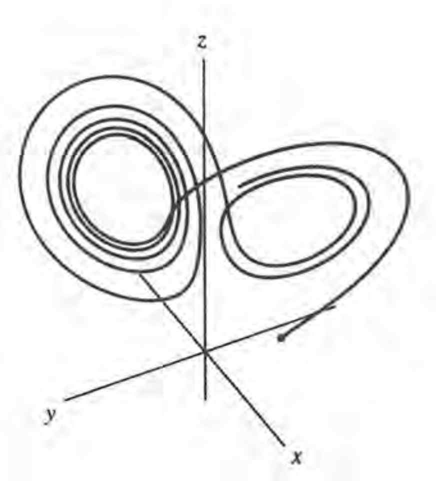


Figura 2.63
Porción ($0 \leq t \leq 5.3$) de la curva solución del sistema de Lorenz con condición inicial (10, 7, 7).

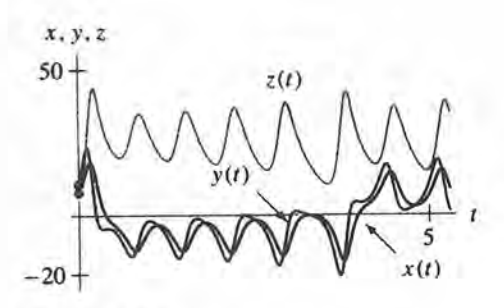


Figura 2.64
Gráficas $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ para la solución con condición inicial (10, 7, 7).

Con excepción de los puntos de equilibrio y soluciones con condiciones iniciales sobre el eje z, hay pocas esperanzas de encontrar una fórmula para las soluciones (vea los ejercicios 1 y 3). Es natural entonces que recurramos a los métodos numéricos. El método de Euler para sistemas tridimensionales funciona exactamente igual que para dos dimensiones. La solución aproximada se construye siguiendo el campo vectorial a lo largo de pequeños pasos en el tiempo. Lorenz comenzó su estudio de este sistema encontrando aproximaciones numéricas para las soluciones, por lo que seguiremos sus pasos.



Edward N. Lorenz (1917-) comenzó su carrera como estudiante graduado de matemáticas en Harvard, pero durante la Segunda Guerra Mundial dirigió su atención a la meteorología, usando una computadora primitiva respecto a los estándares actuales. Lorenz intentó resolver un modelo muy simplificado para la predicción del clima, en el cual simulaba patrones reales del tiempo bastante bien, pero también ilustró algo mucho más importante: cuando Lorenz cambió las condiciones iniciales del modelo ligeramente, los patrones resultantes del clima cambiaron completamente después de un corto tiempo. Lorenz había descubierto que las ecuaciones diferenciales simples pueden comportarse "caóticamente". Describimos algunos aspectos de este importante descubrimiento en éste y capítulos subsecuentes.

Lorenz es actualmente profesor emérito de meteorología en el MIT.

Aproximación numérica de soluciones

Comenzamos fijándonos en una aproximación numérica de la solución con la condición inicial (0, 1, 0) (es decir, $x(0) = 0$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$; vea la figura 2.65). Es obvio que algo interesante está pasando. La solución parece no tener ningún patrón particular. Por ejemplo, la coordenada x salta de valores positivos a negativos de manera "impredecible". Aunque esto es desconcertante, vemos algo aún más interesante si nos fijamos en la solución con la condición inicial (0, 1.001, 0) (vea la figura 2.66).

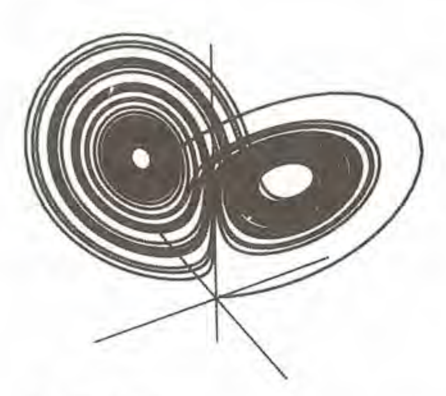


Figura 2.65
Solución del sistema de Lorenz con punto inicial (0, 1, 0).

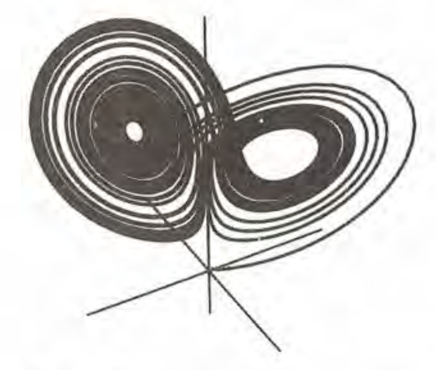


Figura 2.66
Solución del sistema de Lorenz con punto inicial (0, 1.001, 0).

Esta solución comienza muy cerca de la anterior, con x, y y z oscilando impredeciblemente. Sin embargo, si comparamos las dos soluciones, vemos que al final hay una separación considerable entre ellas (vea la figura 2.67). Una modificación muy pequeña en la condición inicial ha conducido a un gran cambio en la solución.

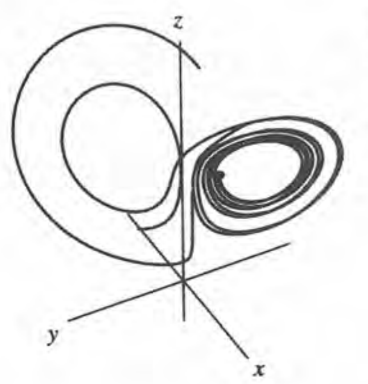


Figura 2.67
Comparación de las soluciones del sistema de Lorenz con puntos iniciales (0, 1, 0) (curva negra) y (0, 1.001, 0) (curva con pantalla) para $44 \leq t \leq 47$.

Para obtener una mejor vista de lo que está pasando, mostramos esas curvas solución desde dos ángulos diferentes para exhibir mejor su carácter tridimensional (vea las figuras 2.68 y 2.69).

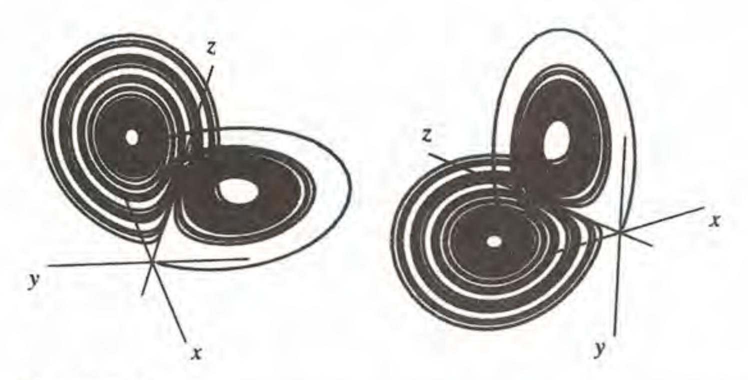


Figura 2.68
Dos vistas de la curva solución con punto inicial (0, 1, 0) en el espacio de fase.

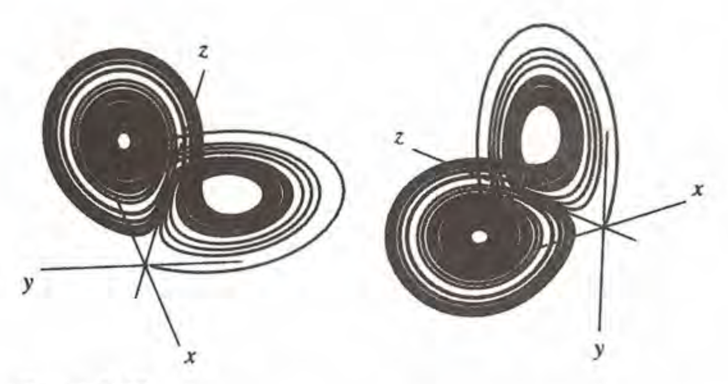


Figura 2.69
Dos vistas de la curva solución con punto inicial (0, 1.001, 0) en el espacio de fase.

Resulta que este extraño comportamiento ocurre para casi toda curva solución. Las funciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ oscilan de manera única e "impredecible", pero la gráfica tridimensional de la curva solución genera una figura que es casi la misma para toda solución.

Las curvas solución que hemos dibujado parecen enlazarse alrededor de los puntos de equilibrio arriba de $z = 0$ en espirales crecientes. Una vez que el radio se vuelve muy grande, la solución pasa cerca de (0, 0, 0) y luego se "reinyecta" hacia uno de los dos puntos de equilibrio. (Es muy instructivo observar una película de una solución moviéndose en tiempo real a través del espacio de fase.) En el siguiente capítulo desarrollaremos las herramientas para estudiar el comportamiento cerca de los puntos de equilibrio.

Caos

El análisis cualitativo de este sistema es una tarea difícil y debe esperar hasta los capítulos 5 y 8. Sin embargo, hay una moraleja con respecto a lo que hemos visto hasta ahora y que está teniendo un efecto importante en muchas ramas de la ciencia. El sistema de Lorenz tiene dos importantes propiedades. La primera es que un pequeño cambio en las condiciones iniciales conduce muy rápido a grandes diferencias en las soluciones correspondientes. Si un sistema tan simple como las ecuaciones de Lorenz posee esta propiedad, es razonable pensar que los sistemas mucho más complicados (como el del clima) también lo tienen. Esto significa que el mínimo error en las condiciones iniciales conducirá de inmediato a uno mayor en la predicción de la solución. Esto podría ser la razón de por qué algunos sistemas físicos como el clima son tan difíciles de predecir.

La segunda propiedad del sistema de Lorenz es que aunque los detalles de soluciones individuales son bastante diferentes, las gráficas de las curvas solución en el espacio de fase tridimensional son sorprendentemente parecidas. Muchas soluciones parecen estar "llenando" la misma región en tres dimensiones. Las soluciones del sistema de Lorenz tienen entonces una estructura que podemos analizar. No tenemos que abandonar el estudio de las soluciones de las ecuaciones de Lorenz, sólo tenemos que formular las preguntas correctas.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 2.5

1. **(a)** Verifique que (0, 0, 0), $(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$ y $(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$ son puntos de equilibrio del sistema de Lorenz

$$\frac{dx}{dt} = 10(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = 28x - y - xz$$
$$\frac{dz}{dt} = -\frac{8}{3}z + xy.$$

(b) Verifique que ésos son los únicos puntos de equilibrio del sistema de Lorenz.

2. Suponga que en el sistema de Lorenz fijamos $\sigma = 10$ y $\beta = 8/3$, como en el texto, pero dejamos ρ como un parámetro. Para el sistema resultante,

$$\frac{dx}{dt} = 10(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = \rho x - y - xz$$
$$\frac{dz}{dt} = -\frac{8}{3}z + xy,$$

(a) demuestre que si $\rho > 1$, hay tres puntos de equilibrio, y calcule sus posiciones; y

(b) demuestre que si $\rho \leq 1$, hay sólo un punto de equilibrio, y determine su posición.

3. Para el sistema de Lorenz con $\sigma = 10$, $\rho = 28$ y $\beta = 8/3$,

(a) verifique que si $(x(t), y(t), z(t))$ es una solución con $x(0) = y(0) = 0$, entonces $x(t) = y(t) = 0$ para toda t;

(b) encuentre la solución con la condición inicial $(0, 0, 1)$; y

(c) con la condición inicial $(0, 0, z_0)$, donde z_0 es cualquier constante y esboce esas soluciones en el espacio fase tridimensional.

4. Con ayuda de una computadora, encuentre aproximaciones numéricas para las soluciones del sistema de Lorenz con $\sigma = 10$, $\rho = 28$ y $\beta = 8/3$ para las condiciones iniciales dadas. Comente cuánto tiempo les toma separarse a dos resultados con condiciones iniciales cercanas.

(a) $(1, 0, 0)$ **(b)** $(0, 1.1, 0)$ **(c)** $(0, 1.01, 0)$
(d) $(1.001, 0, 0)$ **(e)** $(0.001, 1, 0)$ **(f)** $(0, 1, -0.001)$

5. Cerca del origen, donde x, y y z son muy pequeñas, los términos combinados $-xz + xy$ serán en extremo pequeños. Entonces, cerca de $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ podemos aproximar el sistema de Lorenz con

$$\frac{dx}{dt} = 10(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = 28x - y$$
$$\frac{dz}{dt} = -\frac{8}{3}z.$$

(Esto se llama *linealización* en el origen y lo estudiaremos en forma detallada en el capítulo 5.) Observe que z no aparece en las ecuaciones para dx/dt y dy/dt y que la ecuación para dz/dt no contiene x o y; es decir, el sistema se desacopla en uno dimensional y en una ecuación dimensional.

(a) Trace el campo de direcciones y el plano fase para el sistema plano

$$\frac{dx}{dt} = 10(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = 28x - y.$$

(b) Esboce la línea fase para la ecuación

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{8}{3}z.$$

(c) Bosqueje las soluciones en el espacio de fase tridimensional para el sistema anterior.

Observación: Esta imagen da el comportamiento del sistema de Lorenz *cerca* de (0, 0, 0).

LABORATORIO 2.1 El oscilador armónico con amortiguamiento modificado

Las ecuaciones diferenciales autónomas de segundo orden se estudian con métodos numéricos reduciéndolas a sistemas de primer orden con dos variables dependientes. En este laboratorio usted usará la computadora para analizar tres ecuaciones de segundo orden relacionadas en alguna medida. En particular, usted estudiará los planos fase y las gráficas $y(t)$ y $v(t)$ para describir el comportamiento a largo plazo de las soluciones.

En las secciones 2.1 y 2.3 analizamos la más clásica de todas las ecuaciones de segundo orden, es decir, la del oscilador armónico. Y se muestra a continuación

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = 0.$$

Es un ejemplo de una ecuación lineal, homogénea, de segundo orden con coeficientes constantes. En el texto explicamos cómo se emplea para modelar el movimiento de un resorte. Se supone que la fuerza debida al resorte obedece la ley de Hooke (la fuerza es proporcional al alargamiento o acortamiento del resorte). Sabemos también que la fuerza debida al amortiguamiento es proporcional a la velocidad. En su reporte debe describir el movimiento del resorte suponiendo ciertos valores de m, b y k. (Más adelante se proporciona una tabla de valores de estos parámetros. Su profesor le dirá qué valores de m, b y k deberá considerar.) Además deberá analizar lo siguiente:

1. (Oscilador armónico sin amortiguamiento) La primera ecuación que deberá usted estudiar es la del oscilador armónico sin amortiguamiento; es decir, $b = 0$ y con $k \neq 0$. Examine los resultados usando sus gráficas y el plano fase. ¿Son periódicas las soluciones? Si es así, ¿cuál es el periodo? Describa el comportamiento de tres soluciones que tengan condiciones iniciales especialmente diferentes y sea específico con respecto a la interpretación física de éstas. (Los métodos analíticos que responden esas preguntas se verán en el capítulo 3. Por ahora, trabaje numéricamente.)

2. (Oscilador armónico con amortiguamiento) Repita la parte 1 usando la ecuación

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = 0.$$

3. (Oscilador armónico con amortiguamiento no lineal) Repita la parte 1 usando la ecuación

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\left|\frac{dy}{dt}\right|\frac{dy}{dt} + ky = 0$$

en lugar de la usual ecuación del oscilador armónico. (Observe que aun con el mismo valor del parámetro b, las fuerzas resistentes en esta ecuación y en la ecuación en la parte 2 tienen la misma magnitud sólo para velocidad ± 1. Note también que el signo del término

$$\left|\frac{dy}{dt}\right|\frac{dy}{dt}$$

es el mismo que el signo de dy/dt, por lo que esta fuerza amortiguadora siempre opone resistencia a la dirección del movimiento. La diferencia entre esta ecuación y la de la parte 2 es el tamaño del amortiguamiento para pequeñas y grandes velocidades. Uno de los ejemplos de situaciones para las que éste representa un mejor modelo que el amortiguamiento lineal es la resistencia sobre los neumáticos de aviones debido a la nieve o al lodo. La resistencia de sólo cuatro pulgadas de lodo fue suficiente para ocasionar el accidente durante el despegue, en 1958, del avión que llevaba al equipo de futbol Manchester United. Actualmente se permite que los aeroplanos más grandes despeguen y aterricen en no más de media pulgada de nieve o lodo húmedo.*

4. (Ecuación de segundo orden no lineal) Por último, considere una ecuación de segundo orden algo relacionada donde el coeficiente b de amortiguamiento es reemplazado por el factor $(y^2 - \alpha)$; es decir,

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + (y^2 - \alpha)\frac{dy}{dt} + ky = 0.$$

¿Es razonable interpretar este factor como algún tipo de amortiguamiento? Dé una descripción completa del comportamiento a largo plazo de las soluciones. ¿Son periódicas las soluciones? Si es así, ¿qué periodo parecen tener? Explique por qué esta ecuación no es un buen modelo para un sistema tipo masa-resorte. Dé un ejemplo de algún otro tipo de fenómeno físico o biológico que pueda ser modelado por esta ecuación.

Sobre su reporte: Responda las preguntas en cada uno de los incisos anteriores en forma de un corto ensayo. No deje de describir los comportamientos de la solución y del sistema masa-resorte. Use los planos fase y las gráficas de $y(t)$ para ilustrar sus ensayos. (Sin embargo, recuerde que, aunque una buena ilustración vale por mil palabras, 1000 ilustraciones no valen nada.)

Tabla 2.3
Posibles opciones para los parámetros.

Opción	m	k	b	α
1	2	5	2	3
2	3	5	3	3
3	5	5	4	3
4	2	6	3	5
5	3	6	3	5
6	5	6	3	5
7	5	4	4	2
8	5	5	4	2
9	5	6	4	2
10	5	4	4	2

* Véase Stanley Stewart, *Air Disasters*, Barnes & Noble, 1986.

LABORATORIO 2.2 Modelos de población de especies cooperativas y en competencia

En este capítulo nos hemos centrado en los sistemas autónomos de primer orden de ecuaciones diferenciales, como los sistemas depredador-presa descritos en la sección 2.1. En particular, hemos visto cómo estudiarlos usando el análisis de campos vectoriales y del plano fase, y de qué manera se relacionan las curvas solución en el plano fase con las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ de las soluciones. En este proyecto de laboratorio usted usará esos conceptos y los cálculos numéricos respectivos para estudiar el comportamiento de las soluciones de dos sistemas diferentes.

Hemos analizado ampliamente los sistemas depredador-presa. Se trata de sistemas en los que una especie se beneficia mientras que la otra sale dañada por la interacción de las dos especies. En este laboratorio usted estudiará otros dos tipos de sistemas: los competitivos y los cooperativos. Un sistema competitivo es aquél en el que ambas especies resultan dañadas por la interacción, por ejemplo los automóviles y los peatones. En un sistema cooperativo ambas especies se benefician por la interacción, por ejemplo las abejas y las flores. Su objetivo es entender qué sucede en ambos sistemas bajo todas las posibles condiciones iniciales no negativas. Al final de este laboratorio se proporcionan varios pares de sistemas cooperativos y competitivos. (Su profesor le dirá qué par(es) de sistemas debe estudiar.) Los procedimientos analíticos apropiados para analizarlos no han sido estudiados hasta ahora, por lo que usted empleará principalmente procedimientos geométricos/cualitativos y numéricos para establecer sus conclusiones. Como se trata de modelos de población, usted necesita considerar sólo x y y en el primer cuadrante ($x \geq 0$ y $y \geq 0$). Su reporte debe incluir:

1. Un breve análisis de todos los términos en cada sistema. Por ejemplo, ¿qué representa el coeficiente del término x en la ecuación para dx/dt? ¿Cuál sistema es cooperativo y cuál competitivo?

2. Para cada sistema determine todos los puntos de equilibrio importantes y analice el comportamiento de las soluciones cuyas condiciones iniciales satisfacen $x_0 = 0$ o $y_0 = 0$. Determine las curvas en el plano fase, a lo largo de las cuales el campo vectorial es horizontal o vertical. ¿En qué dirección señala el campo vectorial a lo largo de esas curvas?

3. Para cada sistema, describa todas las posibles evoluciones de la población usando el retrato fase así como las gráficas $x(t)$ y $y(t)$. Dé atención especial a la interpretación de la salida de la computadora en términos del comportamiento a largo plazo de las poblaciones.

Sobre su reporte: El texto de su reporte debe contener el análisis de los tres incisos anteriores, uno a la vez, en forma de un pequeño ensayo. Deberá incluir también una descripción de todos los cálculos "a mano" que haya usted efectuado. Puede incluir un número limitado de figuras y gráficas. (Invierta algo de tiempo en organizar la información cualitativa y numérica, ya que unas cuantas figuras bien organizadas son mucho más útiles que un gran catálogo.)

Sistemas:

Par (1):

A. $\frac{dx}{dt} = -5x + 2xy$

$\frac{dy}{dt} = -4y + 3xy$

B. $\frac{dx}{dt} = 6x - x^2 - 4xy$

$\frac{dy}{dt} = 5y - 2xy - 2y^2$

Par (2):

A. $\frac{dx}{dt} = -3x + 2xy$

$\frac{dy}{dt} = -5y + 3xy$

B. $\frac{dx}{dt} = 5x - x^2 - 3xy$

$\frac{dy}{dt} = 8y - 3xy - 3y^2$

Par (3):

A. $\frac{dx}{dt} = -4x + 3xy$

$\frac{dy}{dt} = -3y + 2xy$

B. $\frac{dx}{dt} = 5x - 2x^2 - 4xy$

$\frac{dy}{dt} = 7y - 4xy - 3y^2$

Par (4):

A. $\frac{dx}{dt} = -5x + 3xy$

$\frac{dy}{dt} = -3y + 2xy$

B. $\frac{dx}{dt} = 9x - 2x^2 - 4xy$

$\frac{dy}{dt} = 8y - 5xy - 3y^2$

3 SISTEMAS LINEALES

En el capítulo 2 nos enfocamos en los procedimientos cualitativos y numéricos para estudiar los sistemas de ecuaciones diferenciales. Lo hicimos así porque rara vez podemos encontrar fórmulas explícitas para soluciones de un sistema con dos o más variables dependientes. Las únicas excepciones son los sistemas lineales.

En este capítulo mostraremos cómo usar la forma algebraica y geométrica del campo vectorial para dar la solución general de los sistemas autónomos lineales. A lo largo del camino encontraremos que entender el comportamiento cualitativo de un sistema lineal es mucho más fácil que hallar su solución general. La descripción de dicho comportamiento conduce a un esquema de clasificación que es muy útil en las aplicaciones. Continuaremos también nuestro estudio de modelos que producen sistemas lineales, en particular el que concierne al oscilador armónico.

3.1 PROPIEDADES DE SISTEMAS LINEALES Y EL PRINCIPIO DE LINEALIDAD

En este capítulo investigaremos el comportamiento de los tipos más simples de sistemas de ecuaciones diferenciales, es decir, de los sistemas lineales autónomos. Éstos son importantes por sí mismos y constituyen una herramienta en el estudio de los sistemas no lineales. Podemos clasificar los sistemas lineales de acuerdo con su comportamiento cualitativo e incluso dar fórmulas para las soluciones.

A lo largo del capítulo usaremos repetidamente dos modelos para ilustrar los procedimientos desarrollados. Uno es el oscilador armónico, que está asociado con la más importante de todas las ecuaciones de segundo orden. Este modelo lo estudiaremos en las secciones 2.1 y 2.3. Ahora, usando los procedimientos de este capítulo, podremos dar una descripción completa de sus soluciones para todos los posibles valores de los parámetros. El otro modelo es artificial, y lo presentaremos para ilustrar todas las posibilidades que pueden surgir en los sistemas planos lineales. Estudie nuestro análisis, pero no invierta dinero basándose en él.

El oscilador armónico

El oscilador armónico es, entre otras cosas, un modelo para el movimiento de una masa unida a un resorte. El resorte proporciona una fuerza restauradora que obedece la ley de Hooke y sólo se considera otra fuerza adicional, la debida al amortiguamiento. Sea $y(t)$ la posición de la masa en el tiempo t, y $y = 0$ corresponde al estado de reposo del resorte. La ley de Newton del movimiento,

$$\text{fuerza} = \text{masa} \times \text{aceleración},$$

al aplicarse a un sistema masa-resorte, da la ecuación diferencial de segundo orden

$$-ky - b\frac{dy}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2},$$

donde m es la masa, k es la constante de resorte y b es el coeficiente de amortiguamiento. El término $-ky$ en el lado izquierdo proviene de la ley de Hooke y el término $-b(dy/dt)$ es la fuerza del amortiguamiento (vea la sección 2.3, p. 179). Esta ecuación de segundo orden se escribe más comúnmente como

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = 0.$$

Como lo hicimos en las secciones 2.1 y 2.3, podemos convertir esta ecuación en un sistema lineal haciendo que $v = dy/dt$ sea la velocidad en el tiempo t. Obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v\\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{k}{m}y - \frac{b}{m}v.\end{aligned}$$

Observe que las derivadas dy/dt y dv/dt dependen linealmente de y y v. Como veremos, el comportamiento de las soluciones depende del valor de los parámetros m, k y b.

Dos tiendas de discos compactos

Los osciladores armónicos no exhiben todos los posibles comportamientos que encontraremos en este capítulo, por lo que presentamos el siguiente modelo apócrifo de la microeconomía.

Después de retirarse de escribir libros de texto sobre ecuaciones diferenciales, Pablo y Roberto deciden abrir tiendas pequeñas para vender discos compactos. Las tiendas "CD de Rock and Roll de Paul" y "Sólo discos de ópera de Roberto" están localizadas en la misma manzana, y Pablo y Roberto empiezan a preocuparse sobre el efecto que cada tienda tiene en la otra. Por una parte, dos tiendas de discos CD sobre la misma manzana podría ayudar a ambas atrayendo compradores a la zona. Por otra, las tiendas pueden competir entre sí por el limitado número de compradores. Pablo y Roberto discuten sobre esto hasta el cansancio, por lo que deciden contratar al famoso matemático Genaro para dilucidar el asunto. Genaro sigue su propio consejo de mantener los modelos tan simples como sea posible y sugiere el siguiente sistema.

Sea

$x(t)$ = ganancia diaria de la tienda de Pablo en el tiempo t; y

$y(t)$ = ganancia diaria de la tienda de Roberto en el tiempo t.

Es decir, si $x(t) > 0$, entonces la tienda de Pablo está ganando dinero, pero si $x(t) < 0$, entonces la tienda de Pablo está perdiendo. Como aún no hay información sólida acerca de cómo las ganancias de cada tienda afectan el cambio de ganancias de la otra, Genaro formula el modelo más simple posible que permite a cada tienda afectar a la otra, esto es, un modelo lineal. El sistema es

$$\frac{dx}{dt} = ax + by$$
$$\frac{dy}{dt} = cx + dy,$$

donde a, b, c y d son parámetros. La razón de cambio de las ganancias de Pablo dependen linealmente de sus propias ganancias y de las de Roberto (y de nada más). Las mismas hipótesis se aplican a las ganancias de Roberto. En el capítulo 5 veremos que usar un modelo de esta forma es justificado en tanto que ambas tiendas estén operando cerca del punto de ganancias nulas y cero pérdidas.

Todavía podemos emplear este modelo para predecir las ganancias futuras porque no conocemos los valores de los parámetros a, b, c y d. Sin embargo, podemos desarrollar un entendimiento básico del significado de los signos y magnitudes de los parámetros. Consideremos, por ejemplo, el parámetro a que mide el efecto de las ganancias de Pablo sobre la razón de cambio dx/dt de esa ganancia. Supongamos que a es positiva. Si Pablo está haciendo dinero, entonces $x > 0$ por lo que $ax > 0$. El término ax contribuye positivamente a dx/dt, y en ese caso Pablo hace más dinero. En otras palabras, Pablo espera que $a > 0$ si $x > 0$. Por otra parte, ser lucrativo ($x > 0$) tendría un efecto negativo sobre las ganancias de Pablo. (Por ejemplo, la tienda podría estar abarrotada y los clientes eligirían ir a otra parte.) Dando como resultado una disminución de las ganancias, y bajo esta hipótesis el parámetro a sería negativo en nuestro modelo.

El parámetro b mide el efecto de las utilidades de Roberto sobre la razón de cambio de las ganancias de Pablo. Si $b > 0$ y Roberto hace dinero ($y > 0$), entonces las ganancias de Pablo también se benefician porque el término by contribuye positivamente a dx/dt. De otro modo, si $b < 0$ entonces, cuando Roberto obtiene utilidades ($y > 0$), Pablo sale perdiendo. Podríamos interpretar $b < 0$ como la medida en que Roberto le quita los clientes a Pablo.

De la misma manera, las ganancias de Pablo y las de Roberto afectan la razón de cambio de las ganancias de Roberto y los parámetros c y d tienen interpretaciones similares relativas a dy/dt. Este modelo supone que sólo la ganancia de las dos tiendas influye en el cambio que experimentan. Es claro que esas hipótesis son simplificaciones extremas.

Sin embargo, este modelo nos permite visualizar e interpretar de manera sencilla las soluciones de varios sistemas lineales.

En la figura 3.1 trazamos el retrato fase para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = ax + by$$
$$\frac{dy}{dt} = cx + dy,$$

suponiendo que $a = d = 0$, $b = 1$ y $c = -1$, y obtenemos las curvas solución circulares. En la figura 3.2 consideramos el caso en que $a = -1$, $b = 4$, $c = -3$ y $d = -1$. Aquí, las curvas solución se mueven en espiral hacia el origen.

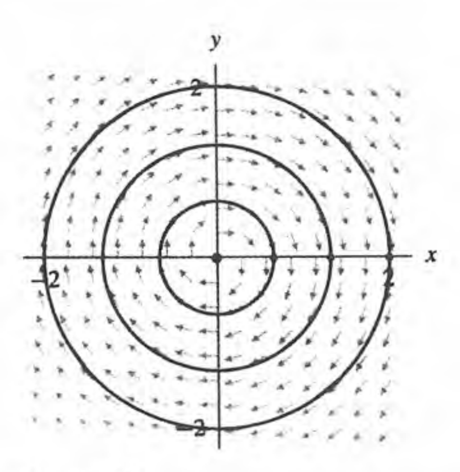


Figura 3.1
Campo de direcciones y tres curvas solución para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = y$$
$$\frac{dy}{dt} = -x.$$

Note que las tres curvas son círculos concéntricos al origen.

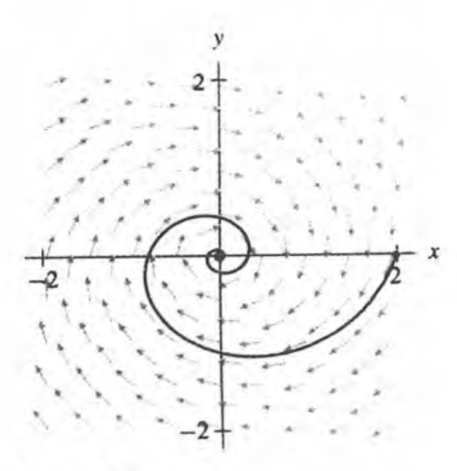


Figura 3.2
Campo de direcciones y una curva solución para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -x + 4y$$
$$\frac{dy}{dt} = -3x - y.$$

Esta curva solución se mueve en espiral hacia el origen conforme t aumenta.

En términos del modelo, la figura 3.1 implica que las ganancias de Pablo y Roberto oscilan periódicamente entre hacer y perder dinero. La curva solución en la figura 3.2 sugiere que las ganancias oscilan mientras tienden hacia el punto (0, 0), donde ambas tiendas ni ganan ni pierden. Las gráficas correspondientes $x(t)$ y $y(t)$ ilustran esos comportamientos (vea las figuras 3.3 y 3.4). Como veremos, existen otros retratos fase alternativos para este modelo, dependiendo de los valores de los parámetros a, b, c y d. En este capítulo desarrollaremos procedimientos para tratar todas las posibilidades.

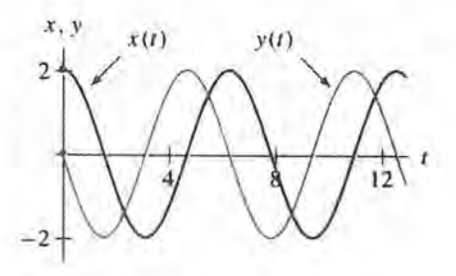


Figura 3.3
Las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ correspondientes a la curva solución en la figura 3.1, con condición inicial $(x_0, y_0) = (2, 0)$.

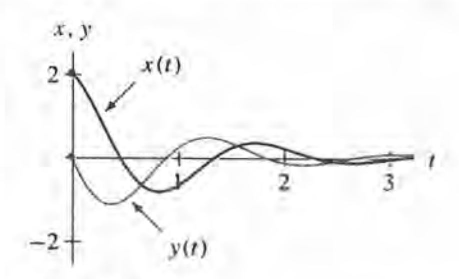


Figura 3.4
Las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ correspondientes a la curva solución en la figura 3.2 con condición inicial $(x_0, y_0) = (2, 0)$.

Sistemas lineales y notación matricial

Consideraremos principalmente sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dx}{dt} = ax + by$$
$$\frac{dy}{dt} = cx + dy,$$

donde a, b, c y d son constantes (que pueden ser cero). Se dice que éste es un **sistema lineal con coeficientes constantes**. Las constantes a, b, c y d son los **coeficientes**. Tanto el modelo del oscilador armónico como el de las tiendas de discos compactos son, con cambios en los nombres de las variables dependientes y los coeficientes, sistemas de esta forma.

El adjetivo más importante, lineal, se refiere al hecho de que las ecuaciones para dx/dt y para dy/dt contienen sólo primeras potencias de las variables dependientes. En otras palabras, son funciones lineales de x y y. Como los coeficientes a, b, c y d son constantes, este tipo de sistema es también *autónomo* y, por tanto, sabemos que las curvas soluciones localizadas en el plano fase no se tocan. Esos sistemas tienen dos variables dependientes, por lo que decimos que son *planos* o *bidimensionales*. Como "sistemas lineales bidimensionales con coeficientes constantes" es una expresión muy larga, usualmente les llamamos *sistemas planos lineales* o bien sólo *sistemas lineales*.

Podemos usar notación vectorial y matricial para escribir este sistema en forma más eficiente. Sea **A** la matriz cuadrada de "2×2" (la matriz de 2×2)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

y sea

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

el vector columna de variables dependientes. Entonces el **producto** de una matriz **A** de 2×2 y un vector columna **Y** es el vector columna **AY** dado por

$$\mathbf{AY} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \\ -1 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 9 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} (2-a) & \pi \\ e & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-a)y + 2\pi v \\ ey + 2yv \end{pmatrix}.$$

Como vimos en el capítulo 2, si x y y son variables dependientes, decimos entonces

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}.$$

Con esta notación matricial podemos escribir el sistema lineal dimensional

$$\frac{dx}{dt} = ax + by$$
$$\frac{dy}{dt} = cx + dy$$

como

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

o abreviado

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY},$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La matriz **A** de los coeficientes del sistema se llama **matriz de coeficientes**.

Una ventaja de la notación matricial es que nos ayuda a ver las similitudes entre los sistemas de primer orden y las ecuaciones lineales de primer orden. Trabajar con matrices nos da también algunas herramientas algebraicas útiles que utilizaremos en todo el capítulo.

La notación vectorial puede extenderse para incluir sistemas con cualquier número n de variables dependientes $y_1, y_2, \ldots, y_n$. El sistema lineal (coeficientes constantes) con n variables dependientes es

$$\frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n$$
$$\frac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\frac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n.$$

En este caso, los coeficientes de este sistema son $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$. Si

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \text{entonces} \quad \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} \end{pmatrix}.$$

La matriz de coeficientes es la matriz $n \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

y tenemos

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{pmatrix}.$$

El número de variables dependientes se denomina la **dimensión** del sistema, por lo que éste es n-**dimensional**. Por ejemplo, el sistema tridimensional

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2}x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = z$$
$$\frac{dz}{dt} = -x - y + 2z$$

puede escribirse como

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY},$$

donde

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En este texto trataremos principalmente con sistemas planos o dimensionales. Sin embargo, los lectores familiarizados con el álgebra lineal reconocerán que muchos de los conceptos que veremos pueden extrapolarse a sistemas de mayores dimensiones con poca o ninguna modificación.

Los sistemas lineales son como otros sistemas de ecuaciones diferenciales, sólo que más simples. Todos los métodos del capítulo 2 son aplicables y los usaremos para entender los campos vectoriales, los campos de direcciones y las gráficas de soluciones asociadas. Además, como los sistemas lineales son simples algebraicamente, es razonable esperar que podamos "leer" el comportamiento de las soluciones a partir de los coeficientes. Es decir, si nos dan el sistema lineal plano

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY}, \quad \text{donde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

es la matriz de los coeficientes, entonces nos gustaría entender totalmente el sistema si conocemos los cuatro números a, b, c y d. De hecho, incluso podríamos obtener una fórmula explícita para la solución general. A partir de los cuatro números a, b, c y d podemos dar una descripción geométrica del comportamiento de las soluciones en el plano x-y, describir las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ de las soluciones y aun dar una fórmula para la solución general. Por consiguiente, podemos producir fórmulas explícitas que resuelvan cualquier problema de valor inicial.

Puntos de equilibrio de sistemas lineales y el determinante

Comenzamos buscando las soluciones más simples, es decir, las soluciones de equilibrio. Recuerde que un punto $\mathbf{Y}_0 = (x_0, y_0)$ es un punto de equilibrio de un sistema si y sólo si el campo vectorial en $\mathbf{Y}_0$ es el vector cero. Como el campo vectorial de un sistema en el punto $\mathbf{Y}_0$ está dado por el lado derecho de la ecuación diferencial evaluada en ese punto como

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY}$$

para un sistema lineal, sabemos que el campo vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{Y}_0)$ en $\mathbf{Y}_0$ para esos sistemas está dado por

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y}_0) = \mathbf{AY}_0.$$

Dicho de otro modo, el vector en $\mathbf{Y}_0$ se calcula tomando el producto de la matriz $\mathbf{A}$ y el vector $\mathbf{Y}_0$. En consecuencia, los puntos de equilibrio son los puntos $\mathbf{Y}_0$ tales que

$$\mathbf{AY}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_0 + by_0 \\ cx_0 + dy_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Escrita en forma escalar, esta ecuación vectorial es un par de ecuaciones lineales simultáneas

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 = 0 \\ cx_0 + dy_0 = 0. \end{cases}$$

$(x_0, y_0) = (0, 0)$ es una solución de esas ecuaciones. Por tanto, $\mathbf{Y}_0 = (0, 0)$ es un punto de equilibrio y la función constante

$$\mathbf{Y}(t) = (0, 0) \quad \text{para toda } t$$

es una solución del sistema lineal. A ésta suele llamársele la **solución trivial** del sistema. (Note que este cálculo no depende de los valores de los coeficientes a, b, c y d. En otras palabras, *todo* sistema lineal tiene un punto de equilibrio en el origen.)

Cualesquier puntos de equilibrio (x_0, y_0) deben también satisfacer

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 = 0 \\ cx_0 + dy_0 = 0. \end{cases}$$

Para encontrarlos, supongamos por ahora que $a \neq 0$. Usando la primera ecuación, obtenemos

$$x_0 = -\frac{b}{a} y_0.$$

La segunda ecuación da entonces

$$c\left(-\frac{b}{a}\right) y_0 + dy_0 = 0,$$

que puede escribirse como

$$(ad - bc)y_0 = 0.$$

Entonces, $y_0 = 0$ o $ad - bc = 0$. Si $y_0 = 0$, entonces $x_0 = 0$ y de nuevo tenemos la solución trivial. Por tanto, un sistema lineal tiene puntos de equilibrio no triviales sólo si $ad - bc = 0$. Esta cantidad, $ad - bc$, es un número en particular importante asociado con la matriz $\mathbf{A}$ de 2×2.

DEFINICIÓN El **determinante** de una matriz de 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

es el número $ad - bc$ que se denota por de $\mathbf{A}$. ■

Con esta definición, podemos resumir los resultados de los cálculos anteriores para los puntos de equilibrio de sistemas lineales.

TEOREMA Si $\mathbf{A}$ es una matriz con det $\mathbf{A} \neq 0$, entonces el único punto de equilibrio para el sistema lineal $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{AY}$ es el origen. ■

El argumento anterior prueba este teorema, toda vez que el elemento izquierdo superior a de $\mathbf{A}$ no sea cero, pero no hay nada especial acerca de este elemento. Por pasos similares podemos obtener el mismo resultado siempre que por lo menos uno de los elementos de A no sea cero (vea el ejercicio 14). Si todos los elementos de $\mathbf{A}$ son cero, entonces cada punto del plano es un punto de equilibrio.

Por ejemplo, suponga que

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Entonces det $\mathbf{A} = (2)(0.3) - (1)(-4) = 4.6$. Como det $\mathbf{A} \neq 0$, el único punto de equilibrio para el sistema lineal $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{AY}$ es el origen $(0, 0)$.

Una propiedad importante del determinante

El determinante es una cantidad que aparecerá a menudo en este capítulo. Para nosotros su importancia reside en que sea o no igual a cero. Si tomamos al azar cuatro números a, b, c y d, es improbable que el número $ad - bc$ sea exactamente cero. Las matrices cuyo determinante es cero se llaman **singulares** o **degeneradas.**

Del teorema que acabamos de ver, sabemos que, si un sistema lineal $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{AY}$ es **no degenerado** (det $\mathbf{A} \neq 0$), en tal caso tendrá exactamente un punto de equilibrio, que es (0, 0). En otras palabras, una condición inicial de (0, 0) corresponde a una curva solución con asiento en (0, 0) para todo tiempo. Cualquier otra condición inicial conduce a una solución que se modifica con el tiempo.

En la sección 3.2 usaremos de nuevo los determinantes, por lo que es importante entender exactamente qué verificamos cuando justificamos este teorema. Para sistemas lineales, los puntos de equilibrio corresponden a puntos $\mathbf{Y}_0$ para los cuales

$$\mathbf{AY}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escrita en términos de escalares, esta ecuación vectorial es idéntica al sistema de ecuaciones lineales simultáneas

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 = 0 \\ cx_0 + dy_0 = 0. \end{cases}$$

Lo que en realidad verificamos es que este sistema de ecuaciones tiene **soluciones no triviales**, es decir, soluciones diferentes de (0, 0), si y sólo si det $\mathbf{A} = 0$.

El principio de linealidad

Las soluciones de los sistemas lineales poseen propiedades especiales que las de los sistemas arbitrarios no tienen. Y son tan útiles que las aprovecharemos en múltiples ocasiones. De hecho ésa es exactamente la razón por la que tenemos tanto éxito en el análisis de sistemas lineales.

Sin embargo, aquí cabe una advertencia: es importante asegurarnos que el sistema en consideración *es* realmente lineal antes de aplicar cualquiera de esas propiedades especiales. Esto es equivalente a asegurarnos de que el automóvil está en reversa antes de tratar de salir del estacionamiento. Ya que si está en primera en vez de en reversa habrá serias consecuencias.

La propiedad más importante de los sistemas lineales es el **principio de linealidad.**

PRINCIPIO DE LINEALIDAD Supongamos que $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{AY}$ es un sistema lineal de ecuaciones diferenciales.

1. Si $\mathbf{Y}(t)$ es una solución de este sistema y k es cualquier constante, entonces $k\mathbf{Y}(t)$ es también una solución.
2. Si $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$ son dos soluciones de este sistema, entonces $\mathbf{Y}_1(t) + \mathbf{Y}_2(t)$ es también una solución. ■

Usando el principio de linealidad (llamado también el **principio de superposición**) podemos construir un número infinito de nuevas soluciones a partir de cualquier solución o par de soluciones dadas. Si las dos partes del principio de linealidad se toman en con-

junto, implican que si $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$ son soluciones del sistema y si k_1 y k_2 son cualesquier constantes, entonces

$$k_1\mathbf{Y}_1(t) + k_2\mathbf{Y}_2(t)$$

es también una solución. La forma $k_1\mathbf{Y}_1(t) + k_2\mathbf{Y}_2(t)$ se llama una **combinación lineal** de las soluciones $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$. Con dos soluciones, podemos producir un número infinito de resultados formando combinaciones lineales de ellas dos.

Por ejemplo, consideremos el sistema lineal parcialmente desacoplado

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

En la sección 2.3 encontramos que

$$\mathbf{Y}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Y}_2(t) = \begin{pmatrix} -e^{-4t} \\ 2e^{-4t} \end{pmatrix}$$

son soluciones de este sistema. Podemos volver a comprobarlo calculando directamente ambos lados, $d\mathbf{Y}/dt$ y $\mathbf{AY}$, de la ecuación diferencial. Por ejemplo, con $\mathbf{Y}_1(t)$ tenemos

$$\frac{d\mathbf{Y}_1}{dt} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{AY}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix},$$

por lo que $\mathbf{Y}_1(t)$ es una solución. (También debe cotejar que $\mathbf{Y}_2(t)$ lo es. La verificación es siempre aconsejable al tratar con la aritmética matricial.)

Las curvas solución para $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$ se muestran en la figura 3.5. Note que cada una es un segmento de línea en el plano x-y. La curva solución para $\mathbf{Y}_1(t)$ tiende al punto de equilibrio en el origen cuando $t \to -\infty$; y para $\mathbf{Y}_2(t)$ tiende al punto de equilibrio en el origen cuando $t \to \infty$. En la sección siguiente aprovecharemos la geometría de soluciones como ésta para encontrarlas usando sólo procedimientos algebraicos.

El principio de linealidad nos dice que cualquier función de la forma $k_1\mathbf{Y}_1(t) + k_2\mathbf{Y}_2(t)$ es también una solución de este sistema para cualesquier constantes k_1 y k_2. Para

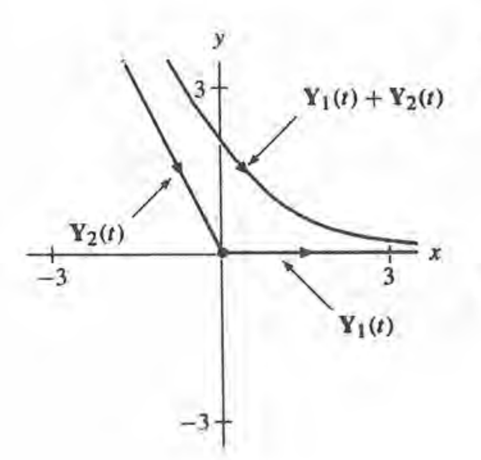


Figura 3.5
El principio de linealidad implica que la función $\mathbf{Y}_1(t) + \mathbf{Y}_2(t)$ es una solución del sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$$

porque es la suma de las dos soluciones $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$.

ilustrar esto, verificamos directamente que $\mathbf{Y}_3(t) = -2\mathbf{Y}_1(t) + 5\mathbf{Y}_2(t)$ es una solución. Observe que

$$\mathbf{Y}_3(t) = -2\mathbf{Y}_1(t) + 5\mathbf{Y}_2(t) = -2\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} -e^{-4t} \\ 2e^{-4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{2t} - 5e^{-4t} \\ 10e^{-4t} \end{pmatrix},$$

y por tanto

$$\frac{d\mathbf{Y}_3}{dt} = \begin{pmatrix} -4e^{2t} + 20e^{-4t} \\ -40e^{-4t} \end{pmatrix}.$$

Calculamos también

$$\begin{aligned} \mathbf{AY}_3 &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2e^{2t} - 5e^{-4t} \\ 10e^{-4t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(-2e^{2t} - 5e^{-4t}) + 3(10e^{-4t}) \\ -4(10e^{-4t}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4e^{2t} + 20e^{-4t} \\ -40e^{-4t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como ambos cálculos dan la misma función, esta combinación lineal de las dos soluciones $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$ es también una solución. (En el futuro no verificaremos por duplicado las consecuencias del principio de linealidad.)

De nuevo recalcamos que las curvas solución para las soluciones $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$ poseen una propiedad geométrica muy especial y útil. Por lo general, el hecho de que ellas formen segmentos de líneas no es común en las curvas solución. De hecho, la curva solución generada en este sistema no es una línea recta. Por ejemplo, como vemos en la figura 3.5, la curva solución de la solución $\mathbf{Y}_1(t) + \mathbf{Y}_2(t)$ no es recta.

Verificación del principio de linealidad

Para mostrar que el principio de linealidad es válido en general, primero estableceremos las dos siguientes propiedades algebraicas de la multiplicación matricial:

1. Si $\mathbf{A}$ es una matriz y $\mathbf{Y}$ es un vector, entonces

$$\mathbf{A}(k\mathbf{Y}) = k\mathbf{AY}$$

para cualquier constante k.

2. Si $\mathbf{A}$ es una matriz y $\mathbf{Y}_1$ y $\mathbf{Y}_2$ son vectores, entonces

$$\mathbf{A}(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2) = \mathbf{AY}_1 + \mathbf{AY}_2.$$

Podemos comprobar estos dos enunciados para matrices de 2×2 y vectores dimensionales por cálculo directo. Por ejemplo, para la propiedad 2, sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

una matriz arbitraria de 2×2 y sean

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

vectores arbitrarios. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) \\ c(x_1 + x_2) + d(y_1 + y_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2 \\ cx_1 + cx_2 + dy_1 + dy_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{AY}_1 + \mathbf{AY}_2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ cx_1 + dy_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ax_2 + by_2 \\ cx_2 + dy_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2 \\ cx_1 + cx_2 + dy_1 + dy_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto, se cumple la propiedad 2. El cotejo de la propiedad 1 se deja como ejercicio (vea el ejercicio 30).

Dadas esas propiedades algebraicas de la multiplicación matricial, podemos verificar el principio de linealidad usando las reglas estándar de la diferenciación. Digamos que $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$ son soluciones de $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{AY}$; es decir, que

$$\frac{d\mathbf{Y}_1}{dt} = \mathbf{AY}_1 \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{Y}_2}{dt} = \mathbf{AY}_2 \quad \text{para toda } t.$$

Para cualquier constante k tenemos

$$\frac{d(k\mathbf{Y}_1)}{dt} = k\frac{d\mathbf{Y}_1}{dt} = k\mathbf{AY}_1 = \mathbf{A}(k\mathbf{Y}_1),$$

por lo que $k\mathbf{Y}_1(t)$ es una solución del sistema. Además

$$\frac{d(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2)}{dt} = \frac{d\mathbf{Y}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{Y}_2}{dt} = \mathbf{AY}_1 + \mathbf{AY}_2 = \mathbf{A}(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2) \quad \text{para toda } t.$$

Como resultado, $\mathbf{Y}_1(t) + \mathbf{Y}_2(t)$ es también una solución y el principio de linealidad queda verificado. Podemos ver la ventaja de la notación matricial y vectorial. Escribir de manera explícita las ecuaciones anteriores mostrando todas las componentes sería una tarea tediosa; de hecho hay un ejercicio tedioso al final de esta sección (vea el ejercicio 30).

Resolución de problemas de valor inicial

Del principio de linealidad sabemos que, dadas dos soluciones $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$, podemos formar muchas más soluciones de la forma $k_1\mathbf{Y}_1(t) + k_2\mathbf{Y}_2(t)$ para cualesquier constantes k_1 y k_2. Este tipo de expresión se llama una *familia de soluciones de dos parámetros*, puesto que tenemos dos constantes k_1 y k_2 que podemos ajustar para obtener varias soluciones. Es razonable preguntar si ésas son todas o, dicho de otra manera, si cada solución es de esta forma.

Para aprender a utilizar el principio de linealidad en la resolución de problemas de valor inicial, volvemos a la ecuación diferencial

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$$

que fue analizada antes en esta sección. Supongamos que queremos encontrar la solución $\mathbf{Y}(t)$ de este sistema con valor inicial $\mathbf{Y}(0) = (2, -3)$. Sabemos que

$$\mathbf{Y}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Y}_2(t) = \begin{pmatrix} -e^{-4t} \\ 2e^{-4t} \end{pmatrix}$$

son soluciones y por evaluación directa deducimos que

$$\mathbf{Y}_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Y}_2(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

por lo que ni $\mathbf{Y}_1(t)$ ni $\mathbf{Y}_2(t)$ es la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Pero el principio de linealidad dice que podemos formar cualquier combinación lineal de $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$ y tener una solución adicional. Por consiguiente, buscamos k_1 y k_2 tales que

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Esta ecuación vectorial es equivalente a las ecuaciones simultáneas

$$\begin{cases} k_1 - k_2 = 2 \\ 2k_2 = -3. \end{cases}$$

La segunda ecuación da $k_2 = -3/2$ y, en consecuencia, la primera da $k_1 = 1/2$. Este cálculo implica que

$$\frac{1}{2}\mathbf{Y}_1(0) - \frac{3}{2}\mathbf{Y}_2(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

por lo que consideramos la función

$$\mathbf{Y}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{Y}_1(t) - \frac{3}{2}\mathbf{Y}_2(t)$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -e^{-4t} \\ 2e^{-4t} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{2}e^{-4t} \\ -3e^{-4t} \end{pmatrix}.$$

Esta función tiene la condición inicial correcta, y por el principio de linealidad sabemos que debe ser una solución del sistema. El teorema de unicidad nos dice que es la única función que resuelve el problema de valor inicial (vea la sección 2.4).

En este ejemplo encontramos la solución del problema de valor inicial usando las dos soluciones que ya teníamos del sistema más un poco de aritmética (pero no cálculo). Tomando la combinación lineal apropiada de las dos soluciones conocidas, pudimos encontrar una solución con una condición inicial arbitraria.

Tal vez tuvimos suerte. ¿Podremos siempre encontrar las apropiadas k_1 y k_2, independientemente de qué condición inicial tengamos? Para comprobarlo, consideremos la misma ecuación diferencial con una condición inicial arbitraria,

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

y las dos soluciones $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$ con que empezamos. Primero necesitamos encontrar k_1 y k_2 de manera que

$$k_1\mathbf{Y}_1(0) + k_2\mathbf{Y}_2(0) = \mathbf{Y}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

En otras palabras, dadas x_0 y y_0 arbitrarias, ¿podemos siempre encontrar k_1 y k_2 tales que

$$k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}?$$

Esta ecuación vectorial es equivalente al sistema de ecuaciones simultáneas

$$\begin{cases} k_1 - k_2 = x_0 \\ 2k_2 = y_0. \end{cases}$$

Como la segunda ecuación es tan sencilla, siempre podemos encontrar k_1 y k_2, dadas x_0 y y_0. Usamos primero la segunda ecuación para encontrar k_2 y luego, usando este valor, obtenemos k_1 en la primera ecuación.

Como podemos resolver todo tipo de problema de valor inicial para el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{Y}$$

usando una combinación lineal de

$$\mathbf{Y}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Y}_2(t) = \begin{pmatrix} -e^{-4t} \\ 2e^{-4t} \end{pmatrix},$$

hemos encontrado la solución general de este sistema. Se trata de la familia de dos parámetros

$$\mathbf{Y}(t) = k_1\mathbf{Y}_1(t) + k_2\mathbf{Y}_2(t) = k_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -e^{-4t} \\ 2e^{-4t} \end{pmatrix}.$$

Usando la adición vectorial, esta familia puede escribirse como

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} k_1 e^{2t} - k_2 e^{-4t} \\ 2k_2 e^{-4t} \end{pmatrix}.$$

Independencia lineal

Observe que en este ejemplo usamos el principio de linealidad para producir un número infinito de soluciones a partir de dos de ellas $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$. Entonces, como pudimos expresar una condición inicial arbitraria como una combinación lineal de $\mathbf{Y}_1(0)$ y $\mathbf{Y}_2(0)$, fue posible usar $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$ para formar la solución general.

Expresar vectores arbitrarios como combinaciones lineales de vectores dados es un tema fundamental del álgebra lineal. En el caso dimensional, la propiedad clave que garantiza que un vector arbitrario puede escribirse como alguna combinación lineal de los vectores dados (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es que *no* se encuentran sobre la misma línea que pasa por el origen. (Vea que en el ejemplo previo las condiciones iniciales $(1, 0)$ y $(-1, 2)$ no se encuentran sobre esa misma línea; vea la figura 3.6.) Decimos que los dos vectores (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son **linealmente independientes** si no se encuentran sobre la línea que pasa por el origen o, en forma equivalente, si ninguno de ellos es un múltiplo del otro.

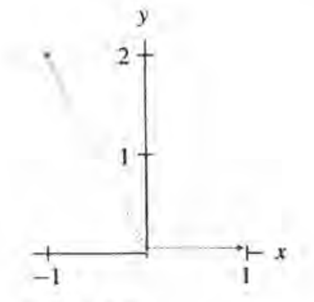


Figura 3.6
Los vectores $(1, 0)$ y $(-1, 2)$ son linealmente independientes.

TEOREMA Supongamos que (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos vectores linealmente independientes en el plano. Entonces, dado cualquier vector (x_0, y_0), existen k_1 y k_2 tales que

$$k_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Dos vectores linealmente independientes pueden combinarse por adición y multiplicación escalar para formar cualquier otro vector en el plano.

Note que la ecuación

$$k_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

es realmente un sistema simultáneo de dos ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 k_1 + x_2 k_2 = x_0 \\ y_1 k_1 + y_2 k_2 = y_0 \end{cases}$$

en las dos incógnitas k_1 y k_2. A partir de las x y y que nos dan, debemos despejar las k. Podemos demostrar que hay soluciones escribiendo fórmulas para k_1 y k_2 en términos de las x y y. Mientras no sean cero los denominadores en esas fórmulas, las soluciones existen. La resolución de sistemas de ecuaciones de esta forma implica el mismo tipo de álgebra

usado para encontrar los puntos de equilibrio en los sistemas lineales. Por ello no debe sorprender que el determinante también aquí juegue un papel importante (vea los ejercicios 31 y 32.)

La solución general

El ejemplo y teorema previos ilustran la manera en que abordamos todo sistema lineal. Por tanto, vale la pena resumir el análisis.

TEOREMA Supongamos que $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$ son soluciones del sistema lineal $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{AY}$. Si $\mathbf{Y}_1(0)$ y $\mathbf{Y}_2(0)$ son linealmente independientes, entonces para cualquier condición inicial $\mathbf{Y}(0) = (x_0, y_0)$ podemos encontrar constantes k_1 y k_2 tales que $k_1\mathbf{Y}_1(t) + k_2\mathbf{Y}_2(t)$ es la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY}, \quad \mathbf{Y}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

En esta situación decimos que la familia de dos parámetros $k_1\mathbf{Y}_1(t) + k_2\mathbf{Y}_2(t)$, donde k_1 y k_2 son constantes arbitrarias, es la **solución general** del sistema.

Por el teorema de existencia y unicidad, sabemos que todo problema de valor inicial para un sistema lineal tiene sólo una solución. Dadas dos soluciones cualesquiera $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$ de un sistema lineal con condiciones iniciales linealmente independientes $\mathbf{Y}_1(0)$ y $\mathbf{Y}_2(0)$, podemos obtener la solución general formando la familia biparamétrica $k_1\mathbf{Y}_1(t) + k_2\mathbf{Y}_2(t)$. Ajustando las constantes k_1 y k_2, podemos obtener la solución que satisface cualquier condición inicial dada.

Éste es un progreso excelente. Ahora sabemos que para encontrar todas las soluciones de un sistema lineal, necesitamos hallar sólo dos de ellas cuyas posiciones iniciales sean linealmente independientes. Dos soluciones $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$ de un sistema para el cual $\mathbf{Y}_1(0)$ y $\mathbf{Y}_2(0)$ cumplen dicha condición son llamadas **soluciones linealmente independientes** del sistema lineal. (Veremos en los ejercicios que si $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$ son soluciones que satisfacen esta condición, entonces los vectores $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$ son linealmente independientes para toda t; vea el ejercicio 35.) El siguiente paso es encontrar un método general para obtener dos soluciones linealmente independientes $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$. Gran parte del análisis en las secciones 3.2, 3.4 y 3.5 tiene que ver con los procedimientos involucrados.

Un oscilador armónico no amortiguado

En la sección 2.1 estudiamos el oscilador armónico no amortiguado dado por la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y.$$

Conjeturamos que $y_1(t) = \cos t$ es una solución y luego revisamos nuestra suposición verificando que

$$\begin{aligned} \frac{d^2y_1}{dt^2} + y_1 &= \frac{d^2(\cos t)}{dt^2} + \cos t \\ &= -\cos t + \cos t \\ &= 0. \end{aligned}$$

De manera similar podemos revisar que $y_2(t) = \text{sen}\, t$ es también una solución. Ahora que disponemos del principio de linealidad, podemos llevar este análisis un paso adelante.

La ecuación de segundo orden puede convertirse al sistema de primer orden

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -y,$$

que es un sistema lineal. Usando notación vectorial, escribimos

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ v(t) \end{pmatrix},$$

y el sistema puede representarse como

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

Recuerde que la segunda componente de la función vectorial $\mathbf{Y}(t)$ es $v = dy/dt$. La solución $y_1(t)$ puede utilizarse para formar una función vectorial

$$\mathbf{Y}_1(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\text{sen}\, t \end{pmatrix}.$$

Observe que $\mathbf{Y}_1(t)$ es una solución del sistema porque

$$\frac{d\mathbf{Y}_1}{dt} = \begin{pmatrix} -\text{sen}\, t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Y}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\text{sen}\, t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{sen}\, t \\ -\cos t \end{pmatrix}.$$

Del mismo modo, la solución $y_2(t) = \text{sen}\, t$ para la ecuación de segundo grado da

$$\mathbf{Y}_2(t) = \begin{pmatrix} \text{sen}\, t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

que es también una solución del sistema de primer orden. (Verificar dos veces esta afirmación con la notación matricial es una buena práctica.)

Tenemos un sistema lineal de primer orden con dos variables dependientes. Por tanto, requerimos dos soluciones lineales independientes para obtener la solución general. En $t = 0$,

$$\mathbf{Y}_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Y}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es decir, $\mathbf{Y}_1(0)$ se encuentra sobre el eje y y $\mathbf{Y}_2(t)$ sobre el eje v. En consecuencia, esos vectores son linealmente independientes y la solución general del sistema de primer orden es

$$\mathbf{Y}(t) = k_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Recordemos que las soluciones $\mathbf{Y}(t)$ del sistema de primer orden son en realidad funciones de la forma $\mathbf{Y}(t) = (y(t), v(t))$, donde $y(t)$ es una solución de la ecuación original de segundo orden, y para obtener su solución general empleamos la primera componente de $\mathbf{Y}(t)$. El resultado es

$$y(t) = k_1 \cos t + k_2 \operatorname{sen} t.$$

En la sección 3.6 estudiaremos una manera más directa de encontrar la solución general de ecuaciones de segundo orden como ésta, pero es importante ver que el principio de linealidad también es aplicable a ecuaciones "lineales" de segundo orden como la ecuación de un oscilador armónico amortiguado.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 3.1

Recuerde el modelo

$$\frac{dx}{dt} = ax + by$$
$$\frac{dy}{dt} = cx + dy,$$

para las tiendas de discos CD de Pablo y Roberto, donde $x(t)$ es la ganancia diaria de Pablo, $y(t)$ es la de Roberto y a, b, c y d son parámetros que rigen cómo la ganancia diaria de cada tienda afecta a la otra. En los ejercicios 1-4 se especifican diferentes opciones para los parámetros a, b, c y d. Para cada ejercicio describa en un breve párrafo la interacción entre las tiendas, dados los valores especificados de los parámetros. [Por ejemplo, suponga que $a = 1$, $c = -1$ y $b = d = 0$. Si la tienda de Pablo está obteniendo una ganancia ($x > 0$), entonces ésta se incrementa más rápidamente (porque $ax > 0$). Sin embargo, si Pablo obtiene una ganancia, entonces las de Roberto se ven afectadas (porque $cx < 0$). Como $b = d = 0$, las ganancias en curso de Roberto no influyen en las futuras ganancias de Pablo o de Roberto.]

1. $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$ y $d = -1$

2. $a = 2$, $b = -1$, $c = 0$ y $d = 0$

3. $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$ y $d = 1$

4. $a = -1$, $b = 2$, $c = 2$ y $d = -1$

En los ejercicios 5-7, reescriba el sistema lineal especificado en forma matricial.

5.
$$\frac{dx}{dt} = 2x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = x + y$$

6.
$$\frac{dx}{dt} = 3y$$
$$\frac{dy}{dt} = 3\pi y - 0.3x$$

7.
$$\frac{dp}{dt} = 3p - 2q - 7r$$
$$\frac{dq}{dt} = -2p + 6r$$
$$\frac{dr}{dt} = 7.3q + 2r$$

En los ejercicios 8-9, reescriba el sistema lineal especificado en forma de componentes.

8. $$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2\pi \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

9. $$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Para los sistemas lineales dados en los ejercicios 10-13, esboce (usando cualquier procedimiento) los campos de direcciones, varias soluciones y las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ para la solución con condición inicial $(x, y) = (1, 1)$.

10. $$\frac{dx}{dt} = 2x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = x + y$$

11. $$\frac{dx}{dt} = -2x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = -x - 2y$$

12. $$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2\pi \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

13. $$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

14. Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

una matriz no singular (det $\mathbf{A} \neq 0$).

(a) Demuestre que si $a = 0$, entonces $b \neq 0$ y $c \neq 0$.

(b) Suponga que $a = 0$. Use el resultado del inciso (a) para demostrar que el origen es el único punto de equilibrio.

Junto con la verificación dada en esta sección, este resultado muestra que si det $\mathbf{A} \neq 0$, en ese caso el único punto de equilibrio para el sistema $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{AY}$ es el origen.

15. Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

una matriz no nula. Es decir, suponga que por lo menos uno de sus elementos no es cero. Demuestre que, si det $\mathbf{A} = 0$, entonces el sistema $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{AY}$ tiene una línea completa de puntos de equilibrio. [*Sugerencia*: Primero considere el caso en que $a \neq 0$. La componente x del campo vectorial en un punto (x_0, y_0) es $ax_0 + by_0$. En consecuencia, para que el campo vectorial desaparezca en un punto (x_0, y_0), debemos tener $x_0 = (-b/a)y_0$. Use esta observación y el hecho de que det $\mathbf{A} = 0$ para demostrar que cualquier punto de la forma $(-by_0/a, y_0)$ es un punto de equilibrio. ¿Qué sucede si establecemos que los elementos de $\mathbf{A}$ aparte de a son no nulos?]

16. La forma general de una ecuación lineal de segundo orden homogénea con coeficientes constantes es

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0.$$

(a) Escriba el sistema de primer orden para ésta y escríbalo en forma matricial.
(b) Demuestre que si $q \neq 0$, entonces el origen es el único punto de equilibrio del sistema.
(c) Compruebe que si $q \neq 0$, entonces la única solución de la ecuación de segundo orden con y constante es $y(t) = 0$ para toda t.

17. Considere el sistema lineal correspondiente a la ecuación de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0.$$

(a) Si $q = 0$ y $p \neq 0$, encuentre todos los puntos de equilibrio.
(b) Si $q = p = 0$, encuentre todos los puntos de equilibrio.

18. Convierta la ecuación de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

en un sistema de primer orden usando $v = dy/dt$ como es usual.

(a) Encuentre la solución general para la ecuación dv/dt.
(b) Sustituya esta solución en la ecuación dy/dt y encuentre la solución general del sistema.
(c) Esboce el plano fase del sistema.

19. Convierta la ecuación diferencial de tercer orden

$$\frac{d^3y}{dt^3} + p\frac{d^2y}{dt^2} + q\frac{dy}{dt} + ry = 0,$$

donde p, q y r son constantes, a un sistema lineal tridimensional escrito en forma matricial.

En los ejercicios 20-23, consideramos el siguiente modelo del mercado para casas unifamiliares en una comunidad. Sea $S(t)$ el número de vendedores en el tiempo t, y sea $B(t)$ el número de compradores en el tiempo t. Suponemos que hay niveles naturales de equilibrio entre ellos (gente que se retira, que cambian localidades de trabajo o desean cambiarse de casa por razones familiares). El nivel de equilibrio de vendedores es S_0, y el de compradores es B_0.

Sin embargo, las fuerzas del mercado pueden inducir a la gente a comprar o vender bajo diversas condiciones. Por ejemplo, si el precio de una casa es muy alto, entonces su propietario es tentado a venderla. Si los precios son muy bajos, entrarán compradores adicionales al mercado buscando ofertas favorables. Sea $b(t) = B(t) - B_0$ la desviación del número de compradores respecto al equilibrio en el tiempo t. En ese caso, si $b(t) > 0$, habrá más compradores que el número usual y decimos que es un "mercado de vendedores". Podemos inferir que la competencia de los compradores adicionales para el mismo número de casas en venta forzará los precios hacia arriba (la ley de la oferta y la demanda).

De modo similar, sea $s(t) = S(t) - S_0$ la desviación del número de vendedores respecto al nivel de equilibrio. Si $s(t) > 0$, habrá más vendedores en el mercado de lo normal; y si el número de compradores es bajo, habrá demasiadas casas en el mercado y los precios bajarán, lo que a su vez afecta las decisiones de comprar o vender.

Podemos dar un simple modelo de esta situación como sigue:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ s \end{pmatrix}, \quad \text{donde } \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} b \\ s \end{pmatrix}.$$

Los valores exactos de los parámetros α, β, γ y δ dependen de la economía de una comunidad particular. Sin embargo, si suponemos que todo mundo quiere obtener una oferta favorable al comprar una casa o al venderla, podemos predecir si los parámetros son positivos o negativos aun cuando no conozcamos sus valores exactos.

Use la información anterior para conseguir información sobre los parámetros α, β, γ y δ. Justifique sus respuestas.

20. Si hay un número mayor de compradores compitiendo por las casas, esperaríamos que se elevaran sus precios y esto haría menos probable que entraran al mercado nuevos compradores potenciales. ¿Cómo lo correlaciona con el parámetro α?

21. Si el número de compradores compitiendo por las casas disponibles a la venta es menor, entonces esperaríamos que el precio de las casas disminuyese. En consecuencia, un menor número de vendedores potenciales colocarían sus casas en el mercado. ¿Qué implicaciones tiene esto con respecto al parámetro γ?

22. Tome en cuenta el efecto en el precio de las casas si $s > 0$ y el efecto subsecuente en los compradores y vendedores. Determine luego el signo del parámetro β.

23. Determine el signo más razonable para el parámetro δ.

24. Considere el sistema lineal

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

(a) Demuestre que las dos funciones

$$\mathbf{Y}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Y}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

son soluciones de la ecuación diferencial.

(b) Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y}(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

25. Considere el sistema lineal

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

(a) Demuestre que la función

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ -(t+1)e^{2t} \end{pmatrix}$$

es una solución de la ecuación diferencial.

(b) Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

En los ejercicios 26-29, se especifica una matriz de coeficientes para el sistema lineal

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY}, \quad \text{donde } \mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

También se especifican dos funciones y un valor inicial. Para cada sistema:

(a) Verifique que las dos funciones son soluciones del sistema; si no lo son, deténgase.

(b) Compruebe que las dos soluciones son linealmente independientes; si no lo son, deténgase.

(c) Encuentre la solución del sistema lineal con el valor inicial dado.

26. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

Funciones: $\mathbf{Y}_1(t) = (e^{-3t}, e^{-3t})$
$\mathbf{Y}_2(t) = (e^{-4t}, 2e^{-4t})$

Valor inicial: $\mathbf{Y}(0) = (2, 3)$

27. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

Funciones: $\mathbf{Y}_1(t) = (e^{-3t} - 2e^{-4t}, e^{-3t} - 4e^{-4t})$
$\mathbf{Y}_2(t) = (2e^{-3t} + e^{-4t}, 2e^{-3t} + 2e^{-4t})$

Valor inicial: $\mathbf{Y}(0) = (2, 3)$

28. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

Funciones: $\mathbf{Y}_1(t) = e^{-2t}(\cos 3t, \operatorname{sen} 3t)$
$\mathbf{Y}_2(t) = e^{-2t}(-\operatorname{sen} 3t, \cos 3t)$

Valor inicial: $\mathbf{Y}(0) = (2, 3)$

29. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Funciones: $\mathbf{Y}_1(t) = (-e^{-t} + 12e^{3t}, e^{-t} + 4e^{3t})$
$\mathbf{Y}_2(t) = (-e^{-t}, 2e^{-t})$

Valor inicial: $\mathbf{Y}(0) = (2, 3)$

30. **(a)** Verifique la propiedad 1, $\mathbf{A}k\mathbf{Y} = k\mathbf{A}\mathbf{Y}$ de la multiplicación matricial, donde $\mathbf{Y}$ es un vector (dimensional), $\mathbf{A}$ es una matriz y k es una constante.

(b) Usando la notación escalar, escriba y verifique el principio de linealidad.

31. Demuestre que los vectores (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son linealmente dependientes, es decir, no independientes, si se satisfacen cualquiera de las siguientes condiciones.

(a) Si $(x_1, y_1) = (0, 0)$.

(b) Si $(x_1, y_1) = \lambda(x_2, y_2)$ para alguna constante λ.

(c) Si $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$. *Sugerencia*: Suponga que x_1 no es cero; entonces $y_2 = x_2y_1/x_1$. Pero como $x_2 = x_2x_1/x_1$ podemos usar el inciso (b). Los otros casos son similares. Observe que la cantidad $x_1y_2 - x_2y_1$ es el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}.$$

32. Dados los vectores (x_1, y_1) y (x_2, y_2), demuestre que son linealmente independientes si la cantidad $x_1y_2 - x_2y_1$ es diferente de cero (vea el inciso (c) del ejercicio 31). [*Sugerencia*: Considere que $x_2 \neq 0$. Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) están sobre la misma línea que pasa por $(0, 0)$, en ese caso $(x_1, y_1) = \lambda(x_2, y_2)$ para alguna λ. Pero entonces $\lambda = x_1/x_2$ y $\lambda = y_1/y_2$. ¿Le dice algo esto acerca de x_1/x_2 y y_1/y_2? ¿Qué sucede si $x_2 = 0$?]

33. Suponga que $\mathbf{Y}_1(t) = (-e^{-t}, e^{-t})$ es una solución de algún sistema lineal $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{A}\mathbf{Y}$. ¿Para cuál de las siguientes condiciones iniciales puede dar la solución explícita del sistema lineal?

(a) $\mathbf{Y}(0) = (-2, 2)$ **(b)** $\mathbf{Y}(0) = (3, 4)$ **(c)** $\mathbf{Y}(0) = (0, 0)$ **(d)** $\mathbf{Y}(0) = (3, -3)$

34. El principio de linealidad es una propiedad fundamental de los sistemas de la forma $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{A}\mathbf{Y}$. Sin embargo, no es válido para sistemas que no tienen esta forma, por más simples que sean. Por ejemplo, considere el sistema

$$\frac{dx}{dt} = 1$$
$$\frac{dy}{dt} = x.$$

Los cálculos siguientes muestran que el principio de linealidad no es válido para este sistema.

(a) Demuestre que $\mathbf{Y}(t) = (t, t^2/2)$ es una solución para este sistema.

(b) Y que $2\mathbf{Y}(t)$ *no* es una solución.

En el capítulo 4 veremos el principio de linealidad ampliado aplicable a sistemas como éste.

35. Dadas las soluciones $\mathbf{Y}_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$ y $\mathbf{Y}_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$ del sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{Y}, \quad \text{donde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

definimos el **Wronskiano** de $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$ como la función (escalar)

$$W(t) = x_1(t)y_2(t) - x_2(t)y_1(t).$$

(a) Calcule dW/dt.
(b) Use la premisa de que $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$ son soluciones del sistema lineal para demostrar que

$$\frac{dW}{dt} = (a + d)W(t).$$

(c) Encuentre la solución general de la ecuación diferencial $dW/dt = (a + d)W(t)$.
(d) Suponga que $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$ son soluciones del sistema $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{AY}$. Verifique que si $\mathbf{Y}_1(0)$ y $\mathbf{Y}_2(0)$ son linealmente independientes, entonces $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$ también lo son para toda t.

3.2 SOLUCIONES DE LÍNEA RECTA

En la sección 3.1 analizamos las soluciones de sistemas lineales sin preocuparnos de cómo las obtuvimos. A menudo usamos el método tradicional conocido como "conjetura y prueba". Es decir, hicimos una conjetura y luego la sustituimos en la ecuación para ver si satisfacía al sistema. Sin embargo, este procedimiento no es satisfactorio porque no nos da ninguna idea sobre el origen de las fórmulas resultantes. En esta sección emplearemos la geometría del campo vectorial para encontrar soluciones especiales de sistemas lineales.

Geometría de las soluciones de línea recta

Empezaremos por reconsiderar un ejemplo de la sección previa. El campo de direcciones para el sistema lineal

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY}, \quad \text{donde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

que se muestra en la figura 3.7. Observamos que en el campo de direcciones hay dos líneas especiales que pasan por el origen. La primera es el eje x, sobre el cual apuntan to-

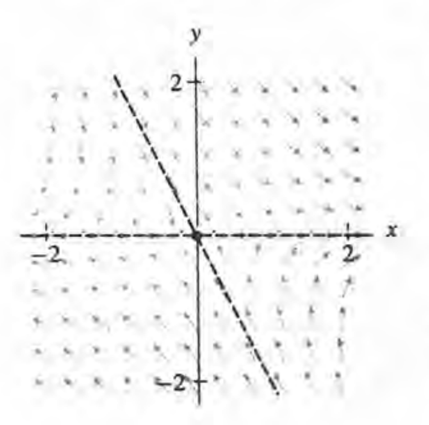


Figura 3.7
Campo de direcciones para el sistema lineal

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{Y}.$$

hay dos líneas especiales por el origen. Sobre el eje x, todos los vectores en el campo de direcciones se alejan del origen. Sobre la línea distinguida que va del segundo al cuarto cuadrante, todos los vectores del campo de direcciones señalan directamente hacia el origen.

dos los vectores en el campo de direcciones y se alejan del origen. La otra línea especial va del segundo al cuarto cuadrante. A lo largo de esta línea, todos los vectores señalan directamente hacia el origen.

Como las curvas solución del sistema son siempre tangentes al campo de direcciones, una solución que tiene su condición inicial sobre el eje x positivo, se mueve hacia la derecha alejándose directamente del origen. Pero cuando la condición inicial está sobre el eje x negativo, se mueve hacia la izquierda y se aparta del origen. Lo mismo ocurre con las soluciones cuyas condiciones iniciales están en el segundo o cuarto cuadrante sobre la otra línea especial; éstas también se desplazan hacia el origen. Así, un examen cuidadoso del campo de direcciones sugiere que hay soluciones del sistema que se encuentran sobre líneas rectas que pasan por el origen en el plano fase.

En la sección 3.1 vimos que

$$\mathbf{Y}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Y}_2(t) = \begin{pmatrix} -e^{-4t} \\ 2e^{-4t} \end{pmatrix}$$

son dos soluciones lineales independientes para el sistema $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{AY}$. Consideremos ahora la geometría de ambas en el plano fase.

Para trazar la curva solución de $\mathbf{Y}_1(t)$, note que la coordenada x de $\mathbf{Y}_1(t)$ es e^{2t} y la coordenada y de $\mathbf{Y}_1(t)$ es siempre 0. La curva solución se encuentra entonces sobre el eje x positivo. Además, $\mathbf{Y}_1(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$, y $\mathbf{Y}_1(t)$ tiende al origen cuando $t \to -\infty$. Por lo tanto, $\mathbf{Y}_1(t)$ es una solución que tiende a alejarse directamente del origen a lo largo del eje x.

Para $\mathbf{Y}_2(t)$, es conveniente reescribir esta solución en la forma

$$\mathbf{Y}_2(t) = e^{-4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Esta representación nos dice que, cuando t varía, $\mathbf{Y}_2(t)$ es siempre un múltiplo escalar (positivo) del vector $(-1, 2)$. Como los múltiplos escalares positivos de un vector fijo siempre se encuentran sobre el mismo rayo desde el origen, vemos que $\mathbf{Y}_2(t)$ parametriza el rayo desde $(0, 0)$ con pendiente -2 en el cuarto cuadrante (vea la figura 3.7). Cuando $t \to \infty$, $e^{-4t} \to 0$, por lo que esta solución tiende hacia el origen.

Vemos que las fórmulas para $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$ confirman lo que conjeturamos al observar el campo de direcciones. Hay soluciones de este sistema que se encuentran sobre dos líneas rectas distinguidas en el plano fase.

Las soluciones de línea recta son las más simples (aparte de los puntos de equilibrio) de los sistemas de ecuaciones diferenciales; y cuando se mueven en el plano x-y a lo largo de líneas rectas, es importante recordar que la rapidez de su desplazamiento depende de su posición sobre la línea. En este ejemplo, se dirigen a $(0, 0)$ o escapan a ∞ con una razón exponencial, como puede verse en las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ de las soluciones (vea las figuras 3.8 y 3.9).

De la geometría al álgebra de las soluciones de línea recta

Suponiendo que el sistema posee soluciones de línea recta (desgraciadamente, no todos las tienen), centraremos nuestra atención en encontrar fórmulas para ellas. La observación geométrica básica es que, en el trayecto de una solución de línea recta que pasa por el origen, el campo vectorial debe señalar hacia ese punto o alejarse en forma directa de él $(0, 0)$

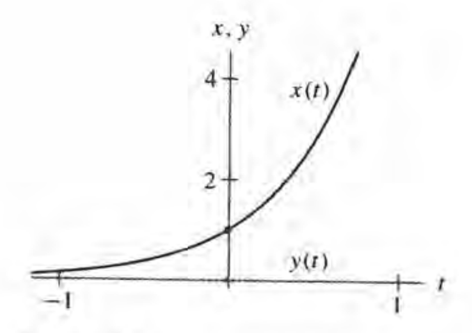


Figura 3.8
Gráficas $x(t)$ y $y(t)$ de la solución en línea recta

$$\mathbf{Y}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Figura 3.9
Gráficas $x(t)$ y $y(t)$ de la solución en línea recta

$$\mathbf{Y}_2(t) = \begin{pmatrix} -e^{-4t} \\ 2e^{-4t} \end{pmatrix}.$$

(vea la figura 3.7). Es decir, si $\mathbf{V} = (x, y)$ está sobre una solución de línea recta, entonces el campo vectorial en (x, y) debe apuntar en la misma dirección o exactamente en la dirección opuesta que el vector de $(0, 0)$ a (x, y).

Convertimos ahora esta observación en una ecuación que podamos resolver para encontrar soluciones de línea recta. Para un sistema lineal de la forma $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{AY}$, el campo vectorial en $\mathbf{V} = (x, y)$ es el producto $\mathbf{AV}$ de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{V}$, que en este ejemplo es

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Por tanto, buscamos vectores $\mathbf{V} = (x, y)$ tales que $\mathbf{AV}$ apunte en la misma o en la dirección opuesta que el vector de $(0, 0)$ a (x, y) o, de manera equivalente, para los cuales haya algún número λ tal que

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda > 0$, entonces el campo vectorial señala en la misma dirección que (x, y), alejándose de $(0, 0)$. Si $\lambda < 0$, el campo vectorial señala en la dirección opuesta, es decir, hacia $(0, 0)$.

Mediante una notación vectorial, esta ecuación puede abreviarse como

$$\mathbf{AV} = \lambda \mathbf{V},$$

y es importante recordar que *ésta es la ecuación clave para encontrar soluciones de línea recta del sistema lineal $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{AY}$*.

En nuestro ejemplo buscamos vectores $\mathbf{V} = (x, y)$ tales que $\mathbf{AV} = \lambda \mathbf{V}$, que en coordenadas se representa

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Multiplicando tenemos

$$\begin{pmatrix} 2x + 3y \\ -4y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

y podemos reescribirla en la forma

$$\begin{pmatrix} 2x+3y \\ -4y \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que es equivalente al sistema de ecuaciones simultáneas

$$\begin{cases} (2-\lambda)x + 3y = 0 \\ \quad (-4-\lambda)y = 0. \end{cases}$$

Hay una solución trivial para este sistema que es $(x, y) = (0, 0)$. Pero ya sabemos que el origen es una solución de equilibrio para este sistema, por lo que tratar de resolverlo de esta manera no nos da una solución de línea recta. Lo que necesitamos es un resultado diferente de cero (donde por lo menos ni x ni y sean cero).

Para encontrar una solución no cero, es importante partir de que las ecuaciones simultáneas tienen realmente tres incógnitas, x, y y λ, y que debemos determinar λ antes de poder hallar x y y. Si escribimos estos sistemas en forma matricial, tenemos

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & -4-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ahora recordemos que podemos usar el determinante para ver si este sistema de ecuaciones tiene soluciones no triviales (vea la sección 3.1). Sabemos que tienen soluciones no triviales si y sólo si

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & -4-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Por tanto, al calcular este determinante, encontramos que este sistema tiene soluciones no triviales si y sólo si

$$(2-\lambda)(-4-\lambda) - (3)(0) = 0.$$

Este cálculo nos dice que tendremos soluciones no triviales para nuestras ecuaciones sólo si $\lambda = 2$ o si $\lambda = -4$. Los demás valores de λ no dan soluciones de línea recta. (Por cierto, recuerde que nuestras dos soluciones de línea recta $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$ contienen exponenciales de la forma e^{2t} y e^{-4t}. En un momento veremos que la aparición de $\lambda = 2$ y $\lambda = -4$ en los exponentes no es accidental.)

Si $\lambda = -4$, entonces el sistema de ecuaciones simultáneas resulta ser simplemente

$$\begin{cases} 6x + 3y = 0 \\ \qquad 0 = 0. \end{cases}$$

La segunda ecuación siempre es cierta, por lo que sólo necesitamos escoger las x y y que la satisfagan

$$6x + 3y = 0,$$

o bien

$$y = -2x.$$

Hay una línea entera de vectores (x, y) que satisfacen esas ecuaciones y una posible selección es $(x, y) = (-1, 2)$. Vea que $(-1, 2)$ es exactamente la condición inicial para la solución de línea recta

$$\mathbf{Y}_2(t) = e^{-4t}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda = 2$, las ecuaciones simultáneas son

$$\begin{cases} 3y = 0 \\ -2y = 0, \end{cases}$$

y ambas ecuaciones se cumplen si $y = 0$. Entonces, todo vector de la forma $(x, 0)$ con $x \neq 0$ da una solución no trivial. Es decir, en cualquier parte del eje x, el campo vectorial señala su alejamiento de $(0, 0)$ ya que $\lambda = 2 > 0$. Un vector sobre esta línea es $(1, 0)$, que es la condición inicial para la solución de línea recta

$$\mathbf{Y}_1(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eigenvalores y eigenvectores

Regresaremos en seguida a este ejemplo, pero primero generalizaremos esos cálculos de manera que podamos aplicarlos a cualquier sistema lineal. Consideremos el sistema lineal general

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY}.$$

Para encontrar soluciones de línea recta por el origen, debemos encontrar vectores no nulos $\mathbf{V} = (x, y)$ tales que el campo vectorial en $\mathbf{V}$ señale en la misma o en la dirección exacta opuesta a $\mathbf{V} = (x, y)$. Es decir, buscamos vectores no nulos $\mathbf{V} = (x, y)$ que satisfagan la relación

$$\mathbf{AV} = \lambda\mathbf{V}$$

para algún escalar λ. Esta ecuación conduce a la siguiente definición.

DEFINICIÓN Dada una matriz $\mathbf{A}$, un número λ se llama **eigenvector** de $\mathbf{A}$ si existe un vector no nulo $\mathbf{V} = (x, y)$ para el cual

$$\mathbf{AV} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\mathbf{V}.$$

El vector $\mathbf{V}$ se llama **eigenvector** correspondiente al eigenvalor λ. ■

La palabra *eigen* significa en alemán "propio" o "mismo". Un eigenvector es aquel en el que el campo vectorial apunta en la misma dirección o en la opuesta al vector mismo.

Por ejemplo, considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El vector $(6, -2)$ es un eigenvector con el eigenvalor 3 porque

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

El vector $(-1, 1)$ es también un eigenvector con el eigenvalor 1 debido a que

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es importante recordar que ser un eigenvector es una propiedad especial. Para una matriz común, la mayoría de los vectores no son eigenvectores. Por ejemplo $(2, 3)$ no es un eigenvector para **A** porque

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -2 \end{pmatrix},$$

y $(17, -2)$ no es un múltiplo de $(2, 3)$.

Líneas de eigenvectores

Dada una matriz **A**, si **V** es un eigenvector del eigenvalor λ, entonces cualquier múltiplo escalar $k\mathbf{V}$ también es un eigenvector para λ. Para verificar esto, calculamos

$$\mathbf{A}(k\mathbf{V}) = k\mathbf{A}\mathbf{V} = k(\lambda\mathbf{V}) = \lambda(k\mathbf{V}),$$

donde la primera igualdad es una propiedad de la multiplicación matricial y la segunda toma en cuenta que **V** es un eigenvector. Por consiguiente, dado un eigenvector **V** para el eigenvalor λ, la línea entera de vectores que pasan por **V** y el origen son también eigenvectores para λ.

Cálculo de eigenvalores

Para encontrar soluciones de línea recta de sistemas lineales, debemos determinar los eigenvalores y eigenvectores de la correspondiente matriz de coeficientes. Es decir, necesitamos encontrar los vectores $\mathbf{V} = (x, y)$ tales que

$$\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\mathbf{V}.$$

Si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

tenemos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

que se escribe en componentes como

$$\begin{cases} ax + by = \lambda x \\ cx + dy = \lambda y. \end{cases}$$

Queremos entonces soluciones no nulas (x, y) de

$$\begin{cases} (a-\lambda)x + \quad by = 0 \\ \quad cx + (d-\lambda)y = 0. \end{cases}$$

De la condición del determinante que obtuvimos en la sección 3.1 (p. 220), sabemos que este sistema tiene soluciones no triviales si y sólo si

$$\det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Cada vez que calculamos eigenvalores y eigenvectores encontramos esta matriz, por lo que adoptaremos alguna notación para ella. La **matriz identidad** es la de 2×2

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se denomina matriz identidad porque $\mathbf{IV} = \mathbf{V}$ para cualquier vector $\mathbf{V}$. También podemos representarla mediante $\lambda\mathbf{I}$

$$\lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Al determinar la diferencia entre las matrices $\mathbf{A}$ y $\lambda\mathbf{I}$ por sustracción de los elementos correspondientes se obtiene

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}.$$

Nuestra condición de determinante para una solución no trivial de la ecuación $\mathbf{AV} = \lambda\mathbf{V}$ puede entonces escribirse de manera resumida

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Es importante recordar que la matriz $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ es la matriz $\mathbf{A}$ con las lambdas sustraídas de los elementos izquierdo superior y derecho inferior.

El polinomio característico

Para encontrar los eigenvalores de la matriz $\mathbf{A}$, debemos calcular los valores de λ para los que

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Si escribimos esta ecuación en términos de los elementos de $\mathbf{A}$, encontramos

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0,$$

que al desarrollarla da el polinomio cuadrático

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

Este polinomio se llama el **polinomio característico** del sistema. Sus raíces son los eigenvalores de la matriz **A**.

Un polinomio cuadrático siempre tiene dos raíces, pero esas raíces no tienen que ser necesariamente números reales ni tampoco tienen que ser distintas. Si las raíces del polinomio característico no son reales, decimos que la matriz **A** tiene **eigenvalores complejos**. Estudiaremos el comportamiento de soluciones de sistemas con eigenvalores complejos en la sección 3.4, y el caso de dos raíces iguales se considerará en la sección 3.5.

Consideremos la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

que analizamos antes en esta sección, cuyo polinomio característico es

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (2 - \lambda)(-4 - \lambda) - (3)(0) = \lambda^2 + 2\lambda - 8,$$

que tiene raíces $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -4$. Como vimos antes, esos números son los eigenvalores de esta matriz. (Este ejemplo es algo inusual ya que no es necesario desarrollar la expresión $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (2 - \lambda)(-4 - \lambda) - (3)(0)$ en $\lambda^2 + 2\lambda - 8$, para determinar los eigenvalores de **A**.)

Cálculo de eigenvectores

El siguiente paso en el proceso de encontrar soluciones de línea recta de un sistema de ecuaciones diferenciales es determinar los eigenvectores asociados con los eigenvalores. Supongamos que nos dan una matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

y que sabemos que λ es un eigenvalor. Para calcular el eigenvector correspondiente debemos resolver para el vector **V** la ecuación $\mathbf{AV} = \lambda\mathbf{V}$. Si escribimos

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

entonces $\mathbf{AV} = \lambda\mathbf{V}$ resulta un sistema simultáneo de ecuaciones lineales con dos incógnitas, x y y. Las ecuaciones son

$$\begin{cases} ax + by = \lambda x \\ cx + dy = \lambda y. \end{cases}$$

Como λ es un eigenvalor, sabemos que hay por lo menos una línea entera de eigenvectores (x, y) que satisfacen este sistema. Este número infinito de eigenvectores significa que las ecuaciones son redundantes. Es decir, las dos ecuaciones son equivalentes o una de éstas se satisface siempre.

Por ejemplo, supongamos que nos dan la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Encontramos los eigenvalores de **B** hallando las raíces del polinomio característico

$$\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = (2-\lambda)(3-\lambda) - (2)(1) = 0,$$

que da la ecuación cuadrática

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0.$$

Las raíces de este polinomio cuadrático son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 1$, por lo que 1 y 4 son los eigenvalores de **B**.

Para encontrar un eigenvector $\mathbf{V}_1$ para $\lambda_1 = 4$, debemos resolver

$$\mathbf{B}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Reescrito en términos de componentes, esta ecuación es

$$\begin{cases} 2x_1 + 2y_1 = 4x_1 \\ x_1 + 3y_1 = 4y_1, \end{cases}$$

o, de manera equivalente,

$$\begin{cases} -2x_1 + 2y_1 = 0 \\ x_1 - y_1 = 0. \end{cases}$$

Note que esas ecuaciones son redundantes (multiplique ambos lados de la segunda por -2 para obtener la primera). Entonces, todo vector (x_1, y_1) que satisface la segunda ecuación

$$x_1 - y_1 = 0$$

es un eigenvector. Esta ecuación especifica la línea $y_1 = x_1$ en el plano. Cualquier vector diferente de cero sobre esta línea es un eigenvector de **B** que corresponde al eigenvalor $\lambda_1 = 4$. Por ejemplo $(1, 1)$ y $(-\pi, -\pi)$ son dos vectores del número infinito de eigenvectores para **B** relacionados con el eigenvalor $\lambda_1 = 4$.

Para $\lambda_2 = 1$ debemos resolver

$$\mathbf{B}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

En términos de coordenadas, esta ecuación vectorial es la misma que el sistema

$$\begin{cases} 2x_2 + 2y_2 = x_2 \\ x_2 + 3y_2 = y_2 \end{cases}$$

o, de manera semejante,

$$\begin{cases} x_2 + 2y_2 = 0 \\ x_2 + 2y_2 = 0. \end{cases}$$

De nueva cuenta, esas ecuaciones son redundantes. Entonces, los eigenvectores que pertenecen al eigenvalor $\lambda_2 = 1$ son los vectores no cero (x_2, y_2) que se encuentran sobre la línea $y_2 = -x_2/2$.

Soluciones de línea recta

Después de toda el álgebra de las últimas páginas, es tiempo de retornar al estudio de las ecuaciones diferenciales. Para resumir todo lo que hemos visto hasta ahora, supongamos que nos dan el sistema lineal

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY}.$$

Es preciso determinar primero los eigenvalores de $\mathbf{A}$ y luego sus eigenvectores asociados. Una vez que tenemos esta información, hemos determinado las soluciones de línea recta.

Para hacerlo, supongamos que λ es un eigenvalor con eigenvector asociado $\mathbf{V} = (x, y)$. Luego consideremos la función

$$\mathbf{Y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{V} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t}x \\ e^{\lambda t}y \end{pmatrix}.$$

Para cada t, $\mathbf{Y}(t)$ es un múltiplo escalar de nuestro eigenvector (x, y), por lo que la curva dada por $\mathbf{Y}(t)$ se encuentra sobre el rayo desde el origen por (x, y). Además, podemos comprobar que $\mathbf{Y}(t)$ es una solución sustituyéndola en la ecuación diferencial. Calculamos

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} e^{\lambda t}x \\ e^{\lambda t}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e^{\lambda t}x \\ \lambda e^{\lambda t}y \end{pmatrix} = \lambda\mathbf{Y}(t).$$

Por otra parte, tenemos

$$\mathbf{AY}(t) = \mathbf{A}e^{\lambda t}\mathbf{V} = e^{\lambda t}\mathbf{AV} = e^{\lambda t}\lambda\mathbf{V} = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{V} = \lambda\mathbf{Y}(t)$$

puesto que $\mathbf{V}$ es un eigenvector de $\mathbf{A}$. Comparando los resultados de esos dos cálculos, vemos que

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY},$$

de modo que $\mathbf{Y}(t)$ sí es una solución.

Ésta es una observación importante: obtenemos fórmulas para soluciones de línea recta usando los eigenvalores y eigenvectores de la matriz $\mathbf{A}$.

A veces nos puede ir mejor aún. Suponga que encontramos dos eigenvalores reales y distintos λ_1 y λ_2 para el sistema con eigenvectores $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$, respectivamente. Como $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ son eigenvectores para diferentes eigenvalores, ellos deben ser linealmente independientes; es decir, cualquier múltiplo escalar de $\mathbf{V}_1$ es un eigenvector asociado con λ_1. En consecuencia, $\mathbf{V}_2$ no se encuentra sobre la línea que cruza el origen y que está determinada por $\mathbf{V}_1$, por lo tanto $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ son linealmente independientes. Resulta entonces que las dos soluciones

$$\mathbf{Y}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\mathbf{V}_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{Y}_2(t) = e^{\lambda_2 t}\mathbf{V}_2$$

son linealmente independientes. Por tanto, usando el principio de linealidad, la solución general del sistema es $k_1\mathbf{Y}_1(t) + k_2\mathbf{Y}_2(t) = k_1e^{\lambda_1 t}\mathbf{V}_1 + k_2e^{\lambda_2 t}\mathbf{V}_2$.

TEOREMA Suponga que la matriz **A** tiene un eigenvalor real λ con eigenvector asociado **V**. Entonces el sistema lineal $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{AY}$ tiene la solución de línea recta

$$\mathbf{Y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{V}.$$

Más aún, si λ_1 y λ_2 son eigenvalores reales y distintos, cuyos eigenvectores respectivos son $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$, entonces las soluciones $\mathbf{Y}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{Y}_2(t) = e^{\lambda_2 t}\mathbf{V}_2$ son linealmente independientes y

$$\mathbf{Y}(t) = k_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{V}_1 + k_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{V}_2$$

es la solución general del sistema. ■

Éste es un poderoso teorema. Nos permite hallar soluciones de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales usando sólo álgebra. Todo lo que tenemos que hacer es encontrar un eigenvalor y un eigenvector asociado. No hay que llevar a cabo integraciones tediosas o imposibles. (Es preciso advertir que el eigenvalor debe ser real; trataremos el caso de los eigenvalores complejos en la sección 3.4.)

El teorema también proporciona de manera explícita la solución general de ciertos sistemas lineales, es decir, de aquellos con eigenvalores reales y distintos. En la sección 3.5 trataremos el caso en el que los eigenvalores de **A** son reales pero no distintos.

Juntando todo lo visto hasta aquí

Combinemos ahora la geometría del campo de direcciones con el álgebra de esta sección para producir la solución general de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales. Consideremos el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{BY} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{Y}.$$

El campo de direcciones para este sistema se muestra en la figura 3.10. Se ve que hay dos líneas distinguidas de eigenvectores, una diagonal que atraviesa el primer y tercer cuadrantes y otra que va por el segundo y cuarto cuadrantes. Los eigenvalores asociados son positivos ya que el campo de direcciones se aleja del origen.

Para encontrar las fórmulas de las soluciones de línea recta, empleamos los eigenvectores y eigenvalores de **B**, que calculamos antes en esta sección. Los eigenvalores de

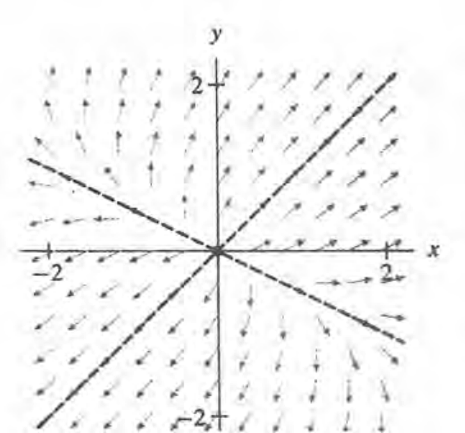


Figura 3.10
El campo de direcciones para el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{BY} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{Y}.$$

Note las dos líneas distinguidas de eigenvectores. La del primer cuadrante corresponde a la solución $\mathbf{Y}_1(t) = e^{4t}(1, 1)$ y la del segundo cuadrante, a la solución $\mathbf{Y}_2(t) = e^{t}(-2, 1)$.

B son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 1$. Los eigenvectores $\mathbf{V}_1 = (x_1, y_1)$ asociados con λ_1 satisfacen la ecuación $y_1 = x_1$ y los eigenvectores $\mathbf{V}_2 = (x_2, y_2)$ asociados con λ_2 satisfacen la ecuación $y_2 = -x_1/2$. En particular, podemos seleccionar los vectores $\mathbf{V}_1 = (1, 1)$ y $\mathbf{V}_2 = (-2, 1)$ para producir dos soluciones de línea recta linealmente independientes. La solución general es

$$\mathbf{Y}(t) = k_1 e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 e^{t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vea que no hay nada significante acerca de nuestra elección de $\mathbf{V}_1 = (1, 1)$ y $\mathbf{V}_2 = (-2, 1)$. Para $\mathbf{V}_1$ podemos utilizar cualquier eigenvector asociado con el eigenvalor $\lambda_1 = 4$ y para $\mathbf{V}_2$, cualquier eigenvector asociado con el eigenvalor $\lambda_2 = 1$.

Un oscilador armónico

Consideremos el oscilador armónico con masa $m = 1$, constante de resorte $k = 10$ y coeficiente de amortiguamiento $b = 7$. La ecuación de segundo orden que modela este oscilador es

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 7\frac{dy}{dt} + 10y = 0,$$

y el correspondiente sistema es

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{C}\mathbf{Y}, \qquad \text{donde } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}.$$

El retrato fase se muestra en la figura 3.11. Al parecer, existen soluciones de línea recta para este sistema.

El polinomio característico para el sistema es

$$(-\lambda)(-7 - \lambda) + 10 = \lambda^2 + 7\lambda + 10,$$

y los eigenvalores son $\lambda_1 = -5$ y $\lambda_2 = -2$. Note que ambos eigenvalores son negativos.

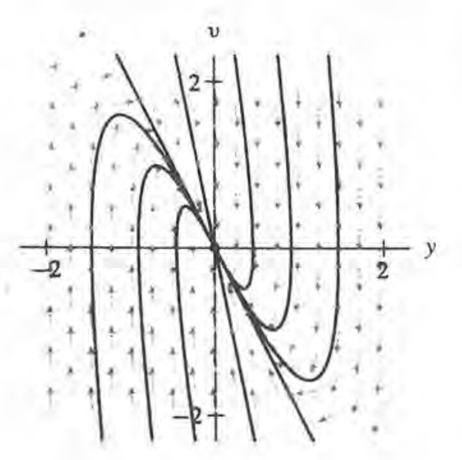


Figura 3.11
Retrato fase para

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{pmatrix}\mathbf{Y}.$$

Este sistema lineal se obtiene del oscilador armónico

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 7\frac{dy}{dt} + 10y = 0,$$

donde $\mathbf{Y} = (y, v)$ y $v = dy/dt$.

Calculamos el eigenvector para $\lambda_1 = -5$ resolviendo $\mathbf{CV}_1 = -5\mathbf{V}_1$. Si $\mathbf{V}_1 = (y_1, v_1)$, tenemos

$$\begin{cases} v_1 = -5y_1 \\ -10y_1 - 7v_1 = -5v_1. \end{cases}$$

Si hemos hecho nuestra aritmética de manera correcta, esas dos ecuaciones son redundantes y los eigenvectores buscados deben satisfacer a $v_1 = -5y_1$. (Es una buena idea verificar la redundancia de esas ecuaciones. Si no son redundantes, entonces cometimos un error antes en el cálculo.) Haciendo $y_1 = 1$, obtenemos el eigenvector $\mathbf{V}_1 = (1, -5)$ correspondiente a λ_1. Del mismo modo, podemos calcular que un eigenvector para $\lambda_2 = -2$ es $\mathbf{V}_2 = (1, -2)$. (¿Nota algo especial acerca de esos dos eigenvectores?)

La solución general para este sistema es

$$\mathbf{Y}(t) = k_1 e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} + k_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Con esta fórmula podemos encontrar la posición exacta del oscilador en cualquier tiempo. Y a partir de ella también es posible determinar las características cualitativas del modelo. Cada término en la expresión para $\mathbf{Y}(t)$ contiene un exponencial de la forma $e^{\lambda t}$ con $\lambda < 0$. En consecuencia, cada término tiende a 0 conforme t crece. Observe que esto es consistente con las direcciones de las curvas solución en el retrato fase (vea la figura 3.11), y es gratificante ver que todo se ajusta tan precisamente. Como $\mathbf{Y}(t) = (y(t), v(t))$, la solución general de la correspondiente ecuación de segundo orden es la primera componente de $\mathbf{Y}(t)$, que es

$$y(t) = k_1 e^{-5t} + k_2 e^{-2t}.$$

Algo que aprendimos de los eigenvalores que no sabíamos sólo del retrato fase es el hecho de que cada solución tiende a cero a una razón, que es por lo menos comparable a la razón a la que e^{-2t} tiende a 0.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 3.2

En los ejercicios 1-10,

(a) calcule los eigenvalores;

(b) para cada eigenvalor, determine los eigenvectores asociados;

(c) usando cualquier procedimiento disponible, esboce el campo de direcciones para el sistema y practique las soluciones de línea recta;

(d) para cada eigenvalor, especifique la solución de línea recta que corresponde y trace sus gráficas $x(t)$ y $y(t)$; y

(e) si el sistema tiene dos eigenvalores distintos, calcule la solución general.

1. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$

2. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$

3. $$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

4. $$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

5. $$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{2}$$
$$\frac{dy}{dt} = x - \frac{y}{2}$$

6. $$\frac{dx}{dt} = 5x + 4y$$
$$\frac{dy}{dt} = 9x$$

7. $$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

8. $$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

9. $$\frac{dx}{dt} = 2x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = x + y$$

10. $$\frac{dx}{dt} = -x - 2y$$
$$\frac{dy}{dt} = x - 4y$$

11. Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = -3x$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + 2y,$$

donde la condición inicial $(x(0), y(0))$ es:

(a) $(1, 0)$ **(b)** $(0, 1)$ **(c)** $(-2, 1)$

12. Solucione el problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = 3x$$
$$\frac{dy}{dt} = x - 2y,$$

donde la condición inicial $(x(0), y(0))$ es:

(a) $(1, 0)$ **(b)** $(0, 1)$ **(c)** $(2, 2)$

13. Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}_0,$$

donde la condición inicial $\mathbf{Y}_0$ es:

(a) $\mathbf{Y}_0 = (1, 0)$ **(b)** $\mathbf{Y}_0 = (2, 1)$ **(c)** $\mathbf{Y}_0 = (-1, -2)$

14. Solucione el problema de valor inicial

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}_0,$$

donde la condición inicial $\mathbf{Y}_0$ es:

(a) $\mathbf{Y}_0 = (1, 0)$ **(b)** $\mathbf{Y}_0 = (2, 1)$ **(c)** $\mathbf{Y}_0 = (-1, -2)$

15. Demuestre que a es el único eigenvalor y que cada vector es un eigenvector para la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

16. Una matriz de la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

se denomina **triangular superior**. Suponga que $b \neq 0$ y $a \neq d$. Encuentre los eigenvalores y eigenvectores de **A.**

17. Una matriz de la forma

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

se llama **simétrica**. Demuestre que **B** tiene eigenvalores reales y que, si $b \neq 0$, entonces **B** tiene dos eigenvalores distintos.

18. Calcule los eigenvalores de una matriz de la forma

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

Compare sus resultados con los del ejercicio 16.

19. Considere la ecuación de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0,$$

donde p y q son positivos.

(a) Convierta esta ecuación en un sistema lineal de primer orden.

(b) Calcule el polinomio característico del sistema.

(c) Encuentre los eigenvalores.

(d) ¿Bajo qué condiciones para p y q los eigenvalores son dos números reales distintos?

(e) Compruebe que los eigenvalores son negativos cuando son números reales.

20. Para el oscilador armónico con masa $m = 1$, constante de resorte $k = 4$ y coeficiente de amortiguamiento $b = 5$,

(a) calcule los eigenvalores y los eigenvectores asociados;

(b) para cada eigenvalor, escoja un eigenvector asociado $\mathbf{V}$ y determine la solución $\mathbf{Y}(t)$ con $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{V}$;

(c) para cada solución obtenida en el inciso (b), trace su curva solución en el plano fase y-v;

(d) también con las soluciones del inciso (b), trace sus gráficas $y(t)$ y $v(t)$; y

(e) para cada solución que obtuvo en el inciso (b), dé una breve descripción del comportamiento del sistema masa-resorte.

En los ejercicios 21-24, volvemos a los ejercicios 13-16 de la sección 2.3. (Por conveniencia, a continuación reproducimos las ecuaciones.) Para cada ecuación de segundo orden,

(a) convierta la ecuación a un sistema lineal de primer orden;

(b) calcule los eigenvalores y eigenvectores del sistema;

(c) para cada eigenvalor, escoja un eigenvector asociado $\mathbf{V}$ y determine la solución $\mathbf{Y}(t)$ del sistema; y

(d) compare los resultados de sus cálculos del inciso (c) con los que obtuvo al usar el método de conjetura y prueba en la sección 2.3.

21. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} - 10y = 0$

22. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = 0$

23. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + y = 0$

24. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = 0$

25. Verifique que el sistema lineal que modela al oscilador armónico con masa $m = 1$, constante de resorte $k = 4$ y coeficiente de amortiguamiento $b = 1$, no tiene eigenvalores reales. ¿Esto le dice algo acerca del retrato fase del sistema?

3.3 PLANOS FASE PARA SISTEMAS LINEALES CON EIGENVALORES REALES

En la sección anterior vimos que las soluciones de línea recta juegan un papel dominante cuando determinamos la solución general de ciertos sistemas lineales de ecuaciones diferenciales. En primera instancia, usamos el álgebra para calcular los eigenvalores (reales) y eigenvectores (asociados) de la matriz de coeficientes, y con ellos podemos escribir la correspondiente solución de línea recta. Además, en el caso especial en que encontramos dos eigenvalores reales distintos, podemos escribir una fórmula explícita para el sistema.

El signo del eigenvalor también es preponderante para predecir el comportamiento de las correspondientes soluciones de línea recta. Si el eigenvalor es negativo, la solución tiende al origen cuando $t \to \infty$; si es positivo, la solución se aleja del origen cuando $t \to \infty$. En esta sección, a partir del comportamiento de esas soluciones de línea recta, predeciremos el de todas las soluciones.

Puntos silla

Un tipo común de sistema lineal contiene un eigenvalor positivo y otro negativo. Por ejemplo, considere el sistema lineal

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY}, \quad \text{donde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Éste es un sistema lineal particularmente simple, ya que corresponde a las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = -3x$$
$$\frac{dy}{dt} = 2y.$$

Note que dx/dt depende sólo de x y dy/dt depende sólo de y. Es decir, el sistema está completamente desacoplado. Podemos resolver esas dos ecuaciones en forma independiente usando los métodos del capítulo 1. Sin embargo, para entender la geometría más plenamente, utilizaremos los métodos de las dos secciones previas.

Como siempre, calculamos primero los eigenvalores de $\mathbf{A}$ encontrando las raíces del polinomio característico

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (-3-\lambda)(2-\lambda) = 0.$$

Los eigenvalores de $\mathbf{A}$ son entonces $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = 2$.

A continuación obtenemos los eigenvectores. Para $\lambda_1 = -3$, debemos despejar $\mathbf{V}$ de la ecuación $\mathbf{AV} = -3\mathbf{V}$. Si $\mathbf{V}_1 = (x_1, y_1)$, tenemos

$$\begin{cases} -3x_1 = -3x_1 \\ 2y_1 = -3y_1. \end{cases}$$

Entonces, cualquier vector no cero $\mathbf{V}$ que esté a lo largo de la línea $y = 0$ (el eje x) en el plano, es un eigenvector para $\lambda_1 = -3$. Escogemos $\mathbf{V}_1 = (1, 0)$. Por tanto,

$$\mathbf{Y}_1(t) = e^{-3t}\mathbf{V}_1$$

es una solución de línea recta cuya curva es el eje x positivo. La solución tiende al origen cuando t crece.

De manera similar, podemos comprobar que cualquier eigenvector correspondiente a $\lambda_2 = 2$ se encuentra a lo largo del eje y. Escogemos $\mathbf{V}_2 = (0, 1)$ y obtenemos una segunda solución

$$\mathbf{Y}_2(t) = e^{2t}\mathbf{V}_2.$$

La solución general es por consiguiente

$$\mathbf{Y}(t) = k_1 e^{-3t}\mathbf{V}_1 + k_2 e^{2t}\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} k_1 e^{-3t} \\ k_2 e^{2t} \end{pmatrix}.$$

En la figura 3.12 exhibimos el retrato fase para este sistema. Aquí observamos que solamente las soluciones de línea recta se encuentran sobre los ejes, pero todas las otras se comportan de manera distinta, pues parece que tienden al infinito asintóticamente al eje y y llegar del infinito asintóticamente al eje x. Para ver por qué ocurre, consideremos una solución $\mathbf{Y}(t)$ que no sea una solución de línea recta. Entonces

$$\mathbf{Y}(t) = k_1 e^{-3t}\mathbf{V}_1 + k_2 e^{2t}\mathbf{V}_2,$$

donde k_1 y k_2 son no nulas. Cuando t es grande y positiva, el término e^{-3t} es muy pequeño. Por tanto, para t grande positiva, el vector $e^{-3t}\mathbf{V}_1$ en la solución general es despreciable y tenemos entonces

$$\mathbf{Y}(t) \approx k_2 e^{2t}\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Es decir, para valores grandes y positivos de t, nuestra solución se comporta como una solución de línea recta sobre el eje y.

Lo opuesto es verdadero cuando consideramos valores grandes y negativos de t. En este caso, el término e^{2t} es muy pequeño y tenemos

$$\mathbf{Y}(t) \approx k_1 e^{-3t}\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} k_1 e^{-3t} \\ 0 \end{pmatrix},$$

que es una solución de línea recta a lo largo del eje x.

Por ejemplo, la solución particular de este sistema que satisface $\mathbf{Y}(0) = (1, 1)$ es

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

La coordenada x de esta solución tiende a 0 cuando $t \to \infty$ y hacia infinito cuando $t \to -\infty$. La coordenada y se comporta de manera opuesta (vea las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ en la figura 3.13).

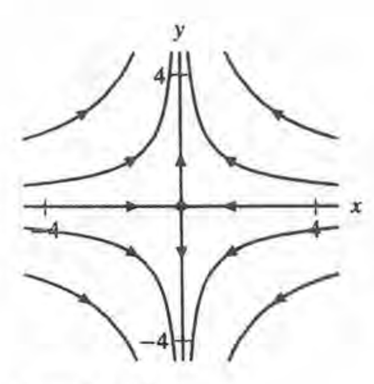


Figura 3.12
Retrato fase para el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{Y}.$$

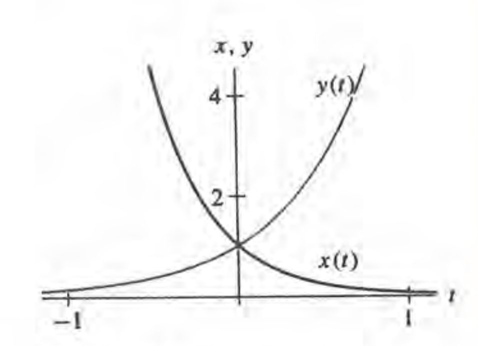


Figura 3.13
Gráficas $x(t)$ y $y(t)$ para la solución con posición inicial (1, 1).

A pesar de que este ejemplo consiste en realidad en dos ecuaciones diferenciales unidimensionales, su retrato fase es enteramente nuevo. A lo largo de los ejes vemos las familiares líneas fase para las ecuaciones unidimensionales: un sumidero a lo largo del eje x y una fuente sobre el eje y. Todas las otras soluciones tienden al infinito cuando $t \to \pm\infty$. Esas soluciones vienen del infinito en la misma dirección de los eigenvectores correspondientes al sumidero unidimensional y tienden a regresar al infinito en la dirección de la fuente unidimensional.

Cualquier sistema lineal para el cual se tiene un eigenvalor positivo y otro negativo tiene comportamiento similar. Un punto de equilibrio de esta forma se llama **punto silla.** Este nombre supuestamente debe recordarle una silla de montar. La trayectoria seguida por una gota de agua sobre tal silla se parece a una solución de este tipo de sistema lineal; se acerca al centro del asiento en una dirección y luego se desvía hacia abajo en otra.

Retratos fase para otros puntos silla

El ejemplo previo es especial ya que los eigenvectores se encuentran sobre los ejes x y y. En general los eigenvectores para un punto silla pueden encontrarse sobre dos líneas distintas cualquiera que pasen por el origen. Esto hace que los planos fase y las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ se vean algo diferentes en el caso general.

Por ejemplo, consideremos el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{BY}, \quad \text{donde } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8 & -11 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Primero calculamos los eigenvalores de **B** encontrando las raíces del polinomio característico

$$\det(\mathbf{B} - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 8-\lambda & -11 \\ 6 & -9-\lambda \end{pmatrix} = (8-\lambda)(-9-\lambda) + 66 = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0.$$

Las raíces de esta ecuación cuadrática son $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = 2$, que son los eigenvalores de **B**. Ésos son exactamente los mismos que en el ejemplo previo, por lo que el origen es punto silla.

A continuación calculamos los eigenvectores. Para $\lambda_1 = -3$, las ecuaciones que dan los eigenvectores (x_1, y_1) son

$$\begin{cases} 8x_1 - 11y_1 = -3x_1 \\ 6x_1 - 9y_1 = -3y_1. \end{cases}$$

Entonces, cualquier vector no nulo que se encuentre a lo largo de la línea $y = x$ en el plano sirve como un eigenvector para $\lambda_1 = -3$. Escogemos $\mathbf{V}_1 = (1, 1)$. Por tanto,

$$\mathbf{Y}_1(t) = e^{-3t}\mathbf{V}_1$$

es una solución de línea recta que se encuentra sobre la línea $y = x$, y tiende al origen cuando t crece.

Mediante cálculos similares podemos obtener los eigenvectores correspondientes a $\lambda_2 = 2$, que se encuentran a lo largo de la línea $6x - 11y = 0$, por ejemplo $\mathbf{V}_2 = (11, 6)$. Esto a su vez da una solución de línea recta de la forma

$$\mathbf{Y}_2(t) = e^{2t}\mathbf{V}_2$$

que se aleja del origen al crecer t. Así, la solución general es

$$\mathbf{Y}(t) = k_1 e^{-3t}\mathbf{V}_1 + k_2 e^{2t}\mathbf{V}_2.$$

Como antes, esperamos que si k_1 y k_2 son no nulas, esas soluciones llegan del infinito en la dirección de $\mathbf{V}_1$ y regresan al infinito en la dirección de $\mathbf{V}_2$. En el plano fase vemos las dos soluciones de línea recta junto con varias otras soluciones (vea la figura 3.14). El punto importante es que una vez que tenemos los eigenvalores y eigenvectores, podemos inmediatamente visualizar el retrato fase completo.

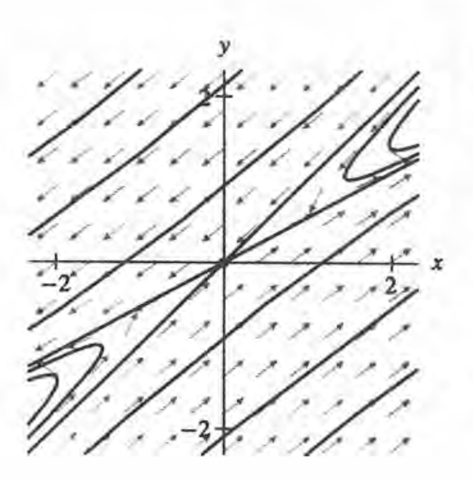


Figura 3.14
Campo de direcciones y el retrato fase para el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{BY} = \begin{pmatrix} 8 & -11 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}\mathbf{Y}.$$

Los eigenvectores se encuentran a lo largo de las dos líneas distinguidas que van por el primer y tercer cuadrantes. Aunque algunas de las otras curvas solución se ven rectas, en realidad son ligeramente curvas.

Sumideros

Consideremos ahora el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{CY}, \quad \text{donde } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

La matriz $\mathbf{C}$ tiene eigenvalores $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -4$. Por tanto, esperamos tener dos soluciones de línea recta que tiendan al origen cuando $t \to \infty$.

Un eigenvector correspondiente a $\lambda_1 = -1$ es $\mathbf{V}_1 = (1, 0)$, y un eigenvector para $\lambda_2 = -4$ es $\mathbf{V}_2 = (0, 1)$. La solución general es entonces

$$\mathbf{Y}(t) = k_1 e^{-t}\mathbf{V}_1 + k_2 e^{-4t}\mathbf{V}_2 = k_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 e^{-4t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 e^{-t} \\ k_2 e^{-4t} \end{pmatrix}.$$

Como cada término contiene e^{-t} o e^{-4t}, sabemos que cada solución de este sistema tiende al origen. En la figura 3.15 está esbozado el retrato fase para este sistema, en el cual podemos apreciar claramente las soluciones de línea recta. Como se predijo, las demás soluciones tienden al origen y, de hecho, éste será su comportamiento siempre que se encuentren en su sistema lineal con dos eigenvalores negativos. Por analogía con las ecuaciones autónomas de primer orden, llamamos a este tipo de punto de equilibrio un **sumidero**.

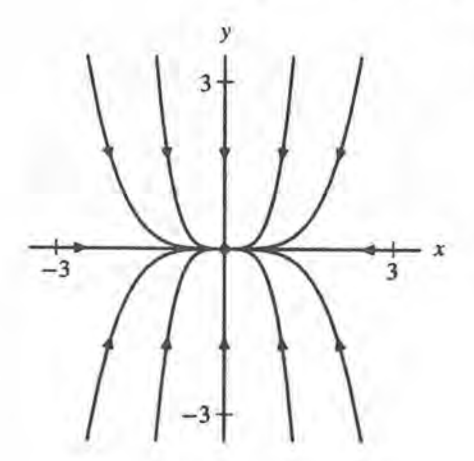


Figura 3.15
El retrato fase para el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{CY} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Observe que todas las curvas solución tienden al punto de equilibrio en el origen.

En la figura 3.15 parece que toda solución (con excepción de aquellas sobre el eje y) tiende al origen tangencialmente al eje x. Para saber por qué sucede así, consideremos la solución general

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 e^{-t} \\ k_2 e^{-4t} \end{pmatrix}.$$

Si $k_1 \neq 0$, entonces podemos despejar e^{-t} en $x(t) = k_1 e^{-t}$, y obtener

$$e^{-t} = \frac{x(t)}{k_1}.$$

Luego sustituimos esta expresión para e^{-t} en la fórmula para $y(t)$, y tenemos

$$\begin{aligned} y(t) &= k_2 e^{-4t} \\ &= k_2 (e^{-t})^4 \\ &= k_2 \left(\frac{x(t)}{k_1} \right)^4 \\ &= \frac{k_2}{k_1^4} (x(t))^4. \end{aligned}$$

En otras palabras, cada curva solución se encuentra a lo largo de una curva de la forma

$$y = Kx^4$$

para alguna constante K si $k_1 \neq 0$. Como esas curvas son siempre tangentes al eje x, vemos por qué todas las curvas solución, cuyas condiciones iniciales no están sobre el eje y, tienden al punto de equilibrio en el origen a lo largo de curvas que son tangentes al eje x.

Sumideros más generales

En general, para cualquier sistema lineal con dos eigenvalores distintos negativos, tenemos un retrato fase similar. Por ejemplo, consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{DY}, \quad \text{donde } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

La matriz **D** tiene eigenvalores $\lambda_1 = -4$ y $\lambda_2 = -1$. Para $\lambda_1 = -4$, un eigenvector es $\mathbf{V}_1 = (1,1)$ y para $\lambda_2 = -1$, un eigenvector es $\mathbf{V}_2 = (-2, 1)$. (Comprobarlo constituye un buen repaso de los eigenvalores y eigenvectores. Usted debe verificar que esos vectores son eigenvectores sin tener que calcular todo desde el principio.)

Este campo vectorial tiene entonces dos soluciones de línea recta linealmente independientes que tienden al origen y la solución general es

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}(t) &= k_1 e^{-4t}\mathbf{V}_1 + k_2 e^{-t}\mathbf{V}_2 \\ &= k_1 e^{-4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 e^{-t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k_1 e^{-4t} - 2k_2 e^{-t} \\ k_1 e^{-4t} + k_2 e^{-t} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Una vez que sabemos que los eigenvalores para este sistema son -4 y -1, podemos inferir que todo término en la solución general tiene un factor de e^{-4t} o de e^{-t}. Por consiguiente, toda solución tiende al origen cuando $t \to \infty$ y el origen es un sumidero. El comportamiento a largo plazo de las soluciones puede determinarse a partir de los eigenvalores (sin los eigenvectores o la fórmula para la solución general).

En la figura 3.16 está esbozado el retrato fase para este sistema. Aquí podemos ver de manera clara las soluciones de línea recta. Como se predijo, las demás soluciones también tienden al origen. De nueva cuenta, todas las soluciones, con excepción de las soluciones de línea recta asociadas con $\lambda_1 = -4$, parecen tender al origen tangencialmente a la línea de eigenvectores para $\lambda_2 = -1$.

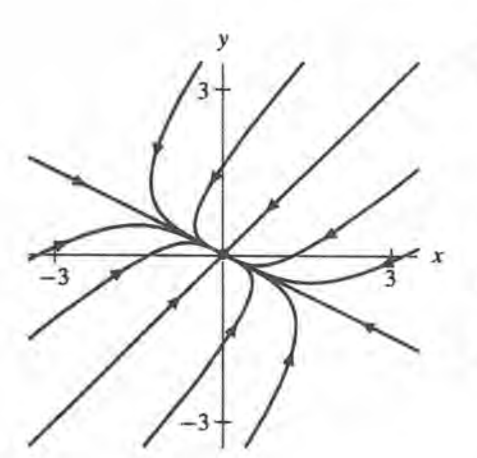


Figura 3.16
Retrato fase para el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{DY} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{Y}.$$

Todas las soluciones tienden al punto de equilibrio en el origen y son tangentes a la línea de eigenvectores para $\lambda_2 = -1$, con excepción de las soluciones de línea recta asociadas a $\lambda_1 = -4$.

Dirección de acercamiento al sumidero

Para entender por qué las curvas solución se aproximan al origen en la manera en que lo hacen, necesitamos recurrir al cálculo. Calculamos la pendiente de la línea tangente a cualquier curva solución y preguntamos qué sucede a esta pendiente cuando $t \to \infty$. Cada curva solución está dada por

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 e^{-4t} - 2k_2 e^{-t} \\ k_1 e^{-4t} + k_2 e^{-t} \end{pmatrix}$$

para alguna selección de las constantes k_1 y k_2. Del cálculo sabemos que la pendiente del vector tangente a una curva está dada por dy/dx y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}.$$

Como $x(t) = k_1e^{-4t} - 2k_2e^{-t}$ y $y(t) = k_1e^{-4t} + k_2e^{-t}$, tenemos

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-4k_1e^{-4t} - k_2e^{-t}}{-4k_1e^{-4t} + 2k_2e^{-t}}.$$

Si tomamos el límite de esta expresión cuando $t \to \infty$, llegamos a la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Es tentador usar la regla de L'Hôpital, pero esto falla puesto que todas las derivadas contienen también los términos exponenciales. La forma de calcular este límite es multiplicar el numerador y el denominador por e^t. Entonces, la nueva expresión es

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-4k_1e^{-3t} - k_2}{-4k_1e^{-3t} + 2k_2}.$$

Cuando $t \to \infty$, ambos términos exponenciales en este cociente tienden a 0 y vemos que el límite es $-k_2/(2k_2) = -1/2$ si $k_2 \neq 0$. Es decir, esas soluciones tienden al origen con pendientes que tienden a $-1/2$ o, de manera equivalente, en dirección tangencial a la línea de eigenvectores correspondientes al eigenvalor λ_2.

Si $k_2 = 0$, nuestra expresión para dy/dx se reduce a

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-4k_1e^{-4t}}{-4k_1e^{-4t}} = 1,$$

que es exactamente la pendiente para las soluciones de línea recta cuyas condiciones iniciales se encuentran a lo largo de la línea de eigenvectores asociados con $\lambda_1 = -4$.

El análisis de la dirección de acercamiento al punto de equilibrio puede parecer técnica, pero en realidad existe una buena razón cualitativa por la que la mayoría de las soluciones tienden a (0, 0) y siguen una dirección tangencial al eigenvector que corresponde al eigenvalor -1. Recuerde que el campo vectorial sobre la línea de eigenvectores correspondientes al eigenvalor λ sólo es el producto escalar de λ y el vector de posición. Como $-4 < -1$, el campo vectorial sobre la línea de eigenvectores para el eigenvalor -4 a una distancia dada del origen es mucho más largo que el que se encuentra sobre la línea de eigenvectores para el eigenvalor -1. Las soluciones sobre la línea de eigenvectores para -4 tienden a cero mucho más rápido que aquellas para el eigenvalor -1. En particular, la solución $e^{-4t}\mathbf{V}_1$ tiende a (0, 0) más rápidamente que $e^{-t}\mathbf{V}_2$.

En nuestra solución general

$$\mathbf{Y}(t) = k_1e^{-4t}\mathbf{V}_1 + k_2e^{-t}\mathbf{V}_2,$$

si k_1 y k_2 son diferentes de cero, entonces el primer término tiende más rápido al origen que el segundo. Entonces, cuando t es suficientemente grande, el segundo término domina y vemos que la mayoría de las soluciones tienden a cero a lo largo de la dirección de los eigenvectores para el eigenvalor más cercano a cero. Las únicas excepciones son las soluciones sobre la línea de eigenvectores para el eigenvalor más negativo. Entonces, igual que en el ejemplo previo, siempre que $k_2 \neq 0$, podemos escribir $\mathbf{Y}(t) \approx k_2e^{-t}\,\mathbf{V}_2$ cuando $t \to \infty$.

El caso de un sumidero arbitrario con dos eigenvalores $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ es análogo por completo. Todas las soluciones tienden al origen y con la excepción de aquellas soluciones cuyas condiciones iniciales son eigenvectores correspondientes a λ_1, todas las soluciones tienden a (0, 0) tangencialmente a la línea de los eigenvectores asociados con λ_2.

Fuentes

Considere el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{EY}, \quad \text{donde } \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

En la sección previa calculamos que los eigenvalores de esta matriz son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 1$. También, $\mathbf{V}_1 = (1, 1)$ es un eigenvector para el eigenvalor $\lambda_1 = 4$, y $\mathbf{V}_2 = (-2, 1)$ es un eigenvector para el eigenvalor 1. (Recuerde que usted puede verificarlo calculando $\mathbf{EV}_1$ y $\mathbf{EV}_2$.) Entonces $e^{4t}\mathbf{V}_1$ y $e^t\mathbf{V}_2$ son dos soluciones de línea recta, linealmente independientes y la solución general es

$$\mathbf{Y}(t) = k_1 e^{4t}\mathbf{V}_1 + k_2 e^t \mathbf{V}_2.$$

Como ambos eigenvalores de este sistema son positivos, todas las soluciones no cero se alejan del origen cuando $t \to \infty$.

El retrato fase para este sistema se muestra en la figura 3.17. Igual que en el ejemplo previo, vemos dos soluciones de línea recta y todas las otras soluciones salen del origen en una dirección tangente a la línea de eigenvectores correspondiente al eigenvalor $\lambda_2 = 1$. La razón para esto es en esencia la misma que se dio en la sección para los sumideros. El lector atento notará que $\mathbf{E} = -\mathbf{D}$, donde $\mathbf{D}$ es la matriz especificada en el ejemplo anterior. En consecuencia, para el campo vectorial hemos cambiado sólo la dirección de las flechas y no la geometría de las curvas solución. Para este sistema, en lugar de tomar en cuenta el comportamiento cuando $t \to \infty$, lo consideraremos cuando $t \to -\infty$. Ahora el eigenvalor 4 juega el papel del eigenvalor más fuerte. Las soluciones que implican términos con e^{4t} tienden al origen mucho más rápidamente que aquellos que contienen e^t cuando $t \to -\infty$.

En general, una vez que sabemos que ambos eigenvalores de un sistema lineal son positivos, podemos concluir que todas las soluciones se alejan del origen cuando t crece. Llamamos al punto de equilibrio para un sistema lineal con dos eigenvalores positivos una **fuente**. Todas las soluciones se alejan de este punto cuando $t \to \infty$ y todas, excepto aquellas sobre la línea de eigenvectores correspondientes a λ_1, salen del origen con una dirección tangente a la línea de eigenvectores correspondiente a λ_2.

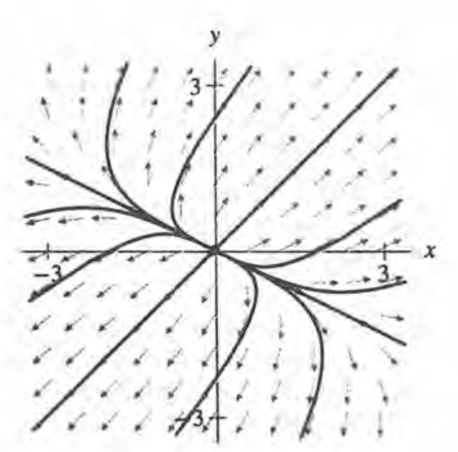


Figura 3.17
Retrato fase para el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{EY} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{Y}.$$

Note que, como $\mathbf{E} = -\mathbf{D}$, podemos obtener el retrato fase para este ejemplo a partir del que se muestra para $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{DY}$ (figura 3.16). Las curvas solución son idénticas, pero las soluciones se alejan del origen cuando $t \to \infty$.

Puntos de equilibrio estables e inestables

Antes de considerar un ejemplo más, resumiremos el comportamiento de un sistema lineal con dos eigenvalores distintos, no nulos y reales λ_1 y λ_2.

- Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, entonces el origen es un punto silla. Hay dos líneas en el retrato fase que corresponden a soluciones de línea recta. Las soluciones a lo largo de una línea tienden hacia (0, 0) cuando t se incrementa, y las que se encuentran sobre la otra línea se alejan de (0, 0). Las demás soluciones llegan de y se dirigen al infinito.
- Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, entonces el origen es un sumidero. Todas las soluciones tienden a (0, 0) cuando $t \to \infty$ y la mayoría de ellas tienden a (0, 0) en la dirección del eigenvector λ_2.
- Si $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, entonces el origen es una fuente. Todas las soluciones se alejan de (0, 0) cuando $t \to \infty$ y una gran parte de éstas lo hacen siguiendo la dirección del eigenvector λ_2.

Se dice que un sumidero es **estable** porque los puntos iniciales cercanos conducen a soluciones cuya tendencia es regresar hacia el punto de equilibrio conforme pasa el tiempo. Así entonces, si la condición inicial se "desplaza" un poco alejándose del sumidero, la solución resultante no diverge alejándose mucho del punto inicial. Los puntos de equilibrio de un punto silla y fuente son llamados **inestables** porque hay condiciones iniciales arbitrarias y cercanas al punto de equilibrio cuyas soluciones se alejan. Por consiguiente un pequeño desplazamiento de una condición inicial puede tener enormes consecuencias. Para una fuente, toda condición próxima al punto de equilibrio corresponde a una solución que se aleja. Para un punto silla, toda condición inicial, excepto aquellas sobre la solución de línea recta, que tiende al punto de equilibrio (casi toda condición inicial) corresponde a una solución que se aleja.

Si medimos el tiempo hacia atrás, entonces una fuente parece un sumidero cuyas soluciones tienden hacia él. De manera similar, en un tiempo negativo, un sumidero parece una fuente con soluciones alejándose de ella. Esto es análogo a la situación de las líneas fase.

Los punto silla son un nuevo tipo de punto de equilibrio que no puede ocurrir en sistemas dimensionales. Y se requieren dos dimensiones para tener una dirección estable (correspondiente al eigenvalor negativo) y otra inestable (correspondiente al eigenvalor positivo).

Tiendas de CD de Pablo y Roberto

Recuerde el modelo de las tiendas de discos CD de Pablo y Roberto de la sección 3.1. Suponga que una investigación de mercado establece que si una tienda se vuelve popular, entonces estará abarrotada y las ganancias tenderán a decrecer. Además, todos los establecimientos cercanos sufren por el efecto del abarrotamiento y sus ganancias también disminuyen. En otras palabras, si las ganancias de Pablo se vuelven positivas, tanto las de su tienda como las de la tienda de Roberto tienden a decrecer, por lo que los parámetros a y c deben ser negativos. Lo mismo aplica para el negocio de Roberto. Por ejemplo, sea $a = -2$, $b = -3$, $c = -3$ y $d = -2$, por lo que el sistema lineal es

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

Todos los coeficientes son negativos, por lo que estaríamos tentados a decir que este modelo predice que ninguna ganancia es posible para las tiendas porque, tan pronto como una comienza a ganar dinero, esto hace que la razón de cambio de las ganancias de ambas se vuelva más pequeña. Sin embargo, no podemos confiar siempre en nuestras conjeturas. Usaremos las herramientas que hemos desarrollado hasta ahora para estudiar cuidadosamente este sistema.

Para dar un croquis exacto del retrato fase, calculamos primero los eigenvalores y eigenvectores. El polinomio característico es

$$(-2-\lambda)(-2-\lambda)-9=\lambda^2+4\lambda-5=(\lambda-1)(\lambda+5),$$

y los eigenvalores son $\lambda_1 = -5$ y $\lambda_2 = 1$. Como un eigenvalor es positivo y el otro negativo, el origen es un punto silla (vea la figura 3.18). Encontramos un eigenvector para el eigenvalor $\lambda_1 = -5$ al solucionar

$$\begin{cases} -2x_1 - 3y_1 = -5x_1 \\ -3x_1 - 2y_1 = -5y_1, \end{cases}$$

y esas ecuaciones tienen una línea de soluciones dada por $x_1 = y_1$. Entonces $(1, 1)$ es un eigenvector para el eigenvalor $\lambda_1 = -5$.

Para $\lambda_2 = 1$ debemos resolver

$$\begin{cases} -2x_2 - 3y_2 = x_2 \\ -3x_2 - 2y_2 = y_2. \end{cases}$$

Estas ecuaciones tienen una línea de soluciones dada por $x_2 = -y_2$. Entonces $(-1, 1)$ es un eigenvector para el eigenvalor $\lambda_2 = 1$. Ahora podríamos emplear esta información para escribir la solución general, pero nos será más útil para esbozar el retrato fase. Sabemos que la diagonal $x_1 = y_1$ que pasa por el origen contiene soluciones de línea recta y que éstas tienden al origen debido a que el eigenvalor $\lambda_1 = -5$ es negativo. La otra diagonal, $x_2 = -y_2$, contiene soluciones de línea recta que se alejan de $(0, 0)$ cuando t crece. Toda otra solución es una combinación lineal de esas dos. Entonces, las únicas soluciones que tienden a $(0, 0)$ son aquellas sobre la línea $x = y$. Cuando $t \to \infty$, las otras soluciones se desplazan y al final se alejan del origen en el segundo o bien en el cuarto cuadrantes (vea la figura 3.18).

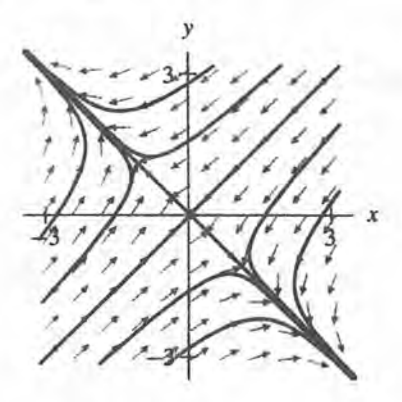


Figura 3.18
Retrato fase para el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

El punto de equilibrio en el origen es un punto silla y la mayor parte de las soluciones tienden al infinito asintóticamente a las soluciones de línea recta, cuyas curvas solución se encuentran en el segundo o cuarto cuadrantes.

Análisis del modelo

Este modelo conduce a sorprendentes predicciones acerca de las ganancias de Pablo y Roberto. Suponga que en $t = 0$ ambos están obteniendo ganancias [$x(0) > 0$ y $y(0) > 0$]. Si sucede que la cantidad de utilidades es *exactamente* la misma, entonces $x(0) = y(0)$ y el punto inicial está sobre la línea $x = y$. La solución con esta condición inicial tiende al ori-

gen cuando t crece; es decir, Pablo y Roberto ganan cada vez menos conforme pasa el tiempo; ambos tienden hacia el punto $(x, y) = (0, 0)$ de cero pérdida y cero ganancia.

A continuación consideremos el caso $x(0) > y(0)$ (incluso por una pequeña cantidad). Ahora el punto inicial está justo abajo de la diagonal $x = y$. La solución correspondiente tiende primero hacia $(0, 0)$, pero después gira y sigue la solución de línea recta a lo largo de la línea $x = -y$ en el cuarto cuadrante. En este caso, $x(t) \to \infty$, pero $y(t) \to -\infty$. En otras palabras, al final Pablo hace una fortuna pero Roberto pierde hasta la camisa. El campo vectorial es muy pequeño cerca de $(0, 0)$, por lo que la solución se mueve lento cuando está cerca del origen. Pero al último da vuelta en la esquina y Pablo se vuelve rico y Roberto termina perdiendo todo (vea la figura 3.18).

Por otra parte, suponga que $y(0)$ es ligeramente mayor que $x(0)$. Entonces, el punto inicial está justamente arriba de la línea $x = y$. En este caso la solución tiende primero hacia $(0, 0)$, pero finalmente "da vuelta en la esquina" y tiende hacia infinito a lo largo de la línea $x = -y$ en el segundo cuadrante. En este caso, $x(t) \to -\infty$ (Pablo quiebra) y $y(t) \to \infty$ (Roberto se vuelve rico; vea la figura 3.18).

En este ejemplo, un cambio diminuto en la condición inicial ocasiona una modificación significativa en el comportamiento a largo plazo del sistema. Recalcamos que estas diferencias requieren un largo tiempo para manifestarse, porque las soluciones se mueven muy lentamente cerca del punto de equilibrio. Esta sensible dependencia de la selección de la condición inicial es causada por la solución en línea recta que pasa por el origen. Las dos soluciones con $x(0) = y(0) + 0.01$ y $x(0) = y(0) + 0.02$ están del mismo lado de la diagonal, por lo que ambas se comportan de igual manera a largo plazo. Es sólo cuando un pequeño cambio empuja a la condición inicial al otro lado de la solución de línea recta sobre la diagonal, que ocurre el gran salto en el comportamiento a largo plazo (vea la figura 3.18). Por esta razón, una solución de línea recta de un punto silla correspondiente al eigenvalor negativo se denomina a veces una **separatriz**, porque separa dos tipos diferentes de comportamiento a largo plazo.

Sentido común *versus* cálculo

Las predicciones de este modelo no son todo lo que podríamos haber esperado. La matriz de coeficientes

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

contiene sólo números negativos, por lo que cualquier incremento en ganancia de cualquier tienda tiene un efecto negativo sobre la razón de cambio de las ganancias. El "sentido común" podría sugerir que ningún establecimiento tendrá jamás una ganancia. El comportamiento del modelo es bastante diferente.

Una lección por aprender de este ejemplo simple consiste en que, aunque siempre es aconsejable comparar las predicciones de un modelo con el sentido común, éste no reemplaza al cálculo. Los modelos son más valiosos cuando predicen algo inesperado.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 3.3

En los ejercicios 1-8, nos referimos a los sistemas lineales de los ejercicios en la sección 3.2. Esboce el retrato fase para el sistema especificado.

1. El sistema en el ejercicio 1, sección 3.2 **2.** El sistema en el ejercicio 2, sección 3.2

3. El sistema en el ejercicio 3, sección 3.2 **4.** El sistema en el ejercicio 6, sección 3.2

5. El sistema en el ejercicio 7, sección 3.2 **6.** El sistema en el ejercicio 8, sección 3.2

7. El sistema en el ejercicio 9, sección 3.2 **8.** El sistema en el ejercicio 10, sección 3.2

En los ejercicios 9-12, nos referimos a problemas de valor inicial de los ejercicios en la sección 3.2. Trace las curvas solución en el plano fase y las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ para las soluciones correspondientes a los problemas de valor inicial especificados.

9. Los problemas de valor inicial en el ejercicio 11, sección 3.2

10. Los problemas de valor inicial en el ejercicio 12, sección 3.2

11. Los problemas de valor inicial en el ejercicio 13, sección 3.2

12. Los problemas de valor inicial en el ejercicio 14, sección 3.2

En los ejercicios 13-16, nos referimos a las ecuaciones de segundo orden de los ejercicios en la sección 3.2. Bosqueje el retrato fase para las ecuaciones de segundo orden especificadas.

13. La ecuación de segundo orden en el ejercicio 21, sección 3.2

14. La ecuación de segundo orden en el ejercicio 22, sección 3.2

15. La ecuación de segundo orden en el ejercicio 23, sección 3.2

16. La ecuación de segundo orden en el ejercicio 24, sección 3.2

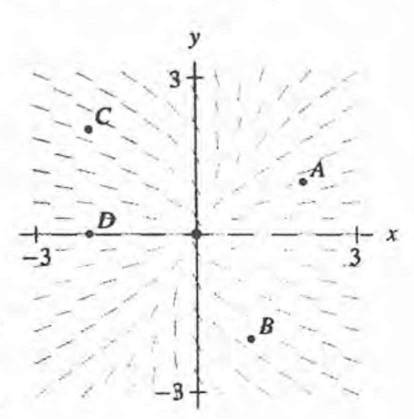
En los ejercicios 17-18, consideramos el modelo de las tiendas de discos CD de Pablo y Roberto de la sección 3.1. Suponga que Pablo y Roberto están operando en el punto de cero ganancia y cero pérdida $(x, y) = (0, 0)$. Para los modelos proporcionados a continuación, establezca qué sucede si una de las tiendas comienza a ganar o a perder un pequeña cantidad. Es decir, ¿retornarán las ganancias a 0 en ambas tiendas? Si no es así, ¿importa cuál de las tiendas empieza a ganar dinero?

17. $\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **18.** $\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

19. El campo de pendientes para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -2x + \frac{1}{2}y$$
$$\frac{dy}{dt} = -y$$

se muestra a la derecha.



(a) Determine el tipo del punto de equilibrio en el origen.

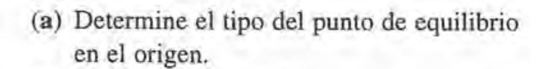
(b) Calcule todas las soluciones de línea recta.

(c) Trace las gráficas $x(t)$ y $y(t)$, $(t \geq 0)$, para las condiciones iniciales $A = (2, 1)$, $B = (1, -2)$, $C = (-2, 2)$ y $D = (-2, 0)$.

20. El campo de pendientes para el sistema

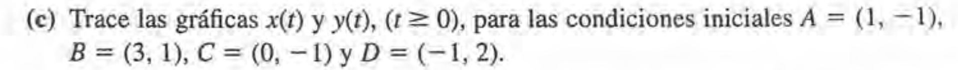
$$\frac{dx}{dt} = 2x + 6y$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x - 2y$$

se muestra a la derecha.



(a) Determine el tipo del punto de equilibrio en el origen.

(b) Calcule todas las soluciones de línea recta.



(c) Trace las gráficas $x(t)$ y $y(t)$, $(t \geq 0)$, para las condiciones iniciales $A = (1, -1)$, $B = (3, 1)$, $C = (0, -1)$ y $D = (-1, 2)$.

21. Para el oscilador armónico con masa $m = 1$, constante de resorte $k = 6$ y coeficiente de amortiguamiento $b = 7$,

(a) escriba la ecuación de segundo orden y el sistema correspondiente,

(b) calcule el polinomio característico,

(c) encuentre los eigenvalores, y

(d) analice el movimiento de la masa para la condición inicial $(y(0), v(0)) = (2, 0)$. (¿Con qué frecuencia cruza la masa la posición de reposo $y = 0$? ¿Qué tan rápido se acerca la masa al equilibrio?)

22. Considere un oscilador armónico con masa $m = 1$, constante de resorte $k = 1$ y coeficiente de amortiguamiento $b = 4$. Para la posición inicial $y(0) = 2$, encuentre la velocidad inicial para la cual $y(t) > 0$ para toda t y $y(t)$ alcanza la posición 0.1 más rápidamente. [*Sugerencia*: Es conveniente observar primero el plano fase.]

En los ejercicios 23-26, consideramos un pequeño estanque habitado por una especie de pez. Cuando están solos, la población cae en equilibrio. Supongamos que unos cuantos peces de otra especie se introducen en el estanque. Nos gustaría saber si la nueva especie sobrevive y si la especie nativa cambia mucho respecto a su población de equilibrio.

Para responder esas preguntas creamos un modelo muy simple de las poblaciones de los peces. Sea $f(t)$ la población de peces nativos y sea f_0 la población de equilibrio. Nos interesa el cambio de la población de peces nativos respecto a su nivel de equilibrio, por lo que hacemos $x(t) = f(t) - f_0$; es decir, $x(t)$ es la diferencia de la población de la especie de peces nativos respecto a su nivel de equilibrio. Sea $y(t)$ la especie introducida. Notamos que, como $y(t)$ es una población "absoluta", no tiene sentido tener $y(t) < 0$. Entonces, si $y(t)$ llega a ser igual a cero, decimos que la especie nueva se ha extinguido. Por otra parte, $x(t)$ puede tomar valores positivos y negativos porque esta variable mide la diferencia de la población nativa de peces respecto a su nivel de equilibrio.

Nos preocupa el comportamiento de esas poblaciones cuando ambas variables x y y son pequeñas, de modo que los términos que contienen x^2, y^2, xy o potencias superiores son más pequeños aún. En consecuencia, los despreciamos en el modelo (vea la sección 5.1). Sabemos también que si $x = y = 0$, en ese caso la población de peces nativos

está en equilibrio y no hay ninguno de la especie introducida, por lo que la población no cambia; es decir $(x, y) = (0, 0)$ es un punto de equilibrio. Por tanto, es razonable usar un modelo lineal.

Para cada modelo:

(a) Analice en forma breve qué clase de interacción entre las especies corresponde al modelo; es decir, ¿crece o decrece la población de los peces nativos debido a los que se introdujeron?

(b) Decida si el modelo concuerda con la información anterior acerca del sistema. Esto es, ¿regresará la población de la especie nativa al equilibrio si la especie introducida no está presente?

(c) Esboce el plano fase y describa las soluciones del sistema lineal (usando procedimientos e información sobre eigenvalores y eigenvectores).

(d) Establezca qué predicciones hace el modelo acerca de lo que pasa cuando se introduce al lago un número pequeño de la nueva especie.

23. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -0.2 & -0.1 \\ 0.0 & -0.1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$

24. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.2 \\ 0.0 & 1.0 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$

25. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.1 \\ 0.0 & -0.1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$

26. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.0 \\ -0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$

27. Considere el sistema lineal

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

(a) Demuestre que $(0, 0)$ es un punto silla.

(b) Encuentre los eigenvalores y eigenvectores y esboce el plano fase.

(c) Sobre el plano fase, trace las curvas solución con las condiciones iniciales $(1, 0.01)$ y $(1, -0.01)$.

(d) Estime el tiempo t en que las soluciones con condiciones iniciales $(1, 0.01)$ y $(1, -0.01)$ estarán separadas 1 unidad.

3.4 EIGENVALORES COMPLEJOS

Los procedimientos de las secciones previas se basaron en la observación geométrica de que, para algunos sistemas lineales, ciertas curvas solución se encuentran sobre líneas rectas en el plano fase. Esta observación geométrica condujo a las nociones algebraicas de eigenvalores y eigenvectores. Éstas a su vez nos dieron las fórmulas para la solución general.

Sin embargo, esas ideas no funcionan para todos los sistemas lineales. Geométricamente llegamos a un atolladero cuando encontramos sistemas lineales cuyos campos de direcciones no muestran ninguna solución de línea recta (vea la figura 3.19). En este caso, es el álgebra de los eigenvalores y eigenvectores lo que conduce a un entendimiento del sistema. Aun cuando el método es diferente, las metas son las mismas: comenzando

con los elementos de la matriz de coeficientes, se trata de entender la geometría del plano fase, las gráficas $x(t)$ y $y(t)$, así como hallar la solución general.

Números complejos

En esta sección y en el resto del libro usaremos ampliamente los números complejos, los cuales son números de la forma $x + iy$, donde x y y son números reales e i es el número "imaginario" $\sqrt{-1}$. (En los apéndices se encuentra un breve resumen de las propiedades de los números complejos.)

Una advertencia: todos los matemáticos y casi todo mundo denota el número imaginario $\sqrt{-1}$ con la letra i. Los ingenieros eléctricos usan la letra i para la corriente, por lo que ellos usan la letra j para $\sqrt{-1}$.

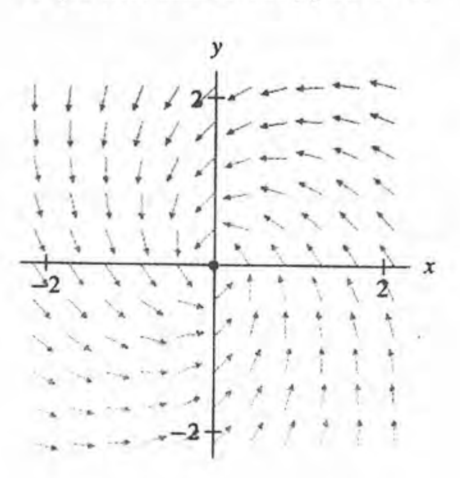


Figura 3.19
En el campo de direcciones para

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

Aparentemente no hay soluciones de línea recta.

Un sistema lineal sin soluciones de línea recta

Considere el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

Del campo de direcciones para este sistema (vea la figura 3.19), vemos que no hay curvas solución que se encuentren sobre líneas rectas. Más bien, las soluciones se mueven en espiral alrededor del origen.

El polinomio característico de $\mathbf{A}$ es

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (-2 - \lambda)(-2 - \lambda) + 9,$$

que se simplifica a

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13.$$

Los eigenvalores son las raíces del polinomio característico, es decir, las soluciones de la ecuación

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0.$$

Por tanto, para este sistema los eigenvalores son los números complejos $\lambda_1 = -2 + 3i$ y $\lambda_2 = -2 - 3i$. ¿Cómo encontraremos las soluciones y qué información nos dan los eigenvalores complejos?

Soluciones generales para sistemas con eigenvalores complejos

Lo más importante por recordar ahora es: no asustarse. Las cosas no son tan complicadas como parecen. No podemos aplicar las ideas geométricas de las secciones 3.2 y 3.3 para hallar las curvas solución que sean líneas rectas porque aquí ninguna solución pertenece a esa clasificación. Sin embargo, los procedimientos algebraicos que usamos en esas secciones funcionan de la misma manera para números complejos que para números reales. Las reglas de la aritmética para números complejos son exactamente las mismas que para los números reales, por lo que todos los cálculos que hicimos en las secciones previas son válidos aunque los eigenvalores son complejos. En consecuencia, nuestra principal observación sobre las soluciones de sistemas lineales aún son válidas cuando los eigenvalores son complejos. Es decir, dado un sistema lineal $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{AY}$, si λ es un eigenvalor para $\mathbf{A}$ y $\mathbf{Y}_0 = (x_0, y_0)$ es un eigenvector para λ, entonces

$$\mathbf{Y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{Y}_0 = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t}x_0 \\ e^{\lambda t}y_0 \end{pmatrix}$$

es una solución. Podemos comprobarlo muy fácil mediante diferenciación, tal como lo hicimos antes. Tenemos

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{\lambda t}\mathbf{Y}_0) = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{Y}_0 = e^{\lambda t}(\lambda\mathbf{Y}_0) = e^{\lambda t}\mathbf{AY}_0 = \mathbf{A}(e^{\lambda t}\mathbf{Y}_0) = \mathbf{AY}$$

porque $\mathbf{Y}_0$ es un eigenvector con eigenvalor λ, por lo que $\mathbf{Y}(t)$ es una solución. Por supuesto, necesitamos darle sentido al hecho de que la exponencial es ahora una función compleja y a que el eigenvector puede contener elementos complejos, pero esto no es realmente un problema. Lo importante aquí es que este cálculo es exactamente el mismo si los números son reales o complejos.

Ejemplo revisado

Para el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY}, \quad \text{donde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$$

sabemos ya que los eigenvalores son $\lambda_1 = -2 + 3i$ y $\lambda_2 = -2 - 3i$. Ahora encontramos el eigenvector para $\lambda_1 = -2 + 3i$ como si λ_1 fuera real, despejando $\mathbf{Y}_0$ en el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{AY}_0 = \lambda_1\mathbf{Y}_0.$$

Es decir, debemos encontrar $\mathbf{Y}_0 = (x_0, y_0)$ tal que

$$\begin{cases} -2x_0 - 3y_0 = (-2 + 3i)x_0 \\ 3x_0 - 2y_0 = (-2 + 3i)y_0, \end{cases}$$

que puede reescribirse como

$$\begin{cases} -3ix_0 - 3y_0 = 0 \\ 3x_0 - 3iy_0 = 0. \end{cases}$$

Como en el caso de los eigenvalores reales, esas ecuaciones son redundantes. (Multiplique ambos lados de la primera ecuación por i para obtener la segunda y recuerde que $i^2 = -1$.) Todas las soluciones de esas ecuaciones son pares de números complejos (x_0, y_0)

que satisfacen $-3ix_0 - 3y_0 = 0$, o $x_0 = iy_0$. Si hacemos $y_0 = 1$, entonces $x_0 = i$. En otras palabras, el vector $(i, 1)$ es un eigenvector para el eigenvalor $\lambda_1 = -2 + 3i$. Podemos verificar esto calculando

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i - 3 \\ 3i - 2 \end{pmatrix} = (-2+3i)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sabemos entonces que

$$\mathbf{Y}(t) = e^{(-2+3i)t}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ie^{(-2+3i)t} \\ e^{(-2+3i)t} \end{pmatrix}$$

es una solución del sistema.

Obtención de soluciones reales a partir de soluciones complejas

Tenemos entonces buenas y malas noticias. Las buenas son que podemos encontrar soluciones a sistemas lineales con eigenvalores complejos. Si este sistema es un modelo de poblaciones, ganancias o la posición de un dispositivo mecánico, entonces sólo tienen sentido los números reales. Es difícil imaginar "$5i$" depredadores o una posición de "$2 + 3i$" unidades desde la posición de reposo. En otras palabras, el significado físico de los números complejos no es fácil de concretar en una imagen. Tenemos que encontrar una manera de producir soluciones reales a partir de soluciones complejas.

La clave para obtener soluciones reales de soluciones complejas es la **fórmula de Euler**

$$e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b) = e^a \cos b + ie^a \operatorname{sen} b$$

para todo número real a y b. (Usando series de potencias, podemos verificar que

$$e^{ib} = \cos b + i \operatorname{sen} b,$$

y llegamos a la fórmula de Euler usando las leyes de los exponentes. Vea el apéndice sobre números complejos.) Con la fórmula de Euler podemos trabajar con exponentes complejos.

La fórmula de Euler es una de las más sorprendentes identidades en toda la matemática. Nos permite relacionar algunas de las funciones y constantes más importantes. Por ejemplo, si hacemos $a = 0$ y $b = \pi$, obtenemos

$$e^{\pi i} = e^0 \cos \pi + ie^0 \operatorname{sen} \pi,$$

de donde

$$e^{\pi i} = -1.$$

Es decir, cuando combinamos tres de los números más importantes en la matemática, e, i y π en la expresión $e^{i\pi}$, obtenemos -1.

Usamos la fórmula de Euler para definir una función exponencial compleja. Tenemos

$$\begin{aligned} e^{(\alpha+i\beta)t} &= e^{\alpha t}e^{i\beta t} \\ &= e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t) \\ &= e^{\alpha t} \cos \beta t + ie^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t. \end{aligned}$$

Para el ejemplo anterior, esto da

$$e^{(-2+3i)t} = e^{-2t}\cos 3t + ie^{-2t}\,\text{sen}\,3t.$$

Ahora podemos reescribir la solución $\mathbf{Y}(t)$ como

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}(t) &= (e^{-2t}\cos 3t + ie^{-2t}\,\text{sen}\,3t)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (e^{-2t}\cos 3t + ie^{-2t}\,\text{sen}\,3t)i \\ e^{-2t}\cos 3t + ie^{-2t}\,\text{sen}\,3t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ie^{-2t}\cos 3t - e^{-2t}\,\text{sen}\,3t \\ e^{-2t}\cos 3t + ie^{-2t}\,\text{sen}\,3t \end{pmatrix},\end{aligned}$$

que puede descomponerse en

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} -e^{-2t}\,\text{sen}\,3t \\ e^{-2t}\cos 3t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} e^{-2t}\cos 3t \\ e^{-2t}\,\text{sen}\,3t \end{pmatrix}.$$

Hasta aquí sólo hemos reordenado la solución $\mathbf{Y}(t)$ para aislar la parte que contiene el número i. Ahora emplearemos el hecho de que estamos tratando con un sistema *lineal* para encontrar las soluciones reales requeridas.

TEOREMA Suponga que $\mathbf{Y}(t)$ es una solución compleja de un sistema lineal

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\mathbf{Y},$$

donde la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ tiene elementos reales (a, b, c y d son números reales). Suponga que

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}_{\text{re}}(t) + i\,\mathbf{Y}_{\text{im}}(t),$$

donde $\mathbf{Y}_{\text{re}}(t)$ y $\mathbf{Y}_{\text{im}}(t)$ son funciones reales de t. Entonces $\mathbf{Y}_{\text{re}}(t)$ y $\mathbf{Y}_{\text{im}}(t)$ son soluciones del sistema original $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{AY}$. ■

Es importante observar que no hay ninguna i en la expresión $\mathbf{Y}_{\text{im}}(t)$. Hemos factorizado y cancelado todas las i de esta expresión.

Para verificar este teorema, aplicamos la premisa de que $\mathbf{Y}(t)$ es una solución. En otras palabras,

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY} \quad \text{para toda } t.$$

Ahora reemplazamos $\mathbf{Y}(t)$ por $\mathbf{Y}_{\text{re}}(t) + i\mathbf{Y}_{\text{im}}(t)$ en ambos lados de la ecuación. Sobre el lado izquierdo, las usuales reglas de diferenciación dan

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{Y}}{dt} &= \frac{d(\mathbf{Y}_{\text{re}} + i\mathbf{Y}_{\text{im}})}{dt} \\ &= \frac{d\mathbf{Y}_{\text{re}}}{dt} + i\frac{d\mathbf{Y}_{\text{im}}}{dt}.\end{aligned}$$

En el lado derecho, partimos de que éste es un sistema lineal para obtener

$$\begin{aligned}\mathbf{AY}(t) &= \mathbf{A}(\mathbf{Y}_{\text{re}}(t) + i\ \mathbf{Y}_{\text{im}}(t)) \\ &= \mathbf{A}\ \mathbf{Y}_{\text{re}}(t) + i\mathbf{A}\ \mathbf{Y}_{\text{im}}(t).\end{aligned}$$

Por lo que tenemos

$$\frac{d\mathbf{Y}_{\text{re}}}{dt} + i\frac{d\mathbf{Y}_{\text{im}}}{dt} = \mathbf{AY}_{\text{re}} + i\mathbf{AY}_{\text{im}}$$

para toda t. Dos números complejos son iguales si y sólo si sus partes reales e imaginarias son iguales. Por consiguiente, la única manera en que la ecuación anterior puede ser válida es si

$$\frac{d\mathbf{Y}_{\text{re}}}{dt} = \mathbf{AY}_{\text{re}} \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{Y}_{\text{im}}}{dt} = \mathbf{AY}_{\text{im}},$$

y esto es exactamente lo que significa decir que $\mathbf{Y}_{\text{re}}(t)$ y $\mathbf{Y}_{\text{im}}(t)$ son soluciones de $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{AY}$.

Terminación del primer ejemplo

Recuerde que para el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{Y},$$

hemos mostrado que la función vectorial compleja

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} -e^{-2t}\operatorname{sen} 3t \\ e^{-2t}\cos 3t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} e^{-2t}\cos 3t \\ e^{-2t}\operatorname{sen} 3t \end{pmatrix}$$

es una solución. Tomando las partes reales e imaginarias, sabemos que la parte real

$$\mathbf{Y}_{\text{re}}(t) = \begin{pmatrix} -e^{-2t}\operatorname{sen} 3t \\ e^{-2t}\cos 3t \end{pmatrix}$$

y la parte imaginaria

$$\mathbf{Y}_{\text{im}}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t}\cos 3t \\ e^{-2t}\operatorname{sen} 3t \end{pmatrix}$$

son soluciones del sistema original, y son independientes ya que sus valores iniciales $\mathbf{Y}_{\text{re}}(0) = (0, 1)$ y $\mathbf{Y}_{\text{im}}(0) = (1, 0)$ son independientes. Entonces, la solución general de este sistema es

$$\mathbf{Y}(t) = k_1\begin{pmatrix} -e^{-2t}\operatorname{sen} 3t \\ e^{-2t}\cos 3t \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} e^{-2t}\cos 3t \\ e^{-2t}\operatorname{sen} 3t \end{pmatrix}$$

para constantes k_1 y k_2. Esto puede reescribirse en la forma

$$\mathbf{Y}(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} -k_1\operatorname{sen} 3t + k_2\cos 3t \\ k_1\cos 3t + k_2\operatorname{sen} 3t \end{pmatrix}.$$

Un pequeño regalo

Tome en cuenta que en el ejemplo anterior sólo tuvimos que calcular el eigenvector correspondiente a uno de los dos eigenvalores complejos. Separando la solución compleja resultante en sus partes real e imaginaria, obtuvimos un par de soluciones independientes. Entonces, usar aritmética compleja significa que sólo tenemos que hacer la mitad del trabajo. (Si una matriz con coeficientes reales tiene eigenvalores complejos, entonces los eigenvalores guardan una relación; lo mismo ocurre con los eigenvectores. Vea los ejercicios 17-20.)

Análisis cualitativo

El campo de direcciones para el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY}, \qquad \text{donde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

indica que las curvas solución se mueven en espiral hacia el origen (vea la figura 3.20). Las gráficas correspondientes $x(t)$ y $y(t)$ de las soluciones deben alternar entre valores positivos y negativos con amplitud decreciente, conforme la curva solución en el plano fase se enrolla alrededor del origen. Los dibujos de la curva solución y las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ confirman lo anterior, por lo menos en alguna medida (vea las figuras 3.20 y 3.21). En éstas, parece que la solución se enrolla sólo una vez alrededor del origen antes de alcanzar (0, 0). En realidad, dicha solución describe un número infinito de espirales difíciles de detectar. En la figura 3.22 amplificamos una pequeña porción de la figura 3.20. De hecho, la solución continúa moviéndose en espiral.

La fórmula para la solución general de este sistema nos indica el comportamiento detallado de la espiral. La oscilación en $x(t)$ y $y(t)$ es causada por los términos seno y coseno. Todas esas expresiones trigonométricas son de la forma sen $3t$ y cos $3t$, de manera

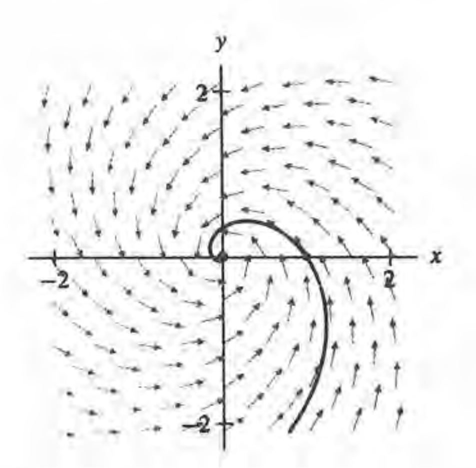


Figura 3.20
Curva solución en el plano fase para

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{Y}.$$

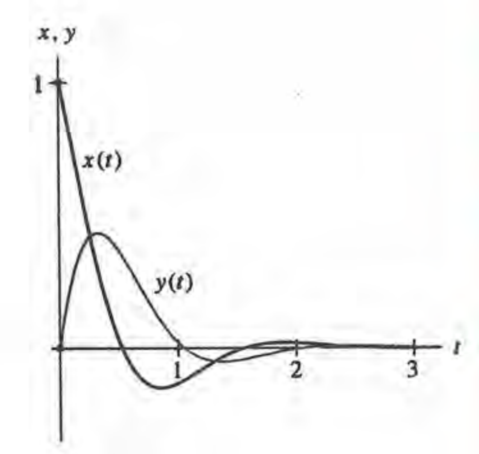


Figura 3.21
Gráficas $x(t)$ y $y(t)$ de una solución para esta ecuación diferencial.

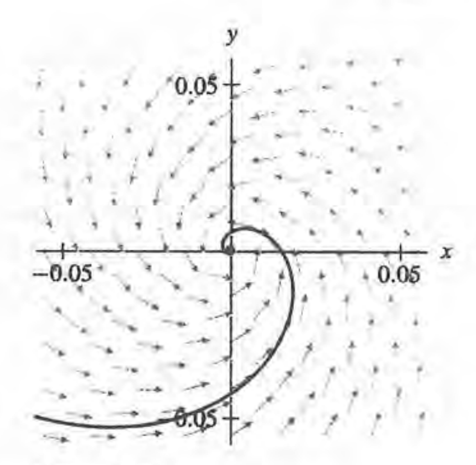


Figura 3.22
Amplificación de la figura 3.20.

que cuando t crece a expensas de $2\pi/3$, esos términos retornan a sus valores originales. Por consiguiente, el periodo de la oscilación alrededor del origen es siempre $2\pi/3$, independientemente de qué tan grande sea t o qué tan cerca del origen está la solución. Dicha tendencia al origen es causada por el término exponencial e^{-2t}, el cual muestra que la amplitud de las oscilaciones de las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ decrecen de acuerdo con esta razón rápida. De aquí también inferimos por qué es difícil ver esas oscilaciones cerca del origen.

Afortunadamente, este tipo de descripción de soluciones puede lograrse sin recurrir al cálculo de la solución general del sistema. De hecho, puede obtenerse sólo a partir de los eigenvalores.

El comportamiento cualitativo de sistemas con eigenvalores complejos

El análisis anterior puede generalizarse a cualesquier sistemas lineales con eigenvalores complejos. Primero se encuentra una solución compleja hallando los eigenvalores y eigenvectores complejos. Luego se toman las partes real e imaginaria de ésta para obtener dos soluciones independientes (vea el ejercicio 19 para comprobar que las partes real e imaginaria son soluciones independientes). Finalmente, se obtiene la solución general de la manera usual como una combinación de las dos soluciones particulares independientes. En algunas ocasiones este proceso es muy tedioso, pero funciona. Si la solución general es lo que necesitamos, entonces podemos encontrarla.

Igual que en el caso de los eigenvalores, podemos decir una gran cantidad de cosas sobre el sistema a partir de los eigenvalores complejos sin tener que hacer todos los cálculos detallados para obtener la solución general. Suponga que

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY}$$

es un sistema lineal con eigenvalores complejos $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$. (La verificación de que los eigenvalores complejos siempre aparecen en parejas de esta forma es un ejercicio interesante; vea el ejercicio 17.) Entonces, sabemos que las soluciones complejas tienen la forma

$$\mathbf{Y}(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}\mathbf{Y}_0,$$

donde $\mathbf{Y}_0$ es un eigenvector (complejo) de la matriz $\mathbf{A}$. Podemos reescribirlo como

$$\mathbf{Y}(t) = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t)\mathbf{Y}_0.$$

Como $\mathbf{Y}_0$ es una constante, las partes real e imaginaria de la solución $\mathbf{Y}(t)$ son una combinación de dos tipos de términos, los términos exponenciales y los trigonométricos. El efecto del término exponencial en la solución depende del signo de α. Si $\alpha > 0$, entonces el término $e^{\alpha t}$ crece exponencialmente cuando $t \to \infty$ y la curva solución se mueve en espiral "hacia el infinito". Si $\alpha < 0$, en ese caso el término $e^{\alpha t}$ tiende exponencialmente a cero cuando t se incrementa, por lo que las soluciones tienden al origen. Si $\alpha = 0$, entonces $e^{\alpha t}$ es idénticamente 1 y las soluciones oscilan con amplitud constante todo el tiempo, es decir, son periódicas.

Los términos seno y coseno alternan de valores positivos a negativos y nuevamente de regreso conforme t crece o decrece; por tanto, esos términos hacen que $x(t)$ y $y(t)$ oscilen. Por consiguiente, las soluciones en el plano fase xy se desplazan en espiral alrededor de (0, 0). El periodo de esta oscilación es el tiempo que les toma dar una vuelta (digamos, de un cruce del eje x positivo al siguiente), y está determinado por β. Las funciones sen βt y cos βt satisfacen las ecuaciones

$$\operatorname{sen} \beta(t + 2\pi/\beta) = \operatorname{sen} \beta t$$

$$\cos \beta(t + 2\pi/\beta) = \cos \beta t,$$

por lo que al incrementar t en $2\pi/\beta$, sen βt y cos βt retornan a sus valores originales (vea la figura 3.23).

Podemos resumir estas observaciones con la siguiente clasificación. Dado un sistema lineal

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY}$$

que tiene eigenvalores complejos $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\beta > 0$, las soluciones se mueven en espiral alrededor del origen con un periodo de $2\pi/\beta$. Además:

- Si $\alpha < 0$, las soluciones se mueven en espiral hacia el origen. En este caso el origen se llama un **sumidero espiral**.
- Si $\alpha > 0$, las soluciones se mueven en espiral alejándose del origen. Entonces el origen se denomina una **fuente espiral**.
- Si $\alpha = 0$, las soluciones son *periódicas*. Vuelven exactamente a sus condiciones iniciales en el plano fase y repiten la misma curva cerrada una y otra vez. Aquí el origen se llama un **centro**.

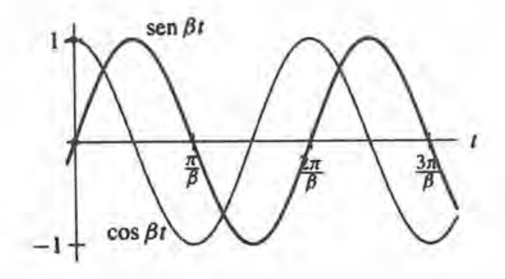


Figura 3.23
Gráficas de cos βt y sen βt. Observe dónde corta al eje t la gráfica.

La pregunta de cómo es el desplazamiento en espiral de las soluciones (en el sentido las manecillas del reloj o al contrario) puede responderse observando el campo de direcciones. Incluso un solo vector del campo de direcciones nos indica cómo es el desplazamiento en espiral de un sistema con eigenvalores complejos. Por ejemplo, si el campo de direcciones en (1, 0) señala hacia abajo en el cuarto cuadrante, entonces las soluciones se mueven en sentido de las manecillas del reloj. Si el campo de direcciones en (1, 0) señala hacia arriba en el primer cuadrante, entonces las soluciones se desplazan en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Como hemos visto, los términos sen βt y cos βt en las soluciones hacen que éstas oscilen con un periodo de $2\pi/\beta$. Esta cantidad se llama el **periodo natural** del sistema; y en ese intervalo, cada solución da una vuelta alrededor del origen. La **frecuencia natural** es el recíproco del periodo natural, esto es, $\beta/2\pi$.

Una advertencia respecto a la terminología: en algunos temas, los términos *frecuencia natural* y *periodo natural* se reservan para los sistemas lineales cuyos eigenvalores tienen una parte real nula (es decir, sólo para centros, pero no para sumideros o fuentes espirales; esta convención es razonable porque las soluciones del sistema son periódicas sólo para centros). Nosotros usaremos los términos *periodo natural* y *frecuencia natural* para cualquier sistema lineal con eigenvalores complejos.

Una fuente espiral

Considere el problema de valor inicial

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{BY}, \quad \mathbf{Y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{donde } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los eigenvalores son las raíces del polinomio característico

$$\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = (0 - \lambda)(2 - \lambda) + 6 = \lambda^2 - 2\lambda + 6,$$

que son $\lambda = 1 + \pm i\sqrt{5}$. Como las partes reales de los eigenvalores son positivas, el origen es una fuente espiral y el periodo natural del sistema es $2\pi/\sqrt{5}$. Así, la solución del problema de valor inicial oscila con amplitud creciente y periodo constante de $2\pi/\sqrt{5}$. El campo de direcciones (vea la figura 3.24) muestra que las soluciones se mueven en espiral en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del origen en el plano fase x-y.

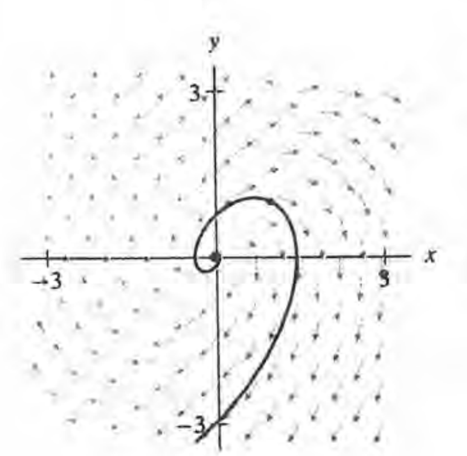


Figura 3.24
Campo de direcciones y solución del problema de valor inicial

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{Y} \quad \text{y} \quad \mathbf{Y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La solución se mueve en espiral alejándose del origen.

Para encontrar la fórmula de la solución del problema de valor inicial, debemos encontrar un eigenvector (x_0, y_0) para uno de los eigenvalores, digamos $1 + i\sqrt{5}$. En otras palabras, resolvemos

$$\mathbf{B}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = (1 + i\sqrt{5})\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

que es equivalente a

$$\begin{cases} 2y_0 = (1 + i\sqrt{5})x_0 \\ -3x_0 + 2y_0 = (1 + i\sqrt{5})y_0. \end{cases}$$

Igual que en el caso de los eigenvalores reales, esas dos ecuaciones son redundantes. (La segunda de ellas puede convertirse en la primera, restando $2y_0$ de ambos lados y luego multiplicándolos por $-(1 + i\sqrt{5})/3$.) Sólo necesitamos un eigenvector; escogemos cualquier valor conveniente de x_0 y despejamos y_0. Si hacemos $x_0 = 2$, entonces $y_0 = 1 + i\sqrt{5}$. Por consiguiente, para el eigenvalor $\lambda = 1 + i\sqrt{5}$, el vector $(2, 1 + i\sqrt{5})$ es un eigenvector.

La solución compleja correspondiente es

$$\mathbf{Y}_1(t) = e^{(1+i\sqrt{5})t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 + i\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Reescribiéndola mediante la fórmula de Euler, obtenemos

$$\mathbf{Y}_1(t) = e^t\begin{pmatrix} 2\cos(\sqrt{5}\,t) \\ \cos(\sqrt{5}\,t) - \sqrt{5}\,\text{sen}(\sqrt{5}\,t) \end{pmatrix} + ie^t\begin{pmatrix} 2\,\text{sen}(\sqrt{5}\,t) \\ \sqrt{5}\cos(\sqrt{5}\,t) + \text{sen}(\sqrt{5}\,t) \end{pmatrix}.$$

La solución general es

$$\mathbf{Y}(t) = k_1 e^t\begin{pmatrix} 2\cos(\sqrt{5}\,t) \\ \cos(\sqrt{5}\,t) - \sqrt{5}\,\text{sen}(\sqrt{5}\,t) \end{pmatrix} + k_2 e^t\begin{pmatrix} 2\,\text{sen}(\sqrt{5}\,t) \\ \sqrt{5}\cos(\sqrt{5}\,t) + \text{sen}(\sqrt{5}\,t) \end{pmatrix},$$

donde k_1 y k_2 son constantes arbitrarias. Para resolver el problema de valor inicial, despejamos k_1 y k_2 igualando la solución general en $t = 0$ con la condición inicial $(1, 1)$, con lo que tenemos

$$k_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, $k_1 = 1/2$ y $k_2 = 1/(2\sqrt{5})$. La solución del problema de valor inicial es

$$\mathbf{Y}(t) = \frac{1}{2}e^t\begin{pmatrix} 2\cos(\sqrt{5}\,t) \\ \cos(\sqrt{5}\,t) - \sqrt{5}\,\text{sen}(\sqrt{5}\,t) \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{5}}e^t\begin{pmatrix} 2\,\text{sen}(\sqrt{5}\,t) \\ \sqrt{5}\cos(\sqrt{5}\,t) + \text{sen}(\sqrt{5}\,t) \end{pmatrix}.$$

Centros

Considere un oscilador armónico con masa $m = 1$, constante de resorte $k = 2$ y sin amortiguamiento ($b = 0$). La ecuación de segundo orden es

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2y,$$

y el sistema lineal correspondiente es

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{CY}, \quad \text{donde } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}.$$

El campo de direcciones para este sistema está dado en la figura 3.25. Aquí vemos que la curva solución encierra al origen. De esto predecimos que los eigenvalores para este sistema son complejos. Es difícil determinar de la forma del campo de direcciones si las curvas solución son periódicas o si se mueven muy lentamente al acercarse o alejarse del origen. Como esas ecuaciones modelan un sistema mecánico para el que hemos supuesto y que no tiene amortiguamiento, podríamos sospechar que las curvas solución son periódicas. Podemos comprobarlo calculando los eigenvalores para el sistema. Como información adicional, los eigenvalores nos dan el periodo de las oscilaciones.

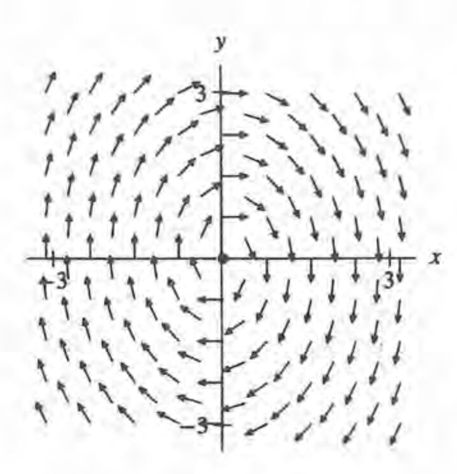


Figura 3.25
Campo de direcciones para el sistema del oscilador armónico sin amortiguamiento

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{CY}, \quad \text{donde } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aunque el campo de direcciones sugiere que los eigenvalores del sistema son complejos, no podemos determinar observando el campo de direcciones si el origen es un centro, o una fuente o un sumidero espirales.

Los eigenvalores para la matriz **C** son las raíces de su polinomio característico

$$\det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}) = (0 - \lambda)(0 - \lambda) + 2 = \lambda^2 + 2,$$

que son $\lambda = \pm i\sqrt{2}$. Por consiguiente, el origen es un centro y todas las soluciones son periódicas. La parte imaginaria del eigenvalor es $\sqrt{2}$, por lo que el periodo natural del sistema es $(2\pi)/\sqrt{2}$. Esto significa que cada solución termina una oscilación en $\sqrt{2}\pi$ unidades de tiempo, sea cual fuera su condición inicial.

De hecho, todas las curvas solución para este sistema se encuentran sobre elipses que encierran al origen. Para conocer el motivo, calculamos la solución general del sistema. Usando métodos de esta sección encontramos primero que un eigenvector complejo correspondiente al eigenvalor $i\sqrt{2}$ es $(1, i\sqrt{2})$, y obtenemos la solución general

$$\mathbf{Y}(t) = k_1 \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}\,t) \\ -\sqrt{2}\operatorname{sen}(\sqrt{2}\,t) \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(\sqrt{2}\,t) \\ \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}\,t) \end{pmatrix}.$$

Note que si $k_2 = 0$,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1\cos(\sqrt{2}\,t) \\ -k_1\sqrt{2}\operatorname{sen}(\sqrt{2}\,t) \end{pmatrix}.$$

Como tenemos que

$$\frac{(x(t))^2}{k_1^2} + \frac{(y(t))^2}{2k_1^2} = 1,$$

esta solución se encuentra sobre una elipse.

Todas las curvas solución de sistemas lineales, para los que el origen es un centro, son elipses (o círculos). Sin embargo, no necesariamente tienen sus semiejes mayor y menor a lo largo de los ejes x y y. Por ejemplo, considere el sistema lineal

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{DY}, \qquad \text{donde } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Los eigenvalores de esta matriz son raíces de $\lambda^2 + 1 = 0$, es decir, $\lambda = \pm i$. El retrato fase consta enteramente de elipses, pero éstas no están "centradas" (vea la figura 3.26 y el ejercicio 26).

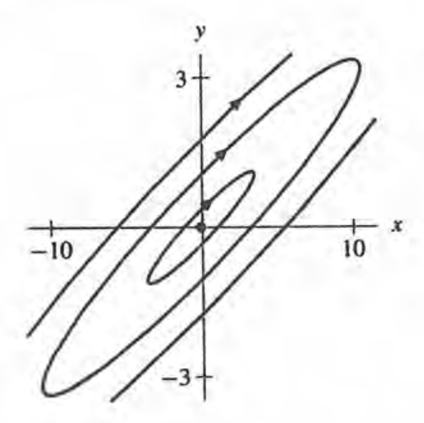


Figura 3.26
El retrato fase para el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{Y}.$$

Tiendas de CD de Pablo y Roberto revisadas

Recuerde el modelo para las tiendas de discos compactos de Pablo y Roberto de la sección 3.1, para el que se usó el sistema lineal

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY}.$$

Ahora supongamos que la matriz de coeficientes es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nos gustaría predecir el comportamiento de las soluciones para este sistema con tan pocos cálculos como fuese posible.

Primero calculamos los eigenvalores del polinomio característico

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (2 - \lambda)(-1 - \lambda) + 4 = \lambda^2 - \lambda + 2 = 0.$$

Las raíces son $(1 \pm i\sqrt{7})/2$, por lo que sabemos que las soluciones se mueven en espiral alrededor del punto de equilibrio en (0, 0). Como la parte real de los eigenvalores es 1/2, el origen es una fuente espiral. Esta información nos dice que toda solución, excepto el punto de equilibrio (0, 0), se aleja en espiral de (0, 0) en lazos cada vez mayores cuando t crece. Podemos determinar la dirección (en sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario) y forma aproximada de las curvas solución esbozando el retrato fase (vea la figura 3.27).

Las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ de las soluciones oscilan con amplitud creciente. El periodo de esas oscilaciones es $2\pi/(\sqrt{7}/2) = 4\pi/\sqrt{7} \approx 4.71$ y la amplitud aumenta de acuerdo con $e^{t/2}$. En la figura 3.28 esbozamos el comportamiento cualitativo de las gráficas $x(t)$ y $y(t)$.

Pablo y Roberto quedarán precisamente en el punto de no ganancia y no pérdida $(x, y) = (0, 0)$, o bien las ganancias y pérdidas de sus tiendas subirán y bajarán con amplitud creciente. El punto de equilibrio en el origen también es inestable, por lo que una ganancia o pérdida mínimas en cualquiera de las tiendas conducirá al final a grandes oscilaciones en las ganancias de ambas tiendas. Sería muy difícil predecir este comportamiento observando sólo al sistema lineal sin efectuar ningún cálculo.

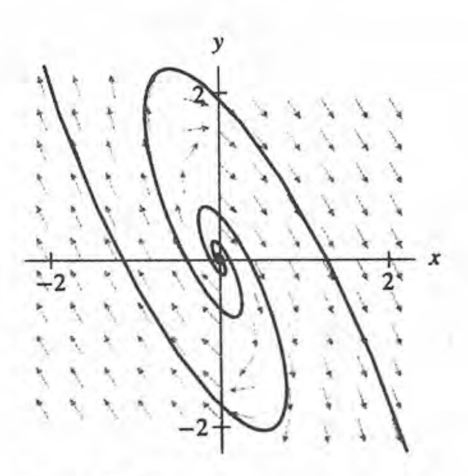


Figura 3.27
Retrato fase para

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

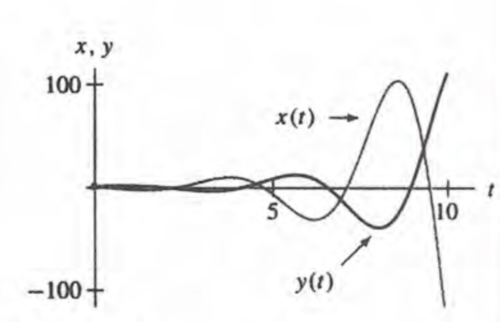


Figura 3.28
Gráficas $x(t)$ y $y(t)$ de una solución para el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 3.4

1. Reescriba la función vectorial

$$\mathbf{Y}(t) = e^{(1+3i)t} \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

en la forma $\mathbf{Y}_{re}(t) + i\mathbf{Y}_{im}(t)$, donde $\mathbf{Y}_{re}(t)$ y $\mathbf{Y}_{im}(t)$ son funciones reales.

2. Reescriba la función vectorial

$$\mathbf{Y}(t) = e^{(2+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4i \end{pmatrix}$$

en la forma $\mathbf{Y}_{re}(t) + i\mathbf{Y}_{im}(t)$, donde $\mathbf{Y}_{re}(t)$ y $\mathbf{Y}_{im}(t)$ son funciones reales.

En los ejercicios 3-8, cada sistema lineal tiene eigenvalores complejos. Para cada sistema,

(a) encuentre los eigenvalores;
(b) determine si el origen es un sumidero espiral, una fuente espiral o un centro;
(c) determine el periodo natural y la frecuencia natural de las oscilaciones;
(d) determine la dirección de las oscilaciones en el plano fase (¿van las soluciones en el sentido de las manecillas del reloj o al contrario alrededor del origen?); y
(e) esboce el plano fase x-y y las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ para las soluciones con las condiciones iniciales indicadas.

3. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$, con condición inicial $\mathbf{Y}_0 = (1, 0)$

4. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$, con condición inicial $\mathbf{Y}_0 = (1, 1)$

5. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$, con condición inicial $\mathbf{Y}_0 = (0, 1)$

6. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$, con condición inicial $\mathbf{Y}_0 = (-1, 1)$

7. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$, con condición inicial $\mathbf{Y}_0 = (2, 1)$

8. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$, con condición inicial $\mathbf{Y}_0 = (1, -1)$

En los ejercicios 9-14, los sistemas lineales son los mismos que en los ejercicios 3-8. Para cada sistema,

(a) encuentre la solución general;
(b) determine la solución particular con el valor inicial dado; y
(c) esboce las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ de la solución particular. (Compare esos esbozos con los que obtuvo usted en el problema correspondiente de los ejercicios 3-8.)

9. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$, con condición inicial $\mathbf{Y}_0 = (1, 0)$

10. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$, con condición inicial $\mathbf{Y}_0 = (1, 1)$

11. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$, con condición inicial $\mathbf{Y}_0 = (0, 1)$

12. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$, con condición inicial $\mathbf{Y}_0 = (-1, 1)$

13. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$, con condición inicial $\mathbf{Y}_0 = (2, 1)$

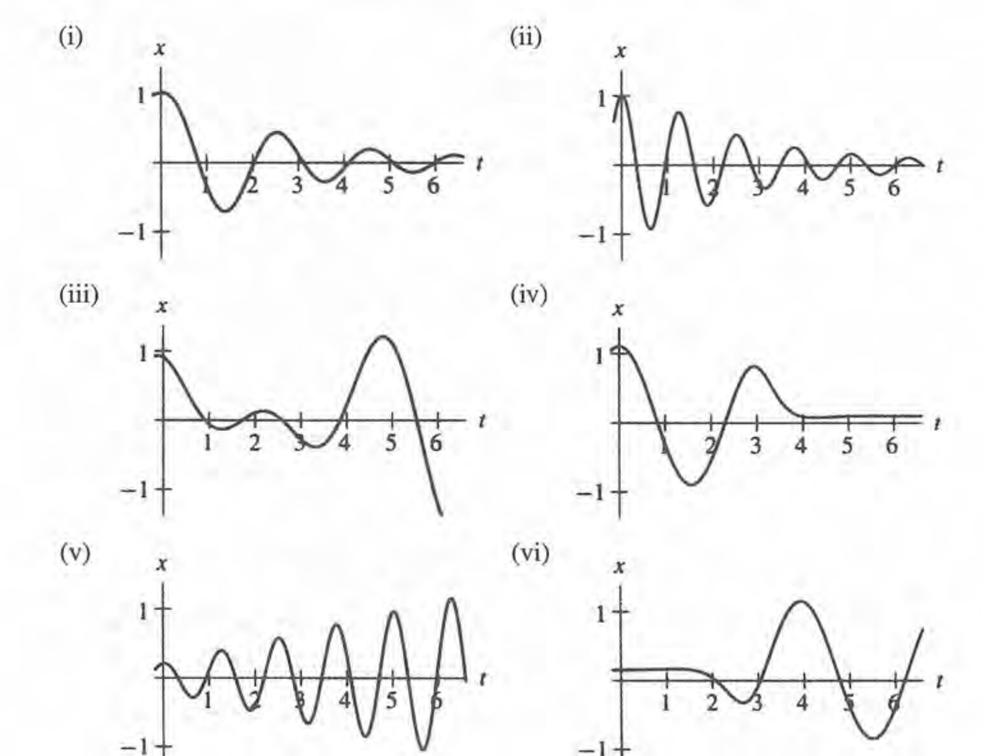
14. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$, con condición inicial $\mathbf{Y}_0 = (1, -1)$

15. Las seis figuras siguientes son gráficas de funciones $x(t)$. Dos de ellas son gráficas $x(t)$ de una solución de un sistema lineal con eigenvalores complejos, y las otras cuatro no lo son.

(a) Identifique cuáles son gráficas $x(t)$ de una solución de un sistema lineal.

(b) Para esas dos gráficas, dé el periodo natural del sistema y clasifique el punto de equilibrio en el origen como un sumidero espiral, una fuente espiral o un centro.

(c) Para cada una de las otras cuatro gráficas, describa cómo puede asegurar que son la gráfica $x(t)$ de un sistema lineal con eigenvalores complejos.



16. Demuestre que una matriz de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

con $b \neq 0$, debe tener eigenvalores complejos.

17. Suponga que a y b son números reales y que el polinomio $\lambda^2 + a\lambda + b$ tiene $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ como una raíz con $\beta \neq 0$. Demuestre que $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, el complejo conjugado de λ_1, debe también ser una raíz. [*Sugerencia:* Hay (por lo menos) dos maneras de atacar este problema. Observe la forma de la fórmula cuadrática para las raíces, o vea que

$$(\alpha + i\beta)^2 + a(\alpha + i\beta) + b = 0$$

y tome el complejo conjugado de ambos lados de esta ecuación.]

18. Considere que la matriz **A** con elementos reales tiene eigenvalores complejos $\lambda = \alpha + i\beta$ y $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ con $\beta \neq 0$. Demuestre que los eigenvectores de **A** deben ser complejos; es decir, compruebe que si $\mathbf{Y}_0 = (x_0, y_0)$ es un eigenvector para **A**, entonces x_0 o y_0 tienen ambas una parte imaginaria no nula.

19. Digamos que la matriz **A** con elementos reales tiene el eigenvalor complejo $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$. Si $\mathbf{Y}_0$ es un eigenvector para λ, escriba $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}_1 + i\mathbf{Y}_2$, donde $\mathbf{Y}_1 = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{Y}_2 = (x_2, y_2)$ tienen elementos reales. Demuestre que $\mathbf{Y}_1$ y $\mathbf{Y}_2$ son linealmente independientes. [*Sugerencia:* Suponga que no son linealmente independientes. Entonces $(x_2, y_2) = k(x_1, y_1)$ para alguna constante k. Entonces $\mathbf{Y}_0 = (1 + ik)\mathbf{Y}_1$. Use luego el hecho de que $\mathbf{Y}_0$ es un eigenvector de **A** y de que $\mathbf{A}\mathbf{Y}_1$ no contiene parte imaginaria.]

20. Suponga que la matriz **A** con elementos reales tiene eigenvalores complejos $\lambda = \alpha + i\beta$ y $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$. Tome en cuenta también que $\mathbf{Y}_0 = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)$ es un eigenvector para el eigenvalor λ. Demuestre que $\overline{\mathbf{Y}_0} = (x_1 - iy_1, x_2 - iy_2)$ es un eigenvector para el eigenvalor $\overline{\lambda}$. En otras palabras, el complejo conjugado de un eigenvector para λ es un eigenvector para $\overline{\lambda}$.

21. Considere la función $x(t) = e^{-\alpha t}$ sen (βt) para $\alpha, \beta > 0$.

    (a) ¿Cuál es la distancia entre ceros sucesivos de esta función? De manera más precisa, si $t_1 < t_2$ son tales que $x(t_1) = x(t_2) = 0$ y $x(t) \neq 0$ para $t_1 < t < t_2$, entonces ¿qué es $t_2 - t_1$?

    (b) ¿Cuál es la distancia entre el primer máximo local y el primer mínimo local de $x(t)$ para $t > 0$?

    (c) ¿Cuál es la distancia entre los dos primeros máximos locales de $x(t)$ para $t > 0$?

    (d) ¿Cuál es la distancia entre $t = 0$ y el primer máximo local de $x(t)$ para $t > 0$?

22. Demuestre que una función de la forma

$$x(t) = k_1 \cos \beta t + k_2 \operatorname{sen} \beta t$$

puede escribirse como

$$x(t) = K \cos(\beta t - \phi),$$

donde $K = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$. (A veces una solución de un sistema lineal con coeficientes complejos se expresa en esta forma para aclarar su comportamiento. La magnitud K da la *amplitud* de la solución y el ángulo ϕ es la *fase* de la solución.) [*Sugerencia:* Escoja ϕ de manera que $K \cos \phi = k_1$ y K sen $\phi = k_2$.]

23. Para la ecuación de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0:$$

(a) Escriba esta ecuación como un sistema lineal de primer orden.

(b) ¿Qué condiciones en p y q garantizan que los eigenvalores del correspondiente sistema lineal son complejos?

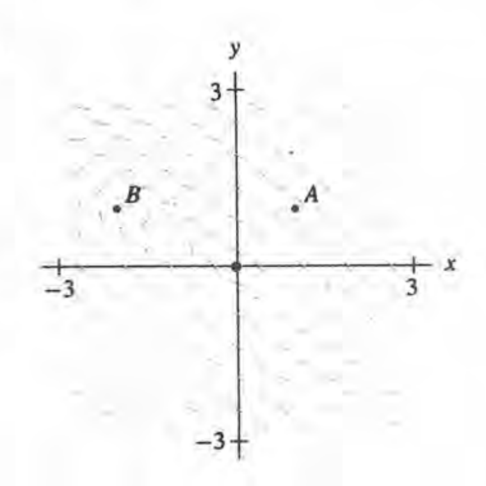
(c) ¿Qué relación entre p y q garantiza que el origen es un sumidero espiral? ¿Qué relación asegura que es una fuente espiral? ¿Y cuál otra nos dice que el origen es un centro?

(d) Si los eigenvalores son complejos, ¿qué condiciones en p y q nos indican que las soluciones se mueven en espiral alrededor del origen en el sentido de las manecillas del reloj?

24. El campo de pendientes para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -0.9x - 2y$$
$$\frac{dy}{dt} = x + 1.1y$$

se muestra a la derecha. Trace las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ para las condiciones iniciales $A = (1, 1)$ y $B = (-2, 1)$. ¿Qué tienen en común las gráficas?



25. (Pregunta sencilla) Hemos visto que los sistemas lineales con eigenvalores reales pueden clasificarse como sumideros, fuentes o puntos silla, dependiendo de si los eigenvalores son mayores o menores que cero. Los sistemas con eigenvalores complejos pueden clasificarse como fuentes espirales, sumideros espirales o centros, dependiendo del signo de la parte real del eigenvalor. ¿Por qué no hay un tipo de sistema lineal llamado "punto silla" espiral?

26. Considere el sistema lineal

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{Y}.$$

Demuestre que todas las curvas solución en el retrato fase para este sistema son elípticas.

3.5 CASOS ESPECIALES: EIGENVALORES REPETIDOS Y CERO

En las tres secciones previas tratamos con los sistemas lineales

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY}$$

para los cuales la matriz $\mathbf{A}$ de 2×2 tiene dos eigenvalores reales distintos no nulos o complejos. En esos casos podemos usar los eigenvalores y eigenvectores para esbozar las soluciones en el plano fase x-y, dibujar las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ y obtener una fórmula explícita para la solución general. No hemos tratado aún con el caso en que el polinomio característico de $\mathbf{A}$ tenga nada más una raíz (una raíz doble), por lo que se tiene un solo eigenvalor. En las secciones previas clasificamos también el punto de equilibrio en el origen como un sumidero, una fuente, un punto silla, un sumidero espiral, una fuente espiral o un centro, de acuerdo con el signo de los eigenvalores (o el signo de sus partes reales). Este esquema de clasificación deja fuera los casos en que uno o ambos eigenvalores son cero. En esta sección modificaremos nuestros métodos para tratar esos casos restantes.

La mayoría de los polinomios cuadráticos tienen dos raíces distintas no nulas, por lo que los sistemas lineales con un solo eigenvalor o con un eigenvalor igual a cero son relativamente raros. Esos sistemas a veces son denominados *degenerados*. No obstante, también son importantes. Esos sistemas especiales forman las "fronteras" entre los tipos más comunes de sistemas lineales. Siempre que estudiamos sistemas lineales que dependen de un parámetro y modifican su comportamiento o se bifurcan cuando el parámetro cambia, esos sistemas especiales juegan un papel crucial (vea la sección 3.7).

Un sistema con eigenvalores repetidos

Considere el sistema lineal

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{Y}.$$

El campo de direcciones para este sistema se ve algo diferente a los campos vectoriales que hemos considerado hasta ahora, ya que parece haber sólo una línea recta de soluciones (vea la figura 3.29).

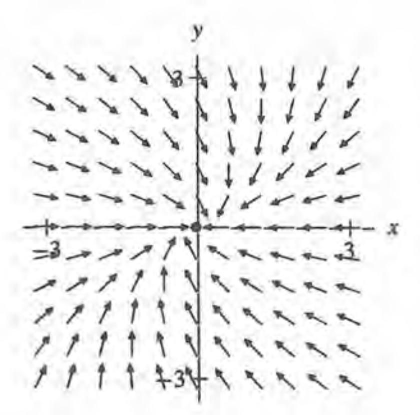


Figura 3.29
Campo de direcciones para el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{Y}.$$

Todas las soluciones de línea recta se encuentran sobre el eje x.

Desde un punto de vista algebraico, esta matriz es también poco común. Los eigenvalores de este sistema son las raíces del polinomio característico

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (-2 - \lambda)(-2 - \lambda) - 0 = 0,$$

que tiene sólo una raíz en $\lambda = -2$. Decimos que $\mathbf{A}$ tiene un eigenvalor "repetido" $\lambda = -2$. Encontramos los eigenvectores asociados resolviendo $\mathbf{A}\mathbf{Y}_0 = -2\mathbf{Y}_0$ para $\mathbf{Y}_0 = (x_0, y_0)$. Tenemos

$$\begin{cases} -2x_0 + y_0 = -2x_0 \\ \quad\quad -2y_0 = -2y_0, \end{cases}$$

que da $y_0 = 0$. Entonces, todos los eigenvectores correspondientes al eigenvalor $\lambda = -2$ se encuentran sobre el eje x, por lo que las únicas soluciones de línea recta para este sistema se encuentran sobre este eje. El vector $(1, 0)$ es un eigenvector asociado con $\lambda = -2$, por lo que

$$\mathbf{Y}_1(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es una solución de este sistema. Pero ésta es sólo una solución y, como sabemos, necesitamos dos soluciones independientes para obtener la solución general.

Por otra parte, esto no es una catástrofe total. Nuestra meta es entender el comportamiento de las soluciones de este sistema. Escribir una fórmula para la solución general, puede ayudar, pero no es la única opción. Siempre es posible estudiar el sistema usando procedimientos numéricos y cualitativos.

Para obtener una descripción cualitativa de las soluciones, comenzamos con las de línea recta. Como el eigenvalor es negativo, sabemos que las soluciones tienden al origen a lo largo de esta línea cuando t crece. Observando el campo de direcciones (o usando el método de Euler), podemos esbozar otras soluciones (vea la figura 3.30). Cada una de éstas tiende al origen cuando t crece, por lo que $(0, 0)$ es un sumidero. Para las condiciones iniciales que no se encuentran sobre la solución de línea recta, las soluciones correspondientes giran y llegan al origen en dirección tangente a la solución de línea recta. Parece que "tratan de moverse en espiral" alrededor del origen, pero la línea de soluciones de alguna manera "interfiere". En la sección siguiente veremos que los sistemas lineales con eigenvalores repetidos forman la "frontera" entre los sistemas lineales que se mueven en espiral y aquellos con dos líneas independientes de soluciones.

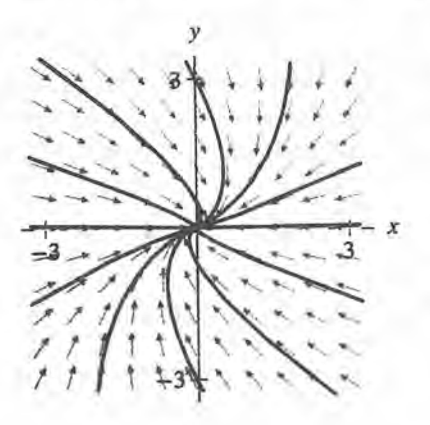


Figura 3.30
Retrato fase para el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{Y}.$$

Vea que todas las curvas solución se acercan al sumidero en el origen aunque sólo hay una línea de eigenvectores.

La solución general para este ejemplo

Para tener una idea de cómo calcular la solución general de este sistema, regresamos a sus ecuaciones originales y lo reescribimos en sus componentes,

$$\frac{dx}{dt} = -2x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = -2y.$$

En esas ecuaciones detectamos un detalle favorable. La segunda ecuación para dy/dt no contiene ninguna x y el sistema se desacopla parcialmente (vea la sección 2.3). Podemos considerar la ecuación para dy/dt por sí misma,

$$\frac{dy}{dt} = -2y.$$

La solución general es $y(t) = k_2 e^{-2t}$ para alguna constante k_2. Ahora que conocemos $y(t)$, podemos sustituirla en la primera ecuación, que se convierte en

$$\frac{dx}{dt} = -2x + k_2 e^{-2t}.$$

Esta ecuación es lineal de primer orden en $x(t)$ que podemos también resolver (vea la sección 1.8). La solución general es

$$x(t) = k_2 t e^{-2t} + k_1 e^{-2t},$$

donde k_1 es otra constante. (El lector que no recuerde cómo calcular las fórmulas para las soluciones de esas ecuaciones, debe repasar los procedimientos analíticos desarrollados en el capítulo 1.) Podemos escribir esas soluciones en forma vectorial como

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2 t e^{-2t} + k_1 e^{-2t} \\ k_2 e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Ahora estudiamos esta solución detenidamente para ver si hay algún patrón que pueda generalizarse. Oculta dentro de esta solución está la solución de línea recta que encontramos antes. Reagrupando términos encontramos

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El primer término consiste en las soluciones de línea recta. El segundo término es nuevo y diferente de cualquier otra solución de un sistema lineal visto hasta ahora, debido a la t en la primera componente. Si asignamos $k_1 = 1$ y $k_2 = 0$, obtenemos la solución

$$\mathbf{Y}_1(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y haciendo $k_1 = 0$ y $k_2 = 1$, obtenemos

$$\mathbf{Y}_2(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = t e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esas dos soluciones tienen condiciones iniciales lineales e independientes, $\mathbf{Y}_1(0) = (1, 0)$ y $\mathbf{Y}_2(0) = (0, 1)$. Así entonces, la $\mathbf{Y}(t)$ anterior es la solución general del sistema lineal.

La forma de la solución general

La solución anterior nos sugiere cómo encontrar una segunda solución independiente para sistemas con eigenvalores repetidos pero sólo una de ellas es línea recta. La solución $\mathbf{Y}_2(t)$ consiste en dos términos. Uno es $t\mathbf{Y}_1(t)$, el producto de t con nuestra solución de línea recta conocida. El otro término es el producto de e^{-2t} y el vector $(0, 1)$. Del retrato fase, aún tenemos que deducir por qué $(0, 1)$ es importante. Examinaremos la situación algebraicamente.

Considere un sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathbf{Y},$$

donde $\mathbf{A}$ tiene un eigenvalor λ repetido pero sólo una línea de eigenvectores. Si $\mathbf{V}_1$ es un eigenvector, entonces

$$\mathbf{Y}_1(t) = e^{\lambda t}\mathbf{V}_1$$

es una solución de línea recta. Siguiendo el patrón del ejemplo anterior, conjeturamos que hay otra solución de la forma

$$\mathbf{Y}_2(t) = e^{\lambda t}(t\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2),$$

donde $\mathbf{V}_2$ es algún vector por determinar.

Sabemos cómo calcular el eigenvector $\mathbf{V}_1$. Para encontrar el vector $\mathbf{V}_2$, es preciso emplear la ecuación diferencial. Si la curva $\mathbf{Y}_2(t)$ es una solución del sistema, debe satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{d\mathbf{Y}_2}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{Y}_2 \quad \text{para toda } t.$$

Usando la fórmula para $\mathbf{Y}_2(t)$, desarrollamos el lado izquierdo y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Y}_2}{dt} &= \frac{d(e^{\lambda t}(t\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2))}{dt} \\ &= \frac{d(e^{\lambda t}t\mathbf{V}_1)}{dt} + \frac{d(e^{\lambda t}\mathbf{V}_2)}{dt} \\ &= \lambda e^{\lambda t}t\mathbf{V}_1 + e^{\lambda t}\mathbf{V}_1 + \lambda e^{\lambda t}\mathbf{V}_2. \end{aligned}$$

Al hacer lo mismo con el lado derecho, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{Y}_2 &= \mathbf{A}(e^{\lambda t}(t\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2)) \\ &= e^{\lambda t}t\mathbf{A}\mathbf{V}_1 + e^{\lambda t}\mathbf{A}\mathbf{V}_2 \\ &= e^{\lambda t}t(\lambda\mathbf{V}_1) + e^{\lambda t}\mathbf{A}\mathbf{V}_2 \\ &= \lambda e^{\lambda t}t\mathbf{V}_1 + e^{\lambda t}\mathbf{A}\mathbf{V}_2, \end{aligned}$$

porque $\mathbf{V}_1$ es un eigenvector para $\mathbf{A}$ con eigenvalor λ.

Si $\mathbf{Y}_2(t)$ es una solución, en ese caso los dos lados de la ecuación diferencial deben ser iguales, por lo que

$$\lambda e^{\lambda t} t\mathbf{V}_1 + e^{\lambda t}\mathbf{V}_1 + \lambda e^{\lambda t}\mathbf{V}_2 = \lambda e^{\lambda t} t\mathbf{V}_1 + e^{\lambda t}\mathbf{A}\mathbf{V}_2$$

para toda t. Simplificando nos da

$$e^{\lambda t}(\mathbf{V}_1 + \lambda\mathbf{V}_2) = e^{\lambda t}(\mathbf{A}\mathbf{V}_2)$$

o

$$\mathbf{V}_1 + \lambda\mathbf{V}_2 = \mathbf{A}\mathbf{V}_2,$$

donde $\mathbf{V}_1$ es nuestro conocido eigenvector para $\mathbf{A}$. Esta ecuación nos permite determinar qué vector debemos usar para $\mathbf{V}_2$, es decir, cualquier solución de la ecuación

$$\mathbf{A}\mathbf{V}_2 - \lambda\mathbf{V}_2 = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1.$$

Como sabemos que $\mathbf{V}_1 = (x_1, y_1)$, de la ecuación anterior podemos despejar el vector incógnita $\mathbf{V}_2 = (x_2, y_2)$. Escribiéndola en componentes, queda

$$\begin{cases} (a-\lambda)x_2 + by_2 = x_1 \\ cx_2 + (d-\lambda)y_2 = y_1. \end{cases}$$

Resumimos este cálculo en el siguiente teorema.

TEOREMA Suponga que $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{A}\mathbf{Y}$ es un sistema lineal en el que la matriz $\mathbf{A}$ de 2×2 tiene un eigenvalor real λ repetido, pero sólo una línea de eigenvectores. Si $\mathbf{V}_1$ es un eigenvector, entonces la función $\mathbf{Y}_1(t) = e^{\lambda t}\mathbf{V}_1$ es una solución de línea recta; sin embargo, hay otra de la forma

$$\mathbf{Y}_2(t) = e^{\lambda t}(t\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2),$$

donde $\mathbf{V}_2$ satisface la ecuación $\mathbf{A}\mathbf{V}_2 - \lambda\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1$. Las soluciones $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$ son independientes. En consecuencia, la solución general tiene la forma

$$\mathbf{Y}(t) = k_1 e^{\lambda t}\mathbf{V}_1 + k_2 e^{\lambda t}(t\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2),$$

donde k_1 y k_2 son constantes arbitrarias. ■

En general puede estar implicada una gran cantidad de aritmética en la determinación de esta solución general. Por fortuna, encontrar el vector $\mathbf{V}_2$ no es tan difícil en la mayoría de los casos de interés.

Repetición instantánea

En el ejemplo que resolvimos antes "a mano", es decir el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{Y},$$

determinamos que $\lambda = -2$ es un eigenvalor, que $\mathbf{V}_1 = (1, 0)$ es un eigenvector y que sólo existe una línea de eigenvectores. Tenemos entonces la solución de línea recta

$$\mathbf{Y}_1(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar el vector $\mathbf{V}_2$, tenemos que resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (-2+2)x_2 + y_2 = 1 \\ (-2+2)y_2 = 0. \end{cases}$$

La segunda ecuación es $0 = 0$, pero la primera es $y_2 = 1$. Entonces, *cualquier* vector cuya segunda componente es 1 puede servir como $\mathbf{V}_2$. Por lo común escogemos el $\mathbf{V}_2$ más simple que nos sea posible, digamos $\mathbf{V}_2 = (0, 1)$ y obtenemos la solución general

$$\mathbf{Y}(t) = k_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 e^{-2t}\left(t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} k_1 e^{-2t} + k_2 t e^{-2t} \\ k_2 e^{-2t} \end{pmatrix},$$

que es exactamente lo que determinamos antes.

Análisis cualitativo de sistemas con eigenvalores repetidos

Antes de analizar ejemplos adicionales, consideraremos lo que nos dice la solución general acerca del comportamiento cualitativo de las soluciones. La forma de la solución general es

$$\mathbf{Y}(t) = k_1 e^{\lambda t}\mathbf{V}_1 + k_2 e^{\lambda t}(t\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = e^{\lambda t}(k_1\mathbf{V}_1 + k_2\mathbf{V}_2) + te^{\lambda t}k_2\mathbf{V}_1.$$

La dependencia de t proviene de dos términos, de $e^{\lambda t}$ y de $te^{\lambda t}$.

Si $\lambda < 0$, entonces esos dos términos tienden a cero cuando t crece y, por tanto, el punto de equilibrio en el origen es un sumidero. El término $te^{\lambda t}$ es mucho mayor que $e^{\lambda t}$ si t es grande. En consecuencia, $\mathbf{Y}(t) \approx te^{\lambda t}k_2\mathbf{V}_1$ cuando t es grande. La solución tiende entonces a $(0, 0)$ en una dirección tangente a la línea de los eigenvectores (vea la figura 3.31 para ejemplos típicos de retratos fase para esos sistemas).

Si $\lambda > 0$, tenemos que todas las soluciones (excepto la de equilibrio) tienden a infinito cuando t crece, por lo que $(0, 0)$ es una fuente. Nuevamente el término $te^{\lambda t}$ domina para t grandes si $k_2 \neq 0$.

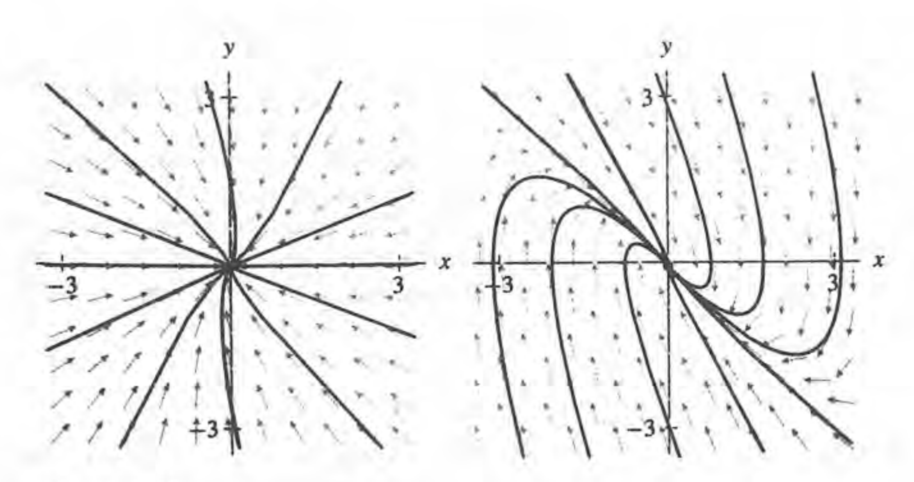


Figura 3.31
Retratos fase típicos para sistemas con eigenvalores repetidos.

Si usamos la fórmula de la solución general para dibujar el retrato fase, vemos de nuevo que parece como si las soluciones (aparte de la solución de línea recta) estuviesen tratando de moverse en espiral alrededor de (0, 0). Pero no pueden hacerlo porque la solución de línea recta se atraviesa en su camino. La extraña (y complicada) forma de la solución general de sistemas con una línea recta de soluciones es otro síntoma de que esos sistemas se encuentran "entre" sistemas con eigenvalores complejos y sistemas con eigenvalores reales y distintos.

Un oscilador armónico con eigenvalores repetidos

Consideremos el oscilador armónico con masa $m = 1$, constante de resorte $k = 2$ y coeficiente de amortiguamiento $b = 2\sqrt{2}$. La ecuación de segundo orden que modela el movimiento del oscilador es

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\sqrt{2}\,\frac{dy}{dt} + 2y = 0,$$

y su sistema asociado es

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{BY} \quad \text{donde } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix},$$

y $v = dy/dt$. Los eigenvalores de este sistema son las raíces del polinomio característico

$$\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = (0 - \lambda)(-2\sqrt{2} - \lambda) + 2 = \lambda^2 + 2\sqrt{2}\lambda + 2.$$

Usando la fórmula cuadrática, tenemos

$$\lambda = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{8 - 8}}{2},$$

por lo que $-\sqrt{2}$ es un eigenvalor repetido.

Dado $\lambda = -\sqrt{2}$, encontramos un eigenvector $\mathbf{V}_1 = (y_1, v_1)$ resolviendo $\mathbf{BV}_1 = \lambda\mathbf{V}_1$, que da

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = -\sqrt{2}\begin{pmatrix} y_1 \\ v_1 \end{pmatrix}.$$

Los eigenvectores se encuentran entonces sobre la línea $v_1 = -\sqrt{2}\,y_1$. Por ejemplo, un eigenvector conveniente es $\mathbf{V}_1 = (1, -\sqrt{2})$. El retrato fase para este sistema se muestra en la figura 3.32. Todas las soluciones tienden a (0, 0) cuando t crece y todas las soluciones son tangentes a la línea de eigenvectores cuando se acercan al origen.

El eigenvalor $\lambda = -\sqrt{2}$ y el eigenvector $\mathbf{V}_1$ nos dan la solución de línea recta

$$\mathbf{Y}_1(t) = e^{-\sqrt{2}t}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Para encontrar una segunda solución independiente primero es preciso determinar un vector $\mathbf{V}_2$ que satisface

$$(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1,$$

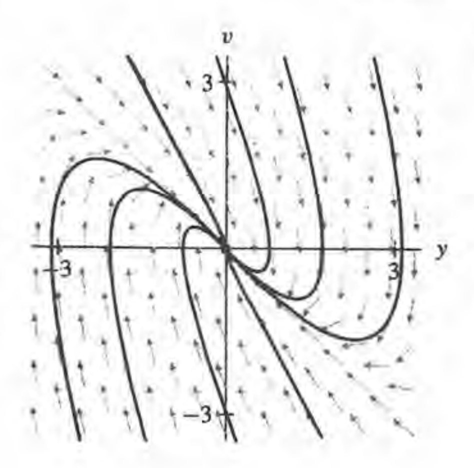


Figura 3.32
Campo de direcciones y curvas solución para

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

Note que las curvas solución se acercan al origen tangencialmente a la solución de línea recta.

que es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \mathbf{V}_2 + \sqrt{2}\,\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Tal vector es $\mathbf{V}_2 = (\sqrt{2}/2, 0)$. Por tanto, una segunda solución del sistema está dada por

$$\mathbf{Y}_2(t) = e^{-\sqrt{2}t} \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Llegamos a la solución general

$$\mathbf{Y}(t) = k_1 \mathbf{Y}_1(t) + k_2 \mathbf{Y}_2(t) = k_1 \begin{pmatrix} e^{-\sqrt{2}t} \\ -\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}t} \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} (\sqrt{2}/2 + t)e^{-\sqrt{2}t} \\ -\sqrt{2}te^{-\sqrt{2}t} \end{pmatrix}.$$

Tiendas CD de Pablo y Roberto revisadas

Recuerde el modelo de las tiendas de discos compactos de Pablo y Roberto de la sección 3.1. Suponemos que el modelo tiene la forma

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY} \quad \text{donde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

Los coeficientes implican que si Roberto está ganando dinero, entonces las ganancias de Pablo crecerán. Pero si Pablo es quien gana, entonces las utilidades de Roberto se verán afectadas. En este modelo, a los aficionados al rock no les gusta la ópera.

Los eigenvalores para este sistema son las raíces del polinomio característico

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 + 8\lambda + 16.$$

Hay un solo eigenvalor, $\lambda = -4$. Por consiguiente, el origen es un sumidero y todas las soluciones tienden a (0, 0) cuando t crece. Las ganancias de las tiendas de Pablo y Roberto tienden a cero sin importar cuál sea la condición inicial.

Para encontrar los eigenvectores resolvemos

$$\begin{cases} -5x_1 + y_1 = -4x_1 \\ -x_1 - 3y_1 = -4y_1, \end{cases}$$

que tiene la línea $x_1 = y_1$ como su conjunto de soluciones. De esta información concluimos que cuando t crece, toda solución tiende a (0, 0) tangencialmente a la línea $x = y$. Como los valores de x y y tienden a cero, son casi iguales.

Observando el campo de direcciones, podemos identificar qué condiciones iniciales conducen a soluciones que tienden a cero a lo largo de $x = y$ en el primer cuadrante, y también cuáles terminan en el tercer cuadrante, a lo largo de las gráficas correspondientes $x(t)$ y $y(t)$ (vea las figuras 3.33 y 3.34).

Como las soluciones tienden a la línea $x = y$, las dos tiendas perciben esencialmente las mismas ganancias o pérdidas a largo plazo. Esta conclusión es algo sorprendente, porque los coeficientes en el modelo implican que las ganancias de los dos establecimientos reaccionan de manera muy diferente uno con respecto al otro.

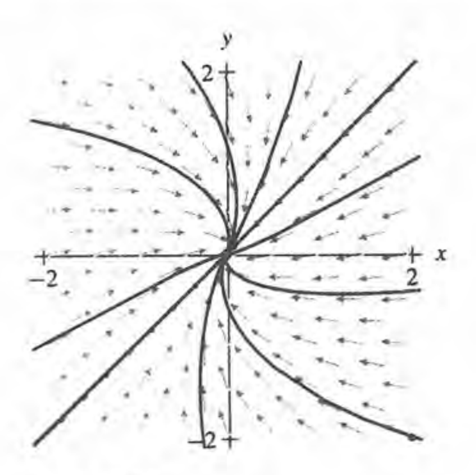


Figura 3.33
Retrato fase para el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

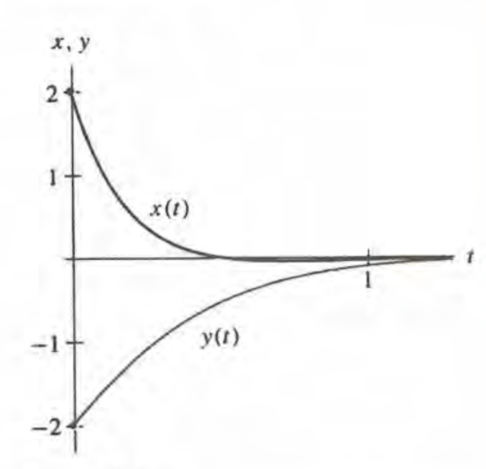


Figura 3.34
Las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ para la solución con la condición inicial indicada en la figura 3.33.

Efecto de un pequeño cambio en los coeficientes

Podríamos preguntarnos qué sucedería si los coeficientes se modificaran sólo un poco. Supongamos que Roberto decide ayudar a Pablo y coloca un letrero que dice

Abra su mente al rock and roll

(Pero hágalo en algún otro lugar, como en los CD de rock and roll de Pablo)

Entre más gente viene a la tienda de Roberto (entre mayor es y), mayor es la ayuda que este letrero le ofrece a Pablo. Entonces, el parámetro b crece de, digamos, de 1 a 1.1. El nuevo sistema es

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{BY} = \begin{pmatrix} -5 & 1.1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

Podemos calcular que los eigenvalores de esta matriz son complejos y que tienen una parte real negativa. Por consiguiente, el origen es un sumidero espiral y todas las soluciones tienden aún a (0, 0). Sin embargo, cuando se aproximan a este punto oscilarán en vez de tender hacia (0, 0) a lo largo de la línea $y = x$. Este pequeño cambio en el sistema ha generado un cambio en el comportamiento cualitativo de las soluciones. No obstante, las oscilaciones son muy sutiles. De hecho, el retrato fase y las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ para $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{BY}$ son indistinguibles de las de $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{AY}$ (compare las figuras 3.33 y 3.34 con las figuras 3.35 y 3.36).

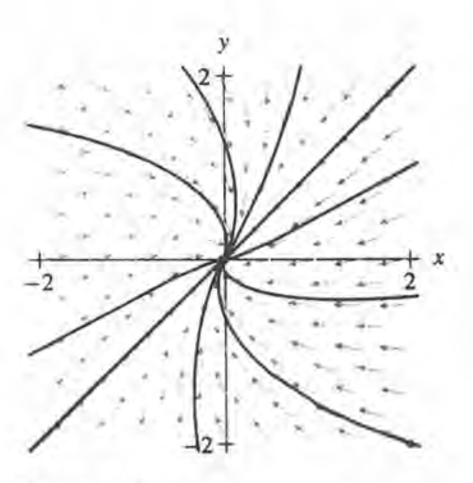


Figura 3.35
Retrato fase para

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -5 & 1.1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

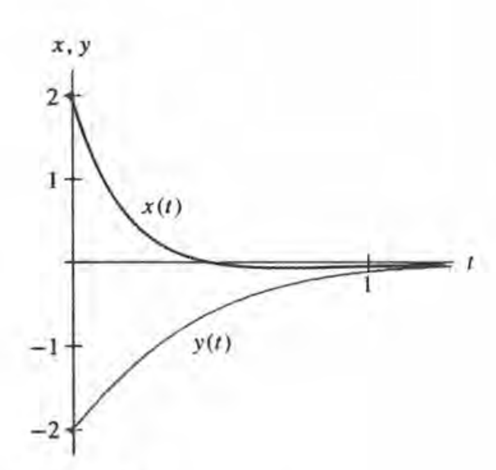


Figura 3.36
Las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ para la solución con la condición inicial indicada en la figura 3.35.

Sistemas para los que todo vector es un eigenvector

En este punto podemos tratar con sistemas lineales que tengan eigenvalores reales repetidos pero sólo una línea de eigenvectores. Un ejemplo de un sistema con eigenvalores repetidos y más de una línea de eigenvectores está dado por

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

Este sistema tiene un eigenvalor repetido $\lambda = a$ y *todo* vector no nulo es un eigenvector para $\lambda = a$. En este caso, hallar la solución general es equivalente a encontrar las solucio-

nes generales de las dos ecuaciones $dx/dt = ax$ y $dy/dt = ay$, es decir, el sistema se desacopla por completo (vea la sección 2.3). Como cada vector es un eigenvector, toda curva solución (excepto el punto de equilibrio en el origen) es un rayo que se acerca o deja el origen conforme t crece. Si $a > 0$, todas las soluciones tienden a infinito cuando t crece (una fuente), mientras que si $a < 0$, todas las soluciones tienden a cero cuando t crece (un sumidero). En los ejercicios vemos que sólo los sistemas con un eigenvalor que tenga más de una línea de eigenvectores, tienen una matriz de coeficientes igual a $\lambda\mathbf{I}$, donde λ es el eigenvalor (vea los ejercicios 13 y 14). Este caso es muy especial.

Sistemas con cero como un eigenvalor

Estamos cerca de entender completamente los sistemas lineales y de sus retratos fase. Podemos clasificar y esbozar el comportamiento de las soluciones para los casos de eigenvalores reales, complejos y repetidos. El único caso que no hemos considerado hasta ahora explícitamente es donde uno o ambos de los eigenvalores es cero. Éste es importante porque divide los sistemas lineales con eigenvalores estrictamente positivos (fuentes) y eigenvalores estrictamente negativos (sumideros) de aquellos que poseen un eigenvalor positivo y uno negativo (puntos silla).

Supongamos que tenemos un sistema lineal

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY},$$

y que la matriz $\mathbf{A}$ tiene eigenvalores $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \neq 0$. Supongamos que $\mathbf{V}_1$ es un eigenvector para λ_1 y $\mathbf{V}_2$ es un eigenvector de λ_2.

Tenemos dos eigenvalores reales y distintos y toda el álgebra que hicimos en la sección 3.3 es aplicable. La solución general es entonces

$$\mathbf{Y}(t) = k_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{V}_1 + k_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{V}_2.$$

Pero $\lambda_1 = 0$, por lo que $e^{\lambda_1 t} = e^{0t} = 1$ para toda t. Por consiguiente,

$$\mathbf{Y}(t) = k_1\mathbf{V}_1 + k_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{V}_2,$$

y la solución general $\mathbf{Y}(t)$ depende de t sólo a través del término $\mathbf{V}_2$. Si hacemos $k_2 = 0$, tenemos $\mathbf{Y}(t) = k_1\mathbf{V}_1$, que no depende de t. En ese caso, todos los puntos $k_1\mathbf{V}_1$, para cualquier k_1, son puntos de equilibrio. Y todo aquel que esté situado en la línea de eigenvectores para el eigenvalor $\lambda_1 = 0$ es un punto de equilibrio. Si $\lambda_2 < 0$, entonces el segundo término en la solución general tiende a cero cuando t crece, por lo que la solución

$$\mathbf{Y}(t) = k_1\mathbf{V}_1 + k_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{V}_2,$$

tiende al punto de equilibrio $k_1\mathbf{V}_1$ a lo largo de una línea paralela a $\mathbf{V}_2$. Si $\lambda_2 > 0$, entonces la solución de arriba se aleja de la línea de puntos de equilibrio cuando t crece. Tenemos suficiente información para esbozar los retratos fase.

Un ejemplo con cero como un eigenvalor

Consideremos el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY}, \quad \text{donde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos los eigenvalores del polinomio característico resolviendo

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (-3 - \lambda)(-1 - \lambda) - 3 = 0,$$

es decir

$$\lambda^2 + 4\lambda = 0.$$

Los eigenvalores son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -4$.

Los eigenvectores $\mathbf{V}_1 = (x_1, y_1)$ para $\lambda_1 = 0$ satisfacen las ecuaciones

$$\begin{cases} -3x_1 + y_1 = 0x_1 \\ 3x_1 - y_1 = 0y_1. \end{cases}$$

Ellos están sobre la línea $y_1 = 3x_1$. Por ejemplo, $\mathbf{V}_1 = (1, 3)$ es un eigenvector para $\lambda_1 = 0$.

Del mismo modo, los eigenvectores $\mathbf{V}_2 = (x_2, y_2)$ para $\lambda_2 = -4$ satisfacen

$$\begin{cases} -3x_2 + y_2 = -4x_2 \\ 3x_2 - y_2 = 4y_2, \end{cases}$$

y esas ecuaciones pueden simplificarse a $x_2 + y_2 = 0$, por lo que sus soluciones están sobre la línea $x_2 = -y_2$. Por tanto, $\mathbf{V}_2 = (-1, 1)$ es un eigenvector para $\lambda_2 = -4$.

Con esta información podemos dibujar el retrato fase. Hay una línea de puntos de equilibrio dada por $y = 3x$, y cualquier otra solución tiende hacia alguno de estos puntos, siguiendo una línea paralela a $y = -x$ (vea la figura 3.37). Las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ para la solución con condición inicial $\mathbf{Y}(0) = (5, 2)$ y $\mathbf{Y}(0) = (1, 0)$ están dadas en la figura 3.38.

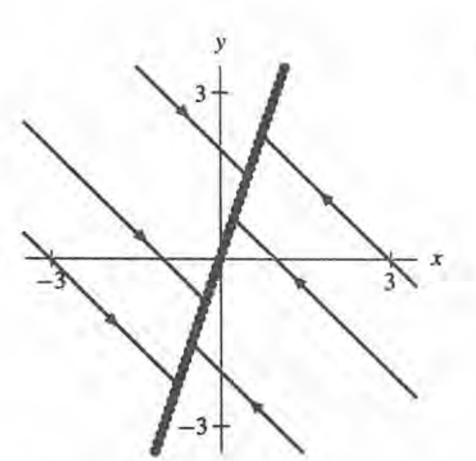


Figura 3.37
Retrato fase para el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{Y}.$$

Las soluciones tienden hacia la línea de puntos de equilibrio.

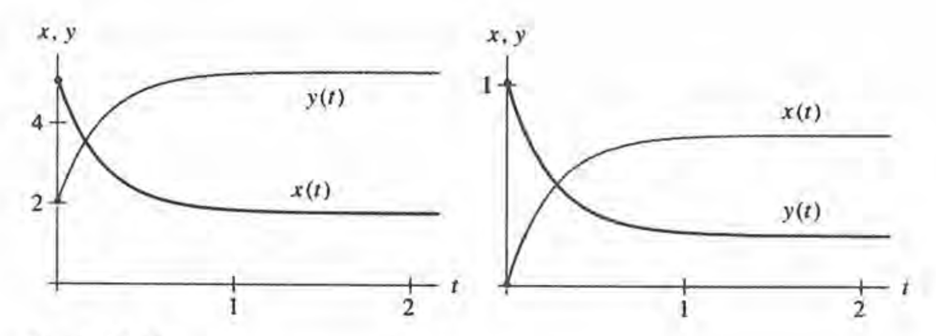


Figura 3.38
Gráficas de $x(t)$ y $y(t)$ para soluciones de

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$$

con posiciones iniciales (5, 2), gráficas izquierdas, y (1, 0) gráficas derechas.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 3.5

En los ejercicios 1-4, cada uno de los sistemas lineales tiene un eigenvalor y una línea de eigenvectores. Para cada sistema,

(a) encuentre el eigenvalor;

(b) encuentre un eigenvector;

(c) esboce el campo de direcciones;

(d) bosqueje el plano fase, incluyendo la solución con la condición inicial dada; y

(e) dibuje las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ de la solución con la condición inicial dada.

1. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$, con la condición inicial $\mathbf{Y}_0 = (1, 0)$.

2. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$, con la condición inicial $\mathbf{Y}_0 = (1, 0)$.

3. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$, con la condición inicial $\mathbf{Y}_0 = (1, 0)$.

4. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$, con la condición inicial $\mathbf{Y}_0 = (1, 0)$.

En los ejercicios 5-8, los sistemas lineales son los mismos que los de los ejercicios 1-4. Para cada sistema,

(a) encuentre la solución general;

(b) calcule la solución particular para la condición inicial dada; y

(c) esboce las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ de la solución. (Compare estos bosquejos con los obtenidos en el problema correspondiente de los ejercicios 1-4.)

5. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{Y}$, con condición inicial $\mathbf{Y}_0 = (1, 0)$.

6. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{Y}$, con condición inicial $\mathbf{Y}_0 = (1, 0)$.

7. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{Y}$, con condición inicial $\mathbf{Y}_0 = (1, 0)$.

8. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{Y}$, con condición inicial $\mathbf{Y}_0 = (1, 0)$.

9. Dada una cuadrática $\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta$, ¿qué condiciones sobre α y β garantizan
(a) que la cuadrática tiene una raíz doble?
(b) que la cuadrática tiene cero como una raíz?

10. Evalúe el límite de $te^{\lambda t}$ cuando $t \to \infty$ si

(a) $\lambda > 0$ **(b)** $\lambda < 0$

Justifique sus respuestas.

11. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix},$$

donde p y q son positivas. ¿Qué condiciones sobre q y p garantiza:
(a) que A tiene dos eigenvalores reales?
(b) que A tiene eigenvalores complejos?
(c) que A tiene sólo un eigenvalor y una línea de eigenvectores?

12. Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Defina la traza de $\mathbf{A}$ como $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = a + d$. Demuestre que $\mathbf{A}$ tiene sólo un eigenvalor si y sólo si $(\mathrm{tr}(\mathbf{A}))^2 - 4\det(\mathbf{A}) = 0$.

13. Suponga que

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

es una matriz con eigenvalor λ tal que todo vector no cero es un eigenvector con eigenvalor λ, es decir, $\mathbf{AY} = \lambda\mathbf{Y}$ para todo vector $\mathbf{Y}$. Demuestre que $a = d = \lambda$ y que $b = c = 0$. [*Sugerencia:* Como $\mathbf{AY} = \lambda\mathbf{Y}$ para toda $\mathbf{Y}$, ensaye $\mathbf{Y} = (1, 0)$ y $\mathbf{Y} = (0, 1)$.]

14. Suponga que λ es un eigenvector para la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

y suponga que hay dos eigenvectores linealmente independientes $\mathbf{Y}_1$ y $\mathbf{Y}_2$ asociados con λ. Demuestre que todo vector no cero es un eigenvector con eigenvalor λ. ¿Qué implica esto para a, b, c y d?

15. Considere un oscilador armónico con constante de resorte k, coeficiente de amortiguamiento $b = 3$ y masa $m = 1$.

(a) Encuentre el valor de k de manera que el oscilador resultante tenga eigenvalores repetidos.

(b) Encuentre el eigenvalor y los eigenvectores para este sistema.

(c) Esboce el plano fase para este sistema.

(d) Determine la solución general para este sistema.

(e) Calcule la solución con posición inicial $y(0) = 2$ y velocidad $v(0) = 0$.

16. Considere un oscilador armónico con constante de resorte $k = 2$, coeficiente de amortiguamiento $b = 3$ y masa m.

(a) Encuentre el valor de m de manera que el oscilador resultante tenga eigenvalores repetidos.

(b) Encuentre el eigenvalor y los eigenvectores para este sistema.

(c) Esboce el plano fase para este sistema.

(d) Encuentre la solución general para este sistema.

(e) Calcule la solución con posición inicial $y(0) = 0$ y velocidad $v(0) = -2$.

En los ejercicios 17-19, cada uno de los sistemas lineales dados tiene cero como un eigenvalor. Para cada uno de ellos,

(a) encuentre los eigenvalores;

(b) encuentre los eigenvectores;

(c) esboce el plano fase;

(d) Grafique $x(t)$ y $y(t)$ para la solución con condición inicial $\mathbf{Y}_0 = (1, 0)$;

(e) Determine la solución general; y

(f) encuentre la solución particular para la condición inicial $\mathbf{Y}_0 = (1, 0)$ y compárela con su esbozo del inciso (d).

17. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{Y}$ **18.** $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\mathbf{Y}$ **19.** $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{Y}$

20. Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

(a) Demuestre que, si uno o ambos eigenvalores de $\mathbf{A}$ es cero, entonces el determinante de $\mathbf{A}$ es cero.

(b) Compruebe que, si det $\mathbf{A} = 0$, entonces por lo menos uno de los eigenvalores de $\mathbf{A}$ es cero.

21. Encuentre los eigenvalores y esboce los planos de fase para los sistemas lineales

(a) $\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$ **(b)** $\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$

22. Encuentre la solución general para los sistemas lineales

(a) $\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$ **(b)** $\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$

23. Considere el sistema lineal

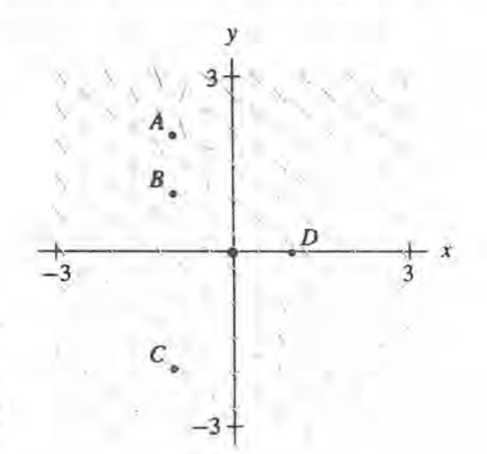
$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

(a) Encuentre los eigenvalores.
(b) Encuentre los eigenvectores.
(c) Suponga que $a = d < 0$. Bosqueje el plano fase y calcule la solución general. (¿Cuáles son los eigenvectores en este caso?)
(d) Suponga que $a = d > 0$. Esboce el plano fase y calcule la solución general.

24. El campo de pendientes para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -3x - y$$
$$\frac{dy}{dt} = 4x + y$$

se muestra a la derecha.



(a) Determine el tipo de punto de equilibrio en el origen.

(b) Calcule todas las soluciones de línea recta.

(c) Trace las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ $(t \geq 0)$ para las condiciones iniciales $A = (-1, 2)$, $B = (-1, 1)$, $C = (-1, -2)$ y $D = (1, 0)$.

3.6 ECUACIONES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

A lo largo de todo este capítulo hemos usado el oscilador armónico como un ejemplo. Hemos resuelto la ecuación de segundo orden y su sistema asociado de ecuaciones en varios casos diferentes. Es tiempo ahora de resumir todo lo que hemos aprendido acerca de este modelo tan importante.

Ecuaciones de segundo orden *versus* sistemas de primer orden

Como ya sabemos, el movimiento de un oscilador armónico puede modelarse por medio de la ecuación de segundo orden

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = 0,$$

donde $m > 0$ es la masa, $k > 0$ es la constante de resorte y $b \geq 0$ es el coeficiente de amortiguamiento. Como $m \neq 0$, también podemos escribir esta ecuación en la forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0,$$

donde $p = b/m$ y $q = k/m$ son constantes no negativas y el correspondiente sistema lineal es

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}\mathbf{Y}.$$

Como veremos en esta sección, cualquier método para calcular la solución general de la ecuación de segundo orden también proporciona la del sistema asociado y viceversa. En particular, podemos usar el principio de linealidad para producir nuevas soluciones a partir de otras conocidas, mediante la suma y multiplicación de las soluciones por constantes. Por tanto, las ecuaciones de segundo orden de la forma

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = 0,$$

donde a, b y c son constantes, se denominan **lineales**. Más precisamente, son ecuaciones lineales de segundo orden **homogéneas,** con **coeficientes constantes**. Las constantes a, b y c son los coeficientes y la ecuación es homogénea debido a que el lado derecho es 0. En el capítulo 4 estudiaremos con detalle la diferencia entre ecuaciones diferenciales homogéneas y no homogéneas.

Podemos encontrar la solución general del sistema lineal que modela al oscilador armónico a partir de los eigenvalores y eigenvectores de la matriz de coeficientes. La aritmética no siempre es fácil, pero los pasos por dar son claros. En esta sección mostramos un atajo para encontrar la solución general de la correspondiente ecuación de segundo orden, y relacionamos este procedimiento con la geometría y el comportamiento cualitativo de las soluciones de la ecuación de segundo orden y del sistema asociado.

Un regalo del departamento de matemáticas

El método del atajo para encontrar la solución general de una ecuación de segundo orden como, por ejemplo,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 10\frac{dy}{dt} + 7y = 0,$$

es conjeturarla. Puesto que ahora sabemos algo acerca de las soluciones del correspondiente sistema, esto no es tan tonto como suena. Puesto que las soluciones del sistema están constituidas por términos de la forma $e^{\lambda t}\mathbf{V}$, donde λ es un eigenvalor y $\mathbf{V}$ es un eigenvector. Por tanto, si estamos tratando de obtener la solución de la ecuación de segundo orden, la conjetura más natural es

$$y(t) = e^{st}.$$

donde s es una constante por determinar. (Desde nuestro punto de vista, tiene más sentido usar λ como la constante desconocida. Sin embargo, por lo común s se usa en las aplicaciones y para este análisis seguiremos esa costumbre.) Sustituyendo la conjetura en el lado izquierdo de la ecuación de segundo orden, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} + 10\frac{dy}{dt} + 7y &= \frac{d^2(e^{st})}{dt^2} + 10\frac{d(e^{st})}{dt} + 7e^{st} \\ &= s^2e^{st} + 10se^{st} + 7e^{st} \\ &= (s^2 + 10s + 7)e^{st}. \end{aligned}$$

Como e^{st} nunca es cero, debemos tener

$$s^2 + 10s + 7 = 0$$

para que $y(t) = e^{st}$ sea una solución. Esta ecuación cuadrática tiene las raíces $s = -5$ y $s = -2$, y por eso sabemos que $y_1(t) = e^{-5t}$ y $y_2(t) = e^{-2t}$ son soluciones de la ecuación diferencial. (Este procedimiento de conjetura y prueba con seguridad debe serle familiar. Lo empleamos al estudiar los procedimientos analíticos para hallar soluciones de ciertos sistemas en la sección 2.3.)

Aplicando el principio de linealidad, vemos que cualquier función de la forma

$$y(t) = k_1e^{-5t} + k_2e^{-2t}$$

es también una solución para cualquier selección de las constantes k_1 y k_2 (vea el ejercicio 18 para una verificación directa de esta afirmación). Para comprobar que esta expresión es de hecho la solución general de la ecuación, notamos que hay una correspondencia uno a uno entre las soluciones de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 10\frac{dy}{dt} + 7y = 0$$

y las soluciones del sistema asociado

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -7y - 10v. \end{aligned}$$

Si tenemos una solución $\mathbf{Y}(t) = (y(t), v(t))$ del sistema, entonces $y(t)$ es una solución de la ecuación de segundo orden. Si $y(t)$ es una solución para la ecuación, entonces tenemos

$$v(t) = -5k_1e^{-5t} - 2k_2e^{-2t},$$

ya que $v = dy/dt$. Si formamos la función vectorial

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1e^{-5t} + k_2e^{-2t} \\ -5k_1e^{-5t} - 2k_2e^{-2t} \end{pmatrix},$$

tenemos una solución del sistema que puede reescribirse en la forma

$$\mathbf{Y}(t) = k_1e^{-5t}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} + k_2e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Solución del sistema asociado

Esta forma de la solución se ve sospechosamente familiar. Si escribimos esta ecuación de segundo orden como un sistema en notación matricial, obtenemos

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -7 & -10 \end{pmatrix} \mathbf{Y},$$

que tiene $\lambda^2 + 10\lambda + 7$ como polinomio característico. Note que esta expresión cuadrática es la misma que obtuvimos antes, cuando aplicamos nuestro procedimiento de conjetura y prueba a la ecuación de segundo orden (con s reemplazada por λ). Los eigenvalores para este sistema son $\lambda_1 = -5$ y $\lambda_2 = -2$. Al calcular los eigenvectores asociados, encontramos que uno de ellos, que corresponde a λ_1, es $(1, -5)$ y que el relacionado con λ_2 es $(1, -2)$. Entonces, usando los métodos de eigenvalores y eigenvectores de este capítulo, obtenemos exactamente la misma solución general,

$$\mathbf{Y}(t) = k_1 e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} + k_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Si hubiéramos escogido eigenvectores diferentes para el sistema, habríamos obtenido una forma ligeramente diferente para la solución general. Por ejemplo $(-1, 5)$ es también un eigenvector para $\lambda_1 = -5$, y $(2, -4)$ lo es para $\lambda_2 = -2$. Nuestra solución general puede entonces escribirse también como

$$\mathbf{Y}(t) = k_1 e^{-5t} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + k_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Pero esas soluciones son precisamente las mismas que obtuvimos. (Reemplace k_1 por $-k_1$ y k_2 por $k_2/2$.) En realidad, no hay diferencia entre el método de conjetura y el método de los eigenvalores y de los eigenvectores.

Eigenvalores complejos

El método descrito arriba funciona en general para cualquier ecuación lineal de segundo orden, aun para aquellas en que el polinomio característico tiene raíces complejas. Por ejemplo, considere un oscilador armónico con masa $m = 1$, coeficiente de amortiguamiento $b = 2$ y constante de resorte $k = 2$. La ecuación de segundo orden es

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = 0.$$

Como siempre, conjeturamos que $y(t) = e^{st}$ es una solución y obtenemos la ecuación característica

$$s^2 + 2s + 2 = 0.$$

Usando la fórmula cuadrática, obtenemos las raíces

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = -1 \pm i.$$

Por tanto tenemos un par de soluciones complejas para esta ecuación de la forma $e^{(-1\pm i)t}$. Como lo hicimos con los sistemas, veamos de manera más detallada una de esas soluciones. Consideremos $y(t) = e^{(-1+i)t}$. Mediante la fórmula de Euler, tenemos

$$y(t) = e^{(-1+i)t} = e^{-t}e^{it} = e^{-t}(\cos t + i\,\mathrm{sen}\,t) = e^{-t}\cos t + ie^{-t}\,\mathrm{sen}\,t.$$

Ésta es una solución compleja de una ecuación diferencial real y entonces, tal como en el caso de sistemas, las partes real e imaginaria de esta función son también soluciones de la ecuación original (vea el ejercicio 19). Es decir, tenemos dos soluciones reales dadas por $y_1(t) = e^{-t}\cos t$ y $y_2(t) = e^{-t}\,\mathrm{sen}\,t$. Por el principio de linealidad, cualquier solución de la forma

$$y(t) = k_1 e^{-t}\cos t + k_2 e^{-t}\,\mathrm{sen}\,t$$

es también una solución. También podemos obtener una solución vectorial del sistema asociado diferenciando $y(t)$ para determinar $v = dy/dt$. Tenemos

$$\mathbf{Y}(t) = k_1 e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - \mathrm{sen}\,t \end{pmatrix} + k_2 e^{-t}\begin{pmatrix} \mathrm{sen}\,t \\ -\mathrm{sen}\,t + \cos t \end{pmatrix}.$$

Esta solución general del sistema es exactamente la que habríamos obtenido al emplear los métodos de eigenvalores y eigenvectores.

El método de la conjetura afortunada

Para una ecuación lineal de segundo orden de la forma

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = 0,$$

donde a, b y c son constantes, podemos calcular el polinomio característico conjeturando que $y(t) = e^{st}$ es una solución. Obtenemos

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = (as^2 + bs + c)e^{st},$$

y vemos que el polinomio característico $as^2 + bs + c$ aparece como el coeficiente de e^{st}. Ahora que hemos hecho este cálculo una vez, no tenemos que repetirlo de nuevo. Podemos escribir el polinomio característico inmediatamente a partir de la ecuación de segundo orden.

En el método de los eigenvalores y eigenvectores para el sistema y en el de la conjetura afortunada para la ecuación de segundo orden, debemos encontrar las raíces del polinomio característico para calcular la solución general. Cualquiera que sea el procedimiento que usemos, una vez que tenemos las raíces (es decir, los eigenvalores), es posible obtener la solución general. (Ya hemos analizado ejemplos con dos eigenvalores reales y distintos y con eigenvalores complejos. Después veremos cómo adaptar este método para tratar eigenvalores repetidos.)

Resulta útil encontrar la solución general por medio de este método de la conjetura afortunada. Calculamos el polinomio característico inmediatamente a partir de la ecuación de segundo orden y con ello evitaremos el trabajo implicado al encontrar los eigenvectores del sistema. En consecuencia, utilizaremos ampliamente este método en el capítulo 4, donde necesitaremos resolver varias ecuaciones de segundo orden.

De hecho, este método es tan eficiente que podríamos estar tentados a preguntar: "¿Necesitamos realmente sistemas, eigenvalores, eigenvectores, planos de fase y el resto de las ideas de este capítulo?" La respuesta es "no", siempre que nos interesen sólo las fórmulas y no el entendimiento cualitativo de las soluciones. Es importante recordar también que este procedimiento no se generaliza bien a otros sistemas lineales.

Una clasificación de los osciladores armónicos

Ahora podemos contar la historia completa acerca de las soluciones de la ecuación de segundo orden

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = 0$$

que modela los osciladores armónicos (entre otras cosas), y al hacerlo así tendremos ocasión de usar el método de la conjetura afortunada y el del plano fase. Antes de comenzar nuestro análisis, es importante señalar que la masa m y la constante de resorte k son siempre positivas, pero que la constante de amortiguamiento b puede ser cero o positiva. Si $b = 0$, no tenemos amortiguamiento y se dice que el oscilador no es amortiguado.

El oscilador armónico no amortiguado

La ecuación de segundo orden para este caso es simplemente

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0,$$

y el polinomio característico es

$$ms^2 + k = 0.$$

Como m y k son positivos, los eigenvalores son $\pm i\sqrt{k/m}$. Esta raíz cuadrada aparece con tanta frecuencia que se escribe comúnmente como $\omega = \sqrt{k/m}$.

Por tanto, tenemos soluciones complejas de la forma

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\operatorname{sen}\omega t.$$

Tanto la parte real como la imaginaria de esta expresión son soluciones de la ecuación, por lo que la solución general es

$$y(t) = k_1\cos\omega t + k_2\operatorname{sen}\omega t.$$

Cada una de esas funciones es una función periódica cuyo intervalo es $2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{k/m}$ (vea el ejercicio 22 en la sección 3.4).

Calculando $v = dy/dt$, obtenemos la forma vectorial de la solución

$$\mathbf{Y}(t) = k_1 \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ -\omega \operatorname{sen} \omega t \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \omega t \\ \omega \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

Cada una de esas soluciones genera una elipse en el plano fase que comienza en el punto $(k_1, k_2\omega)$ y viaja alrededor del origen en el sentido de las manecillas del reloj (vea el ejercicio 20 en la sección 2.1). Cada solución retorna a su posición original después de $2\pi/\omega$ unidades de tiempo. Por consiguiente, la cantidad ω se llama **frecuencia natural** del movimiento (vea la sección 3.4). El plano fase y las gráficas $y(t)$ ilustran esta periodicidad (vea la figura 3.39).

En términos del sistema real no amortiguado masa-resorte, esos trazos nos dicen que la masa permanece en reposo para siempre, o bien oscila alrededor de su posición de reposo sin asentarse jamás. Sin amortiguamiento, el sistema masa-resorte oscila para siempre con la misma amplitud y periodo. Este comportamiento regular es por lo que los relojes son hechos a menudo con resortes. Por supuesto, los sistemas físicos tienen algún amortiguamiento, lo que explica por qué a los relojes hay que darles cuerda con cierta frecuencia.

Este tipo de movimiento se llama **movimiento armónico simple**. Una observación interesante acerca de éste es que el periodo del movimiento es determinado sólo por m y k. Por tanto, el periodo es independiente de la condición inicial (y en consecuencia de la amplitud del movimiento).

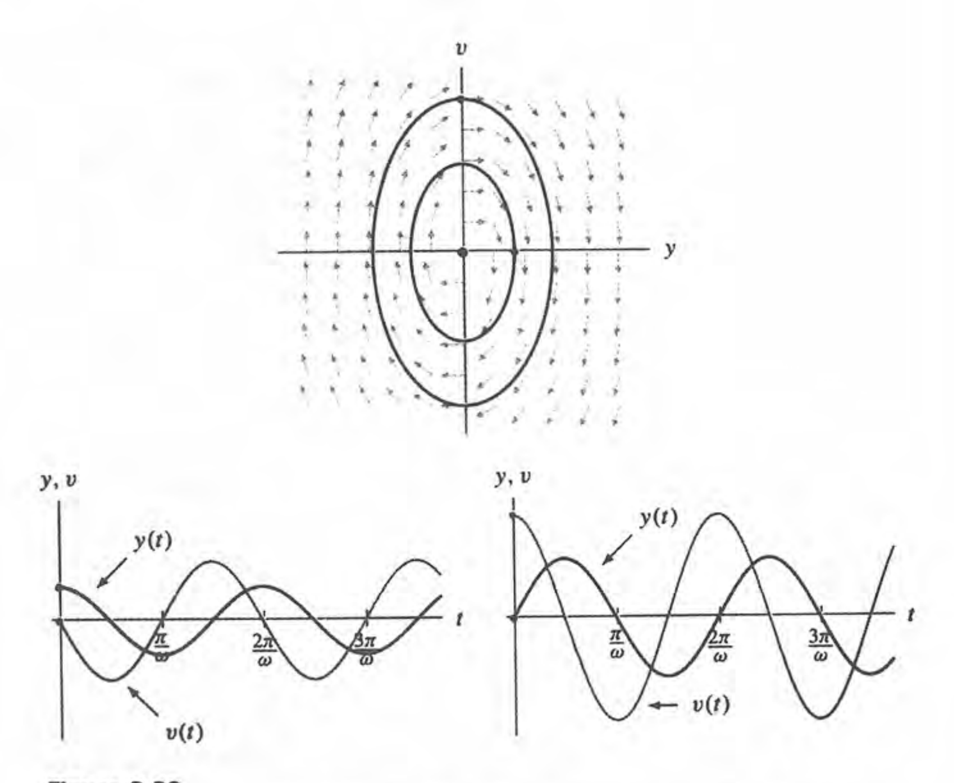


Figura 3.39
Soluciones en el plano fase y las gráficas $y(t)$ y $v(t)$ correspondientes a un oscilador armónico no amortiguado con frecuencia natural ω.

Osciladores armónicos con amortiguamiento

Si se tiene amortiguamiento presente, el sistema masa-resorte se comporta de varias maneras diferentes, dependiendo de las raíces de la ecuación característica. Para la ecuación del oscilador armónico

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = 0,$$

la ecuación característica es

$$ms^2 + bs + k = 0$$

con raíces dadas por la fórmula cuadrática

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}.$$

Hay entonces tres posibilidades para las raíces de la ecuación característica.

- Si b es pequeña respecto a $4km$ (o más precisamente, si $b^2 - 4km < 0$), entonces tenemos raíces complejas. La parte real de esas raíces es $-b/(2m)$, que siempre es negativa. En este caso, se dice que el oscilador armónico es **subamortiguado**.
- Si $b^2 - 4km > 0$, habrá dos raíces reales y distintas para esta ecuación. En este caso, se dice que el oscilador es **sobreamortiguado**.
- Si $b^2 - 4km = 0$, tenemos raíces repetidas y se dice que el oscilador es **críticamente amortiguado**.

Un oscilador subamortiguado

Si b es relativamente pequeño pero no nulo, las raíces de la ecuación característica son complejas con partes reales negativas. Esperamos que el sistema se mueva en espiral en el plano fase con correspondientes oscilaciones en las gráficas $y(t)$.

Por ejemplo, si $m = 1$, $b = 0.2$ y $k = 1.01$, la ecuación de segundo orden para el movimiento del oscilador es

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 0.2\frac{dy}{dt} + 1.01y = 0,$$

y las raíces del polinomio característico $s^2 + 0.2s + 1.01$ son

$$\frac{-0.2 \pm \sqrt{0.04 - 4.04}}{2} = -0.1 \pm i.$$

En consecuencia, la solución compleja es

$$e^{(-0.1 \pm i)t} = e^{-0.1t}(\cos t + i \operatorname{sen} t)$$

y la solución general es

$$y(t) = k_1 e^{-0.1t} \cos t + k_2 e^{-0.1t} \operatorname{sen} t.$$

Esas soluciones tienen un periodo natural de 2π, pero la amplitud de las oscilaciones decaen con el tiempo (vea la figura 3.40). El movimiento correspondiente del resorte es la familiar oscilación alrededor de la posición de reposo, pero la amplitud sucesiva de éstas decrece conforme t se incrementa.

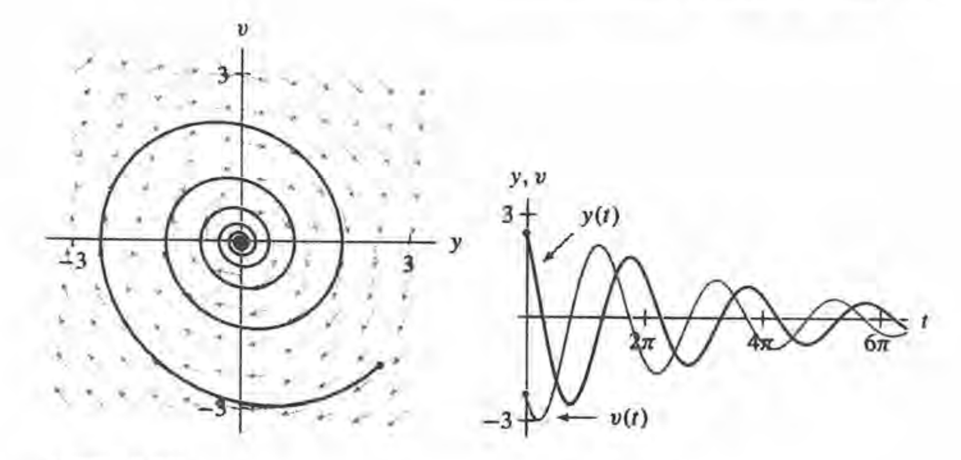


Figura 3.40
Solución en el plano fase y gráficas $y(t)$ y $v(t)$ para el oscilador armónico subamortiguado

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 0.2\frac{dy}{dt} + 1.01y = 0.$$

Un oscilador sobreamortiguado

Si el amortiguamiento del sistema masa-resorte es relativamente grande, esperamos un comportamiento algo distinto para el movimiento de la masa. Por ejemplo, si el sistema está sumergido en un recipiente con crema de cacahuate, difícilmente podríamos esperar que la masa oscilase alrededor de su posición de reposo como en el caso subamortiguado.

Por ejemplo, el polinomio característico del oscilador armónico modelado por

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + y = 0$$

es $s^2 + 3s + 1 = 0$ y los eigenvalores son

$$s = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \approx -1.5 \pm 1.12.$$

Ambos eigenvalores son reales y negativos. Como consecuencia, todas las soluciones de esta ecuación tienden a la posición de reposo de la masa conforme pasa el tiempo. ¿Pero por qué tienden a esta posición? Para responder esto podríamos escribir la solución general de la ecuación de segundo orden. Sin embargo, como la respuesta que buscamos es una descripción cualitativa del movimiento del oscilador, podemos obtenerla de manera más directa usando métodos cualitativos.

El sistema correspondiente a la ecuación de segundo orden anterior es

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

Supongamos que $\mathbf{V}_1$ es un eigenvector del eigenvalor $(-3 - \sqrt{5})/2$, y $\mathbf{V}_2$ es un eigenvector asociado con el eigenvalor $(-3 + \sqrt{5})/2$.

Sabemos que todas las soluciones en el plano fase (excepto aquellas sobre la línea determinada por $\mathbf{V}_1$) tienden al origen tangencialmente en la dirección de $\mathbf{V}_2$ (vea la figura 3.41), En particular, supongamos que alargamos o comprimimos el resorte y liberamos la masa sin velocidad inicial ($v_0 = 0$). Nuestra solución comienza en un punto sobre el eje y, por ejemplo en (3, 0). Cuando t crece, tal solución tiende directamente al origen sin cruzar los ejes y o v (vea la figura 3.41). La posición $y(t)$ decrece a cero y $v(t)$ es siempre negativa (vea la figura 3.42). En términos del sistema masa-resorte, el comportamiento de esta solución significa que la masa simplemente se desliza a su posición de reposo sin oscilar. El medio amortiguador es tan espeso que la masa no va más allá de su posición de reposo.

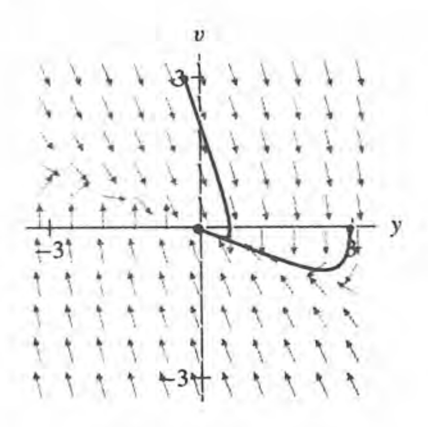


Figura 3.41
Campo de direcciones y dos curvas solución para

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

Una curva solución tiene condición inicial $(y_0, v_0) = (3, 0)$ y la otra $(y_0, v_0) = (-0.25, 3)$.

Sin embargo, para otras condiciones iniciales, es posible que la masa vaya más allá de su posición de reposo. Por ejemplo, considere la solución del sistema con condición inicial $(-0.25, 3)$. De acuerdo con nuestro modelo, esta condición inicial corresponde a la situación en que el resorte está comprimido y luego se libera con velocidad no nula y regresa a la posición de reposo. Note que la correspondiente curva solución por este punto cruza el eje y y luego gira y tiende al origen siguiendo la trayectoria de $\mathbf{V}_2$ (vea la figura 3.41).

La gráfica $y(t)$ para esta condición inicial $(-0.25, 3)$ se ilustra en la figura 3.43. Y nos muestra que al inicio $y(t)$ crece y pasa por $y = 0$ (el eje t en la figura 3.43). Luego $y(t)$ alcanza un máximo y lentamente decrece a 0 sin tocar de nuevo $y = 0$.

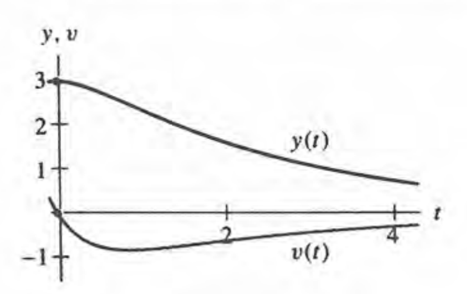


Figura 3.42
Gráficas $y(t)$ y $v(t)$ para la solución del sistema del oscilador armónico con condición inicial (3, 0).

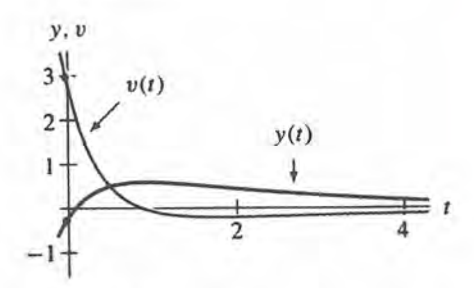


Figura 3.43
Gráficas $y(t)$ y $v(t)$ para la solución del sistema del oscilador armónico con condición inicial $(-0.25, 3)$.

Un oscilador críticamente amortiguado

Si el coeficiente de amortiguamiento y la constante de resorte satisfacen la ecuación

$$b^2 - 4km = 0,$$

entonces la ecuación característica sólo tiene una raíz, $s = -b/(2m)$.

Como sabemos, esta condición divide los retratos fase donde las soluciones se mueven en espiral hacia el origen (sumideros espiral) de los retratos fase donde ellas no se mueven en espiral. Llamamos a este oscilador "críticamente" amortiguado porque un pequeño cambio en la constante de amortiguamiento modifica la naturaleza del movimiento de la masa. Si la disminución del amortiguamiento es mínima, la masa oscila al acercarse a su posición de reposo. Incrementarlo nos lleva al caso sobreamortiguado, donde no hay posibilidad de oscilación.

Por ejemplo, suponga que consideramos un oscilador armónico con masa $m = 1$ y constante de resorte $k = 2$, y que tomamos en cuenta diferentes valores del coeficiente de amortiguamiento b. Entonces, la ecuación de segundo orden que modela a este oscilador es

$$\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + 2y = 0.$$

Las raíces de la ecuación característica $s^2 + bs + 2 = 0$ son

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 8}}{2},$$

y en consecuencia, son complejas si $b < 2\sqrt{2}$, y reales si $b > 2\sqrt{2}$. Y se repiten cuando $b = 2\sqrt{2}$.

Como hemos analizado los casos no críticos, nos concentraremos en el caso en que $b = 2\sqrt{2}$. Entonces, sabemos que el sistema tiene sólo un eigenvalor $s = \sqrt{2}$, y que $y_1(t) = e^{-\sqrt{2}t}$ es una solución de esta ecuación. Para encontrar la solución general, necesitamos otra que no sea un múltiplo de $y_1(t)$ y por tanto volvemos al método de la conjetura afortunada.

¿Pero cuál será la segunda conjetura? Del polinomio característico, sabemos que la conjetura natural, $y(t) = e^{st}$, no será una solución a menos que $s = -\sqrt{2}$. Para determinar $y_2(t)$, recordamos el caso de los eigenvalores repetidos para sistemas (vea la sección 3.5). Recuerde que encontramos que la solución general contiene términos de la forma

$$te^{-\sqrt{2}t}\mathbf{V}$$

para algún vector $\mathbf{V}$. Por tanto, conjeturamos una solución de la forma $y_2(t) = te^{-\sqrt{2}t}$. Podemos comprobarla sustituyendo $y_2(t)$ en el lado izquierdo de la ecuación de segundo orden, obteniendo

$$\begin{aligned}\frac{d^2y_2}{dt^2} + 2\sqrt{2}\frac{dy_2}{dt} + 2y_2 &= (-2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}t} + 2te^{-\sqrt{2}t}) + \\ &\quad 2\sqrt{2}(e^{-\sqrt{2}t} - \sqrt{2}te^{-\sqrt{2}t}) + 2te^{-\sqrt{2}t} \\ &= 0.\end{aligned}$$

La solución general es entonces

$$y(t) = k_1e^{-\sqrt{2}t} + k_2te^{-\sqrt{2}t}.$$

Tanto $e^{-\sqrt{2}t}$ como $te^{-\sqrt{2}t}$ tienden a cero cuando t crece, por lo que las soluciones tienden a la posición de reposo como lo esperábamos. Además, como éstas no contienen senos o cosenos, las soluciones correspondientes no oscilan alrededor de la posición de equilibrio, nuevamente tal como habíamos imaginado.

Esbozamos el retrato fase para el sistema correspondiente calculando primero los eigenvectores asociados con el eigenvalor $\lambda = -\sqrt{2}$. Para este sistema los eigenvectores satisfacen la ecuación $v = -\sqrt{2}y$. El retrato fase para este sistema se muestra en la figura 3.44. Todas las soluciones tienden a (0, 0) conforme t crece y todas son tangentes a la línea $v = -\sqrt{2}y$ de eigenvectores cuando éstas se acercan al origen. Esta tangencia impide que las soluciones se muevan en espiral hacia el origen. (Terminado este análisis, le será de gran utilidad compararlo con el análisis de este ejemplo hecho en la sección 3.5.)

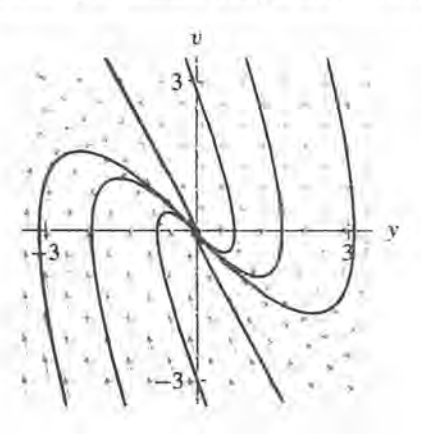


Figura 3.44
Campo de direcciones y curvas solución para

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

Observe que las curvas solución tienden al origen tangencialmente a la solución de línea recta.

Resumen

Tenemos ahora un cuadro completo del comportamiento de los osciladores armónicos modelados por la ecuación lineal de segundo orden

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = 0.$$

- Si $b = 0$, el oscilador no está amortiguado y el punto de equilibrio en el origen en el plano fase es un centro. Todas las soluciones son periódicas, y la masa oscilará siempre alrededor de su posición de reposo. El periodo (natural) de las oscilaciones es $2\pi \sqrt{m/k}$.
- Si $b > 0$ y $b^2 - 4km < 0$, el oscilador es subamortiguado. El origen en el plano fase es un sumidero espiral y las demás soluciones se mueven en espiral hacia el origen. La masa oscila cuando tiende a su posición de reposo con periodo $4m\pi/\sqrt{4km - b^2}$.
- Si $b > 0$ y $b^2 - 4km > 0$, el oscilador es sobreamortiguado. El origen en el plano fase es un sumidero real con dos eigenvalores distintos. La masa tiende a su posición de reposo pero no oscila.
- Si $b > 0$ y $b^2 - 4km = 0$, el oscilador está críticamente amortiguado. El sistema tiene exactamente un eigenvalor que es negativo. Todas las soluciones tienden al origen y son tangenciales a la línea única de eigenvectores. Igual que en el caso sobreamortiguado, la masa tiende a su posición de reposo pero no oscila.

Los cuatro casos descritos clasifican completamente los comportamientos diversos a largo plazo de todos los osciladores armónicos. En la siguiente sección obtendremos una manera geométrica de clasificarlos.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 3.6

En los ejercicios 1-8, considere los osciladores armónicos con masa m, constante de resorte k y coeficiente de amortiguamiento b. Para los valores especificados,

(a) escriba la ecuación diferencial de segundo orden y el correspondiente sistema de primer orden;

(b) encuentre los eigenvalores y eigenvectores del sistema lineal;

(c) clasifique el oscilador (como subamortiguado, sobreamortiguado, críticamente amortiguado o no amortiguado) y, cuando sea apropiado, dé el periodo natural;

(d) esboce el retrato fase del sistema lineal asociado e incluya la curva solución para la condición inicial dada; y

(e) bosqueje las gráficas $y(t)$ y $v(t)$ de la solución con la condición inicial dada.

1. $m = 1, k = 7, b = 8$, con condiciones iniciales $y(0) = -1, v(0) = 5$

2. $m = 1, k = 8, b = 6$, con condiciones iniciales $y(0) = 1, v(0) = 0$

3. $m = 1, k = 5, b = 4$, con condiciones iniciales $y(0) = 1, v(0) = 0$

4. $m = 1, k = 8, b = 0$, con condiciones iniciales $y(0) = 1, v(0) = 4$

5. $m = 2, k = 1, b = 3$, con condiciones iniciales $y(0) = 0, v(0) = 3$

6. $m = 9, k = 1, b = 6$, con condiciones iniciales $y(0) = 1, v(0) = 1$

7. $m = 2, k = 3, b = 0$, con condiciones iniciales $y(0) = 2, v(0) = -3$

8. $m = 2, k = 3, b = 1$, con condiciones iniciales $y(0) = 0, v(0) = -3$

En los ejercicios 9-16, considere los osciladores armónicos con masa m, constante de resorte k y coeficiente de amortiguamiento b. (Los valores de esos parámetros concuerdan con los de los ejercicios 1-8.) Para los valores especificados,

(a) encuentre la solución general de la ecuación de segundo orden que modela el movimiento del oscilador;

(b) determine la solución particular para la condición inicial dada; y

(c) usando las ecuaciones para la solución del problema de valor inicial, esboce las gráficas $y(t)$ y $v(t)$. Compárelas con las que dibujó para los correspondientes ejercicios 1-8.

9. $m = 1, k = 7, b = 8$, con condiciones iniciales $y(0) = -1, v(0) = 5$

10. $m = 1, k = 8, b = 6$, con condiciones iniciales $y(0) = 1, v(0) = 0$

11. $m = 1, k = 5, b = 4$, con condiciones iniciales $y(0) = 1, v(0) = 0$

12. $m = 1, k = 8, b = 0$, con condiciones iniciales $y(0) = 1, v(0) = 4$

13. $m = 2, k = 1, b = 3$, con condiciones iniciales $y(0) = 0, v(0) = 3$

14. $m = 9, k = 1, b = 6$, con condiciones iniciales $y(0) = 1, v(0) = 1$

15. $m = 2, k = 3, b = 0$, con condiciones iniciales $y(0) = 2, v(0) = -3$

16. $m = 2, k = 3, b = 1$, con condiciones iniciales $y(0) = 0, v(0) = -3$

17. Construya una tabla con todos los sistemas posibles de oscilador armónico como sigue:

(a) La primera columna contiene el tipo de oscilador.

(b) La segunda columna contiene la condición de eigenvalor que corresponde a este tipo de sistema.

(c) La tercera columna contiene la condición sobre los parámetros m, k y v que es equivalente a la condición de eigenvalor.

(d) La cuarta columna contiene la razón a la que las soluciones tienden al origen y el periodo natural del oscilador (cuando sea aplicable).

(e) La quinta columna contiene muestras de los diagramas de fase plana.

(f) La sexta columna contiene las gráficas típicas $y(t)$ y $v(t)$ para las soluciones.

18. Suponga que $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son soluciones de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0.$$

Verifique que $y(t) = k_1y_1(t) + k_2y_2(t)$ es también una solución para cualquier selección de las constantes k_1 y k_2.

19. Suponga que $y(t)$ es una solución compleja de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0,$$

donde p y q son números reales. Demuestre que, si $y(t) = y_{re}(t) + iy_{im}(t)$, donde $y_{re}(t)$ y $y_{im}(t)$ son reales, entonces $y_{re}(t)$ y $y_{im}(t)$ son soluciones de la ecuación de segundo orden.

20. Considere un oscilador armónico con masa $m = 1$, constante de resorte $k = 3$ y que el coeficiente de amortiguamiento b sea un parámetro. Por consiguiente, el movimiento del oscilador es modelado por la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + 3y = 0.$$

¿Para qué valor de b tiende más rápido la solución *típica* a la posición de equilibrio? [El punto de equilibrio es $(y, v) = (0, 0)$ donde $v = dy/dt$.]

21. Considere un oscilador armónico con masa $m = 1$, constante de resorte $k = 3$ y un coeficiente (fijo) de amortiguamiento b. Entonces el movimiento del oscilador queda modelado por la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + 3y = 0.$$

¿Cuál es la razón más rápida a la que una solución puede tender al estado de equilibrio? (El estado de equilibrio es el punto $(y, v) = (0, 0)$ donde $v = dy/dt$. Su respuesta debe depender del valor de b.)

22. El sistema de suspensión de un automóvil consta esencialmente de grandes resortes con amortiguamiento. Cuando el vehículo golpea un bache, los resortes se compri-

men. Es razonable usar un oscilador armónico para modelar el movimiento hacia arriba y hacia abajo, donde $y(t)$ mide la magnitud de estiramiento y compresión en los resortes y $v(t)$ es la velocidad vertical del automóvil al rebotar.

Suponga que está trabajando para una compañía que diseña sistemas de suspensión para automóviles. Un día, su jefe le muestra los resultados de una investigación de mercado que indica que la mayoría de la gente demanda amortiguadores que "rebotan dos veces" al ser comprimidos, y que luego retornan gradualmente a su posición de equilibrio desde arriba. Es decir, cuando el vehículo golpea un bache, los resortes se comprimen. Idealmente, deberían expandirse, comprimirse y expandirse y luego retornar a la posición de reposo. Después del golpe inicial, el resorte tendría que pasar por su estado de reposo tres veces y acercarse a esta misma posición desde el estado expandido.

(a) Esboce una gráfica de la posición del resorte después de golpear un bache, donde $y(t)$ denota el estado del resorte en el tiempo t, $y > 0$ y corresponde a la expansión de éste, y $y < 0$ representa el resorte comprimido.

(b) Explique (apropiadamente) por qué el comportamiento mostrado en la figura es imposible con sistemas de suspensión estándar que son modelados precisamente por el sistema del oscilador armónico.

(c) ¿Cuál es su sugerencia para seleccionar el sistema de oscilador armónico que más se aproxime al comportamiento deseado? Justifique su respuesta con un ensayo.

23. Suponga que los ingenieros de materiales descubren un nuevo tipo de fluido llamado "fluido del dedo mágico", el cual tiene la propiedad de que, cuando un objeto se mueve a través de él, es acelerado en la dirección en que viaja ("antiamortiguamiento").

(a) Suponga que la fuerza F_{mf} que el fluido aplica a un objeto es proporcional a la velocidad del objeto con una constante de proporcionalidad b_{mf}. Formule una ecuación diferencial lineal de segundo orden para un sistema masa-resorte que se mueva en el fluido del dedo mágico, suponiendo que sólo están presentes la fuerza natural restauradora F_s del resorte (dada por la ley de Hooke) y la fuerza "antiamortiguamiento" F_{mf}.

(b) Convierta este sistema masa-resorte a un sistema lineal de primer orden.

(c) Clasifique los comportamientos posibles del sistema lineal que construyó usted en el inciso (b).

24. Considere un oscilador armónico con $m = 1$, $k = 2$ y $b = 1$.

(a) ¿Cuál es el periodo natural?

(b) Si m se incrementa ligeramente, ¿crece o disminuye el periodo natural? ¿Qué tan rápido crece o decrece?

(c) Si k se incrementa un poco, ¿aumenta o se reduce el periodo natural? ¿Qué tan rápido crece o decrece?

(d) Si b aumenta ligeramente, ¿se incrementa o disminuye el periodo natural? ¿Qué tan rápido crece o decrece?

25. Suponga que queremos fabricar un reloj usando una masa y un resorte deslizantes sobre una mesa. Arreglamos que el reloj haga "tic" siempre que la masa cruce la posición $y = 0$. La constante de resorte es $k = 2$. Si suponemos que no hay fricción o amortiguamiento ($b = 0$), ¿qué masa m debe unirse al resorte para que su periodo natural sea de una unidad de tiempo?

26. Como se indicó en el texto, puede usarse un oscilador armónico no amortiguado o subamortiguado para fabricar un reloj. Como en el ejercicio 25, si arreglamos que el reloj haga tic siempre que pase por la posición de reposo, entonces el tiempo entre cada tic es igual a la mitad del periodo natural del oscilador.

(a) Si el polvo incrementa el coeficiente de amortiguamiento ligeramente en el oscilador armónico, ¿se atrasará o se adelantará el reloj?

(b) Suponga que el resorte proporciona una fuerza ligeramente menor para una compresión o expansión dada conforme envejece. ¿Esto atrasará o adelantará el reloj?

(c) Si se junta polvo en el oscilador armónico y se aumenta un poco la masa, ¿se atrasará o se adelantará el reloj?

(d) Suponga que todas las condiciones anteriores se presentan, es decir, el coeficiente de amortiguamiento se incrementa ligeramente, el resorte se "cansa" y la masa también presenta un aumento pequeño. ¿Se atrasará o se adelantará el reloj?

3.7 EL PLANO TRAZA-DETERMINANTE

En las secciones previas hemos encontrado varios tipos diferentes de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales. En este momento podría parecer que hay muchas posibilidades diferentes para dichos sistemas, cada una con sus propias características. Para poner todos esos ejemplos en perspectiva, es útil tomar una pausa y repasar todo lo anterior.

Una manera de resumir todo lo que hemos hecho hasta ahora es por medio de una tabla. Como hemos visto, el comportamiento de un sistema lineal está gobernado por los eigenvalores y eigenvectores del sistema, por lo que nuestra tabla deberá contener lo siguiente:

1. El nombre del sistema (sumidero espiral, punto silla, fuente, etcétera).
2. Las condiciones de los eigenvalores.
3. Uno o dos retratos fase representativos.

Por ejemplo, podríamos comenzar construyéndola como en la tabla 3.1.

Esta lista no está de ninguna manera completa. De hecho, uno de los ejercicios al final de esta sección consiste en compilar una tabla completa (vea el ejercicio 1). Hay 8 más.

Como es tan frecuente en el caso de las matemáticas, es conveniente ver la información desde varios puntos de vista. Como estamos observando "el gran cuadro", ¿por qué no tratar de resumir los diferentes comportamientos de los sistemas lineales en una imagen, en lugar de hacerlo con una tabla? Una de estas imágenes se llama el *plano traza-determinante*.

Traza y determinante

Suponga que comenzamos con el sistema lineal $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{A}\mathbf{Y}$, donde $\mathbf{A}$ es la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico para $\mathbf{A}$ es

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc.$$

Tabla 3.1
Tabla parcial de sistemas lineales

Tipo	Eigenvalores	Plano fase	Tipo	Eigenvalores	Plano fase
Punto silla	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$		Sumidero espiral	$\lambda = a \pm ib$ $a < 0, b \neq 0$	
Sumidero	$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$		Fuente espiral	$\lambda = a \pm ib$ $a > 0, b \neq 0$	
Fuente	$0 < \lambda_1 < \lambda_2$		Centro	$\lambda = \pm ib$ $b \neq 0$	

La cantidad $a + d$ se llama la **traza** de la matriz **A** y, como sabemos, la cantidad $ad - bc$ es el determinante de **A**. El polinomio característico de **A** entonces puede abreviarse como

$$\lambda^2 - T\lambda + D,$$

donde $T = a + d$ es la traza de **A** y $D = ad - bc$ es el determinante de **A**. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

entonces el polinomio característico es $\lambda^2 - 5\lambda - 2$, ya que $T = 5$ y $D = 4 - 6 = -2$. (Recuerde que el coeficiente del término λ es $-T$. Es un error común poner este signo menos en el lugar equivocado o incluso olvidarlo por completo.)

Como el polinomio característico de **A** depende sólo de T y D, se infiere que los eigenvalores de **A** también están subordinados a esos valores. Si resolvemos el polinomio característico $\lambda^2 - T\lambda + D$, obtenemos los eigenvalores

$$\lambda = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2}.$$

De esta fórmula nos percatamos de inmediato que los eigenvalores de **A** son complejos si $T^2 - 4D < 0$, son repetidos si $T^2 - 4D = 0$, y son reales y distintos si $T^2 - 4D > 0$.

El plano traza-determinante

Ahora podemos empezar a bosquejar el gran cuadro para los sistemas lineales examinando el plano *traza-determinante*. El eje T corresponde a la línea horizontal y el eje D a la vertical. Entonces, la curva $T^2 - 4D = 0$, o su equivalente, $D = T^2/4$, es una parábola con concavidad hacia arriba en este plano. La llamamos la parábola de *raíz repetida*. Arriba de ésta encontramos $T^2 - 4D < 0$, y abajo de ella $T^2 - 4D > 0$.

Para usar este cuadro, calculamos primero T y D para una matriz dada y luego localizamos el punto (T, D) en el plano. En forma inmediata, podemos visualizar si los eigenvalores son reales, repetidos o complejos, dependiendo de la posición de (T, D) respecto a la parábola de raíz repetida (vea la figura 3.45). Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

entonces el punto $(T, D) = (4, 1)$ y se encuentra debajo de la curva $T^2 - 4D = 0$ (para esta situación particular, $T^2 - 4D = 12 > 0$), por lo que los eigenvalores de A son reales y distintos.

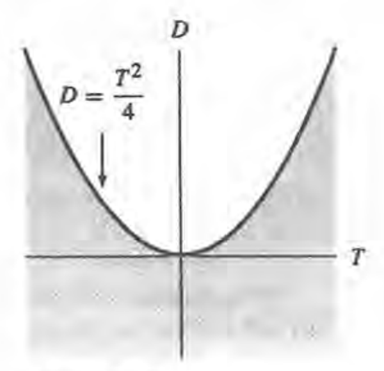


Figura 3.45
La región sombreada corresponde a $T^2 - 4D > 0$.

Refinación del gran cuadro

En realidad, podemos hacer mucho más con el plano traza-determinante. Por ejemplo, si

$$T^2 - 4D < 0,$$

el punto (T, D) se encuentra arriba de la parábola de raíz repetida, entonces sabemos que los eigenvalores son complejos y que su parte real es $T/2$. Tenemos un sumidero espiral si $T < 0$, una fuente si $T > 0$ y un centro si $T = 0$. En el plano traza-determinante, el punto (T, D) está localizado arriba de la parábola de raíz repetida. Si (T, D) se encuentra a la izquierda del eje D, el sistema correspondiente tiene un sumidero espiral; y si se encuentra a la derecha del eje D, el sistema tiene una fuente espiral. Si (T, D) se encuentra sobre el eje D, entonces el sistema tiene un centro. Nuestro cuadro refinado puede entonces dibujarse de esta manera (vea la figura 3.46).

Eigenvalores reales

También es posible distinguir diferentes regiones en el plano traza-determinante donde el sistema lineal tiene eigenvalores reales y distintos. Podemos observar que aquí (T, D) se

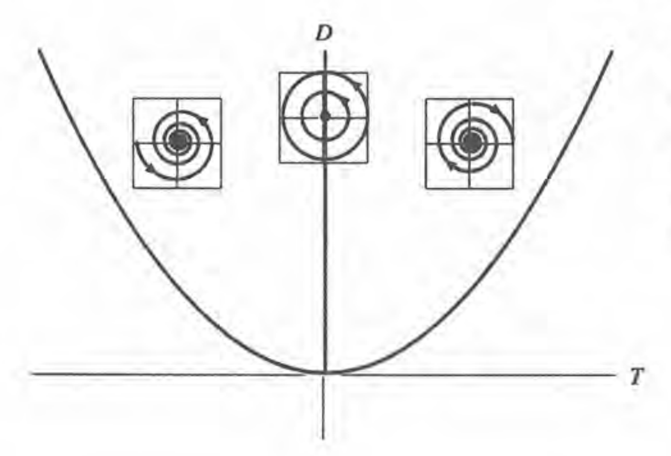


Figura 3.46
Arriba de la parábola con raíces repetidas, tenemos centros a lo largo del eje D, fuentes espirales a la derecha y sumideros espirales a la izquierda.

encuentra abajo de la parábola de raíz repetida. Si $T^2 - 4D > 0$, los eigenvalores son

$$\lambda = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2}.$$

Si $T > 0$, el eigenvalor

$$\frac{T + \sqrt{T^2 - 4D}}{2}$$

es la suma de dos términos positivos y por tanto es positiva. En ese caso, sólo tenemos que determinar el signo del otro eigenvalor

$$\frac{T - \sqrt{T^2 - 4D}}{2}$$

para conocer el tipo del sistema.

Si $D = 0$, este eigenvalor es 0, por lo que nuestra matriz tiene un eigenvalor cero y otro positivo. Si $D > 0$, entonces

$$T^2 - 4D < T^2.$$

Como estamos considerando el caso en que $T > 0$, tenemos

$$\sqrt{T^2 - 4D} < T$$

y

$$\frac{T - \sqrt{T^2 - 4D}}{2} > 0.$$

En este caso, ambos eigenvalores son positivos y, como consecuencia, el origen es una fuente.

Por otra parte, si $T > 0$ pero $D < 0$, entonces

$$T^2 - 4D > T^2,$$

de manera que

$$\sqrt{T^2 - 4D} > T$$

y

$$\frac{T - \sqrt{T^2 - 4D}}{2} < 0.$$

En esta situación específica el sistema tiene un eigenvalor positivo y otro negativo, por lo que el origen es un punto silla.

En caso de que $T < 0$ y $T^2 - 4D > 0$, tenemos:

- dos eigenvalores negativos si $D > 0$
- un eigenvalor negativo y uno positivo si $D < 0$
- un eigenvalor negativo y un eigenvalor cero si $D = 0$

Por último, a lo largo de la parábola de raíz repetida tenemos eigenvalores repetidos. Si $T < 0$, ambos eigenvalores son negativos; si $T > 0$, son positivos y si $T = 0$, son cero.

El cuadro completo se muestra en la figura 3.47. Observe que nos proporciona parte de la misma información que compilamos en nuestra tabla antes en esta sección.

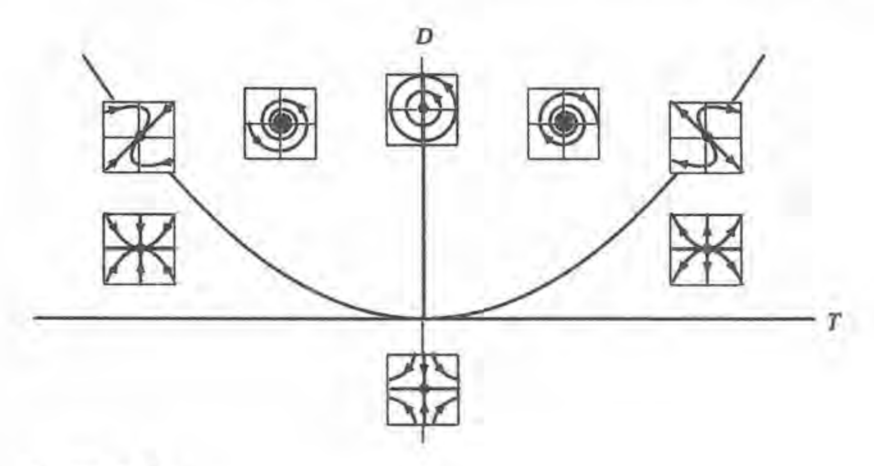


Figura 3.47
La gran figura.

El plano paramétrico

El plano traza-determinante es un ejemplo de un *plano paramétrico*. Los elementos de la matriz **A** son parámetros que podemos ajustar. Cuando esos elementos cambian, la traza y el determinante de la matriz también se modifican y nuestro punto (T, D) se mueve en el plano paramétrico. Cuando este punto entra en las diversas regiones del plano traza-determinante, debemos imaginar que los retratos fase asociados también experimentan transformaciones. El plano traza-determinante es muy diferente de las figuras previas que hemos dibujado. Es un esquema de clasificación del comportamiento de todas las posibles soluciones de sistemas lineales.

Debemos puntualizar que el plano traza-determinante no da una información completa sobre el sistema lineal tratado. Por ejemplo, a lo largo de la parábola de raíz repetida tenemos eigenvalores repetidos, pero no podemos determinar si tenemos uno o muchos eigenvectores linealmente independientes. Para saberlo, es preciso calcularlos. De modo

similar, no podemos determinar la dirección en que las soluciones se mueven alrededor del origen si $T^2 - 4D < 0$. Por ejemplo, las dos matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tienen traza 0 y determinante 1, pero las soluciones del sistema $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{AY}$ se mueven alrededor del origen en el sentido de las manecillas del reloj, mientras que las soluciones de $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{BY}$ viajan en el sentido opuesto.

El oscilador armónico

Podemos dibujar la misma figura para el oscilador armónico. Recuerde que esta ecuación de segundo orden está dada por

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = 0,$$

donde $m > 0$ es la masa, $k > 0$ es la constante de resorte y $b \geq 0$ es el coeficiente de amortiguamiento. Como sistema tenemos

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{pmatrix},$$

por lo que la traza es $T = -b/m$ y el determinante es $D = k/m$. Igual que antes, graficamos $T = -b/m$ sobre el eje horizontal y $D = k/m$ sobre el eje vertical.

Como m y k son positivos y b es no negativo, estamos restringidos a una cuarta parte de la figura para sistemas lineales generales, es decir, al segundo cuadrante del plano T-D. Lo anterior se ilustra en la figura 3.48.

La parábola de raíz repetida es en este caso $T^2 - 4D = b^2 - 4km = 0$. Arriba de ésta tenemos un sumidero espiral (si $b \neq 0$) o un centro (si $b = 0$), y abajo tenemos un sumidero con eigenvalores reales distintos. Sobre la parábola tenemos eigenvalores negativos repetidos.

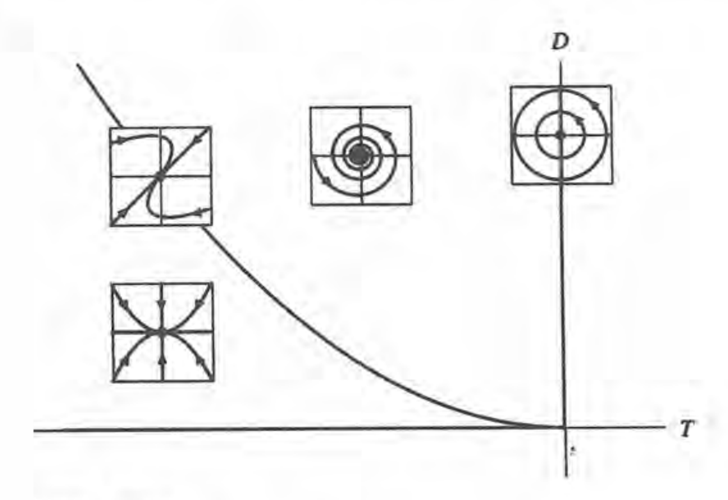


Figura 3.48
Plano traza-determinante para el oscilador armónico.



Kathleen Alligood (1947-) recibió su Ph.D en matemáticas en la Universidad de Maryland. Impartió cátedra en el College of Charleston y en la Michigan State University antes de asumir su presente cargo en la George Mason University.

La investigación de Alligood se centra en el comportamiento de los sistemas no lineales, pero abarca muchos de los temas descritos en este capítulo. Los sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales pueden poseer sumideros igual que los sistemas lineales. Sin embargo, no todas las soluciones tienden al sumidero como en el caso lineal. Con frecuencia, la frontera del conjunto de soluciones que tienden al sumidero es un objeto matemático complicado en extremo, que contiene un número infinito de puntos silla y sus curvas estables. Usando procedimientos de la topología, de la geometría fractal y de los sistemas dinámicos, Alligood y sus colaboradores fueron algunos de los pioneros que analizaron la estructura de esas "fronteras fractales".

En el lenguaje de los osciladores presentados en la sección previa, si $(-b/m, k/m)$ se encuentra arriba de la parábola de raíz repetida y $b > 0$, tenemos un oscilador subamortiguado, o si $b = 0$, se trata de un oscilador sin amortiguamiento. Si $(-b/m, k/m)$ se encuentra sobre la parábola de raíz repetida, el oscilador está críticamente amortiguado. Abajo de la parábola, el oscilador está sobreamortiguado.

Navegando en el plano traza-determinante

Una de las mejores aplicaciones del plano traza-determinante es en el estudio de los sistemas lineales que dependen de parámetros. Cuando los parámetros cambian, se modifica la traza, el determinante de la matriz y, por ende, también el retrato fase del sistema.

Por lo general, los cambios pequeños en los parámetros no afectan mucho el comportamiento cualitativo del sistema. Por ejemplo, un sumidero espiral sigue siéndolo, y lo mismo ocurre con un punto silla. Por supuesto, los eigenvalores y los eigenvectores cambian cuando variamos los parámetros, pero el comportamiento básico de las soluciones sigue siendo más o menos el mismo.

Los lugares críticos

Sin embargo, hay ciertas excepciones a esta situación. Por ejemplo, supongamos que un cambio en los parámetros fuerza al punto (T, D) a cruzar el eje D positivo de izquierda a derecha. El sistema lineal correspondiente ha cambiado de un sumidero espiral a un centro y, de inmediato, a una fuente espiral. En vez de que todas las soluciones tiendan al punto de equilibrio (0, 0), tenemos repentinamente un centro y entonces todas las soluciones de no equilibrio tienden al infinito. Es decir, la familia de sistemas lineales ha encontrado una bifurcación en el momento en que el punto (T, D) cruza el eje D.

El plano traza-determinante nos proporciona una carta de esas localidades donde podemos esperar cambios significativos en el retrato fase. Hay tres *lugares críticos*.

El primero de ellos es el eje D positivo, como lo vimos antes. Una segunda línea crítica es el eje T. Si (T, D) cruza esta línea al variar los parámetros, nuestro sistema se

mueve de un punto silla a un sumidero, a una fuente o a un centro (o viceversa). El tercer lugar crítico es la parábola de raíz repetida donde las espirales se vuelven sumideros o fuentes reales.

Hay un punto en el plano traza-determinante donde surgen muchas posibilidades diferentes. Si la traza y el determinante son cero, la carta muestra que nuestro sistema puede cambiar a cualquier tipo de sistema. Los tres lugares críticos se encuentran en este punto.

En ocasiones es útil imaginarnos esos tres lugares críticos como si fueran cercas. En tanto que cambiemos parámetros de modo que (T, D) no pase sobre una de las cercas, el sistema lineal permanece "sin cambio" en el sentido de que el comportamiento cualitativo de las soluciones no se modifica. Sin embargo, al pasar sobre una cerca, su comportamiento varía de manera significativa. El sistema sufre una bifurcación.

Una familia uniparamétrica de sistemas lineales

Considere la familia uniparamétrica de sistemas lineales $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{AY}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & a \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

que depende únicamente del parámetro a. Cuando a varía, el determinante de esta matriz es $2a$, pero la traza siempre es -2. Si modificamos el parámetro a de un número grande negativo a un número grande positivo, el punto correspondiente (T, D) en el plano traza-determinante se mueve verticalmente a lo largo de la línea recta $T = -2$ (vea la figura 3.49). Cuando a crece, viajamos primero de la región de punto silla hacia donde se localiza un sumidero real. Este cambio se da cuando el sistema admite un eigenvalor cero, que a su vez ocurre en $a = 0$. Si a continúa creciendo, en seguida nos movemos a través de la parábola de raíz repetida y el sistema cambia de un sumidero con eigenvalores reales a un sumidero espiral. Esta segunda bifurcación ocurre cuando $T^2 - 4D = 0$, que para este ejemplo se reduce a $D = 1$. Por consiguiente, esta bifurcación se da en $a = 1/2$.

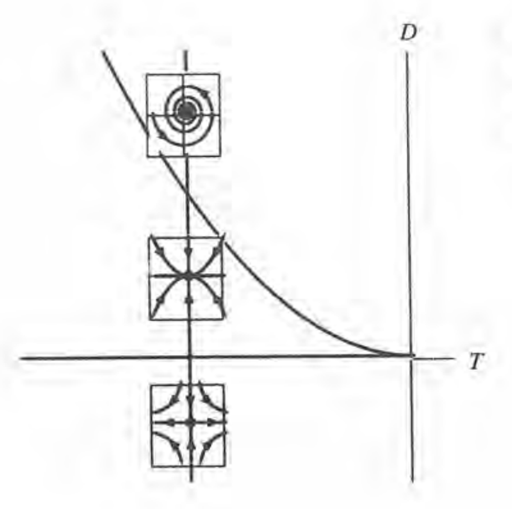


Figura 3.49
Movimiento en el plano traza-determinante correspondiente a la familia paramétrica de sistemas

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY}, \quad \text{donde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & a \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bifurcación de sumidero a sumidero espiral

Investiguemos cómo ocurre la bifurcación de sumidero común a sumidero espiral en términos de los retratos fase de los correspondientes sistemas. Tenemos que calcular primero los eigenvalores y eigenvectores del sistema. Por supuesto, esas cantidades dependen de a. Como el polinomio característico es $\lambda^2 + 2\lambda + 2a = 0$, los eigenvalores son

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8a}}{2} = -1 \pm \sqrt{1-2a}.$$

Como dedujimos antes, si $a > 1/2$, entonces $1 - 2a < 0$ y los eigenvalores son complejos con una parte real negativa. Para $a < 1/2$,

$$\lambda = -1 \pm \sqrt{1-2a}$$

los eigenvalores son reales. En particular, si $0 < a < 1/2$, $\sqrt{(1-2a)} < 1$, por lo que ambos son negativos. Por tanto, el origen es un sumidero con dos líneas rectas de soluciones (vea la figura 3.50).

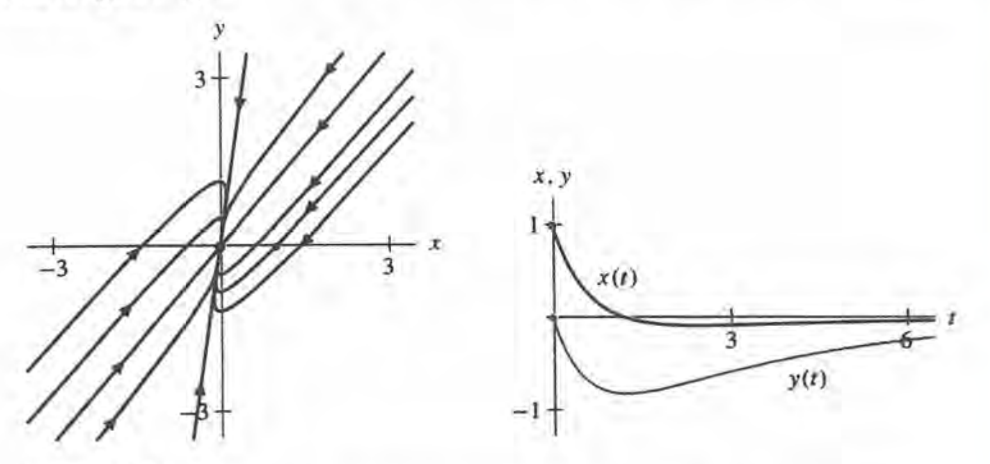


Figura 3.50
Retrato fase y gráficas $x(t)$ y $y(t)$ para la solución indicada para la familia paramétrica con $a = 1/4$.

Si calculamos los eigenvectores para el eigenvalor $\lambda = -1 + \sqrt{(1-2a}$, podemos encontrarlos a lo largo de la línea

$$y = \left(\frac{1+\sqrt{1-2a}}{a}\right) x.$$

De manera similar, los eigenvectores correspondientes al eigenvalor $\lambda = -1 - \sqrt{(1-2a}$ se encuentran a lo largo de la línea

$$y = \left(\frac{1-\sqrt{1-2a}}{a}\right) x.$$

Observe que las pendientes de esas dos líneas rectas tienden a 2 cuando a se aproxima a 1/2. Es decir, nuestras soluciones se unen para producir una sola línea recta a lo largo de $y = 2x$ cuando $a \to 1/2$ (vea la figura 3.51).

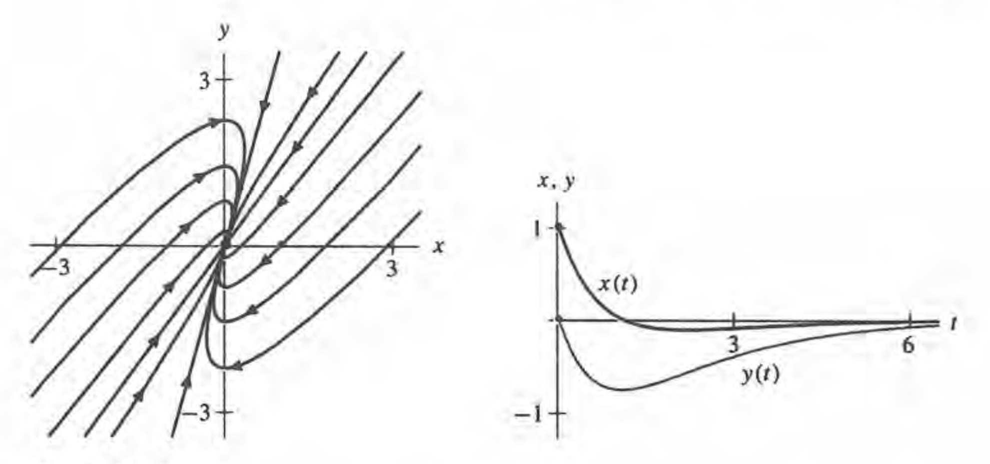


Figura 3.51
Retrato fase y gráficas $x(t)$ y $y(t)$ para la solución indicada para la familia paramétrica con $a = 0.4$.

Cuando a tiende a 1/2, la familia de sistemas lineales se aproxima a uno lineal con un eigenvalor repetido. En $a = 1/2$, el sistema es

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 1/2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Y},$$

cuyo polinomio característico es $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$. Por tanto, el sistema tiene el eigenvalor repetido $\lambda = -1$, y además posee una sola línea de eigenvectores que se encuentran a lo largo de la línea $y = 2x$. El retrato fase y la gráfica típica $x(t)$ se muestran en la figura 3.52. Vemos entonces que los dos eigenvectores independientes se unen para formar la línea única cuando a se aproxima a 1/2.

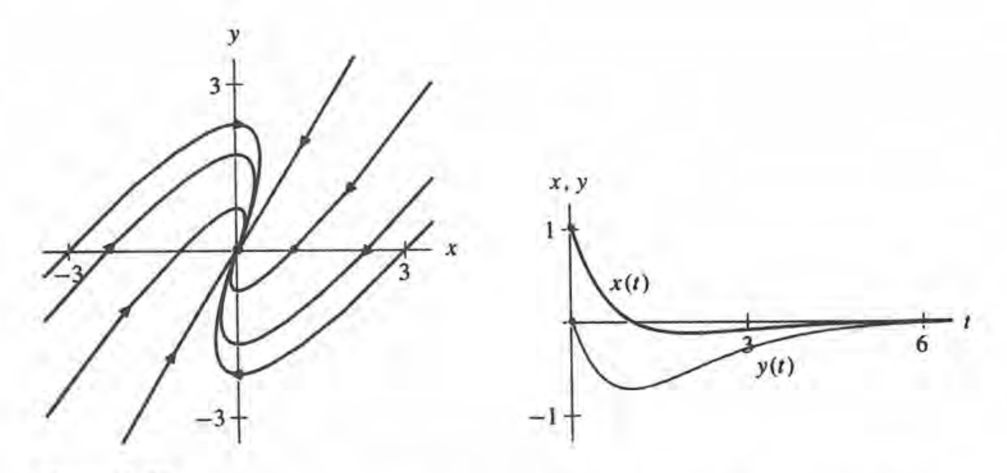


Figura 3.52
Retrato fase y gráficas $x(t)$ y $y(t)$ para la solución indicada para la familia paramétrica con $a = 1/2$.

Cuando el parámetro cruza la parábola de raíz repetida, el origen se vuelve un sumidero espiral. La parte real del eigenvalor es -1 y el periodo natural es $2\pi/\sqrt{2a-1}$. Para todos los valores de a, las soluciones se mueven en espiral hacia el origen. Si a es muy grande, las soluciones se aproximan al origen a la razón exponencial e^{-t} con un periodo muy pequeño. El retrato fase y la gráfica $x(t)$ para $a = 10$ se muestran en la figura 3.53.

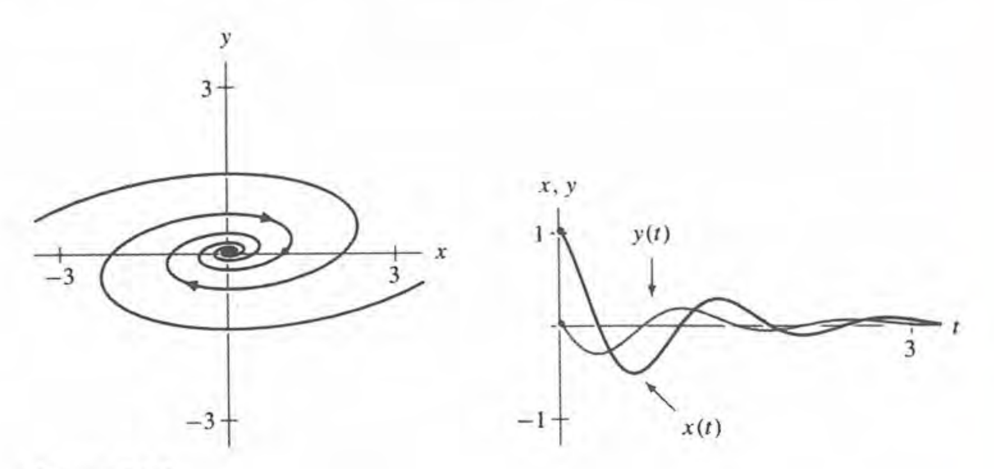


Figura 3.53
Retrato fase y gráfica $x(t)$ para la solución indicada para la familia paramétrica con $a = 10$.

Por otra parte, si a es sólo ligeramente mayor que 1/2, las soluciones aún se aproximan al origen. Sin embargo, el periodo de las oscilaciones, que está dado por $2\pi/\sqrt{2a-1}$, es muy grande cuando a está cerca de 1/2. Para observar una oscilación, debemos fijarnos en una solución durante un largo tiempo. Como las soluciones tienden al origen a una razón exponencial, puede que sea difícil detectar esas oscilaciones (vea la figura 3.54, que es casi indistinguible de la figura 3.52). En las aplicaciones puede haber muy poca diferencia práctica entre una solución que oscila muy lentamente y declina hacia el origen y otra que no oscila.

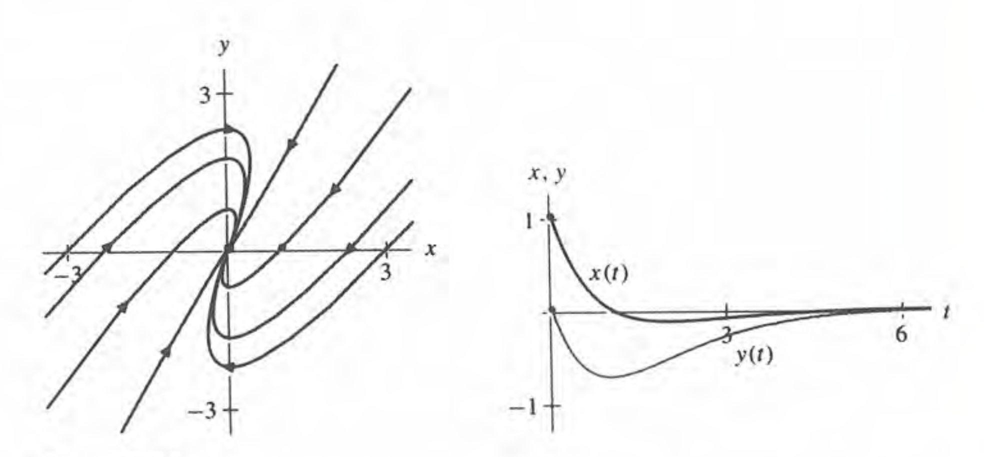


Figura 3.54
Retrato fase y gráfica $x(t)$ para la solución indicada para la familia paramétrica con $a = 0.51$.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 3.7

1. Construya una tabla de los sistemas lineales posibles como sigue:

(a) la primera columna contiene el tipo del sistema (sumidero, sumidero espiral, fuente, etc.), si tiene un nombre,

(b) la segunda columna incluye la condición sobre los eigenvalores que corresponde a este caso,

(c) la tercera columna contiene un pequeño dibujo de dos o más posibles retratos fase para este sistema, y

(d) en la cuarta columna están las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ de las soluciones típicas indicadas en sus retratos fase.

[*Sugerencia:* La tabla más completa contiene 14 casos. No olvide los casos de doble eigenvalor y de eigenvalor cero.]

En los ejercicios 2-7 consideramos las familias uniparamétricas de los sistemas lineales que dependen del parámetro a. Por tanto, cada familia determina una curva en el plano traza-determinante. Para cada familia,

(a) esboce la curva correspondiente en el plano traza-determinante;

(b) en un breve ensayo, analice los diferentes tipos de comportamientos exhibidos por el sistema cuando a crece a lo largo de la línea real (a menos que se indique otra cosa); y

(c) identifique los valores de a donde el tipo del sistema cambia. Ésos son los valores de bifurcación de a.

2. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$

3. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} a & a^2 + a \\ 1 & a \end{pmatrix} \mathbf{Y}$

4. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} a & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$

5. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} a & \sqrt{1 - a^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$

$-1 \leq a \leq 1$

6. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ a & -3 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$

7. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & a \end{pmatrix} \mathbf{Y}$

8. Considere la familia de dos parámetros de sistemas lineales

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

En el plano a-b, identifique todas las regiones donde este sistema posee un punto silla, un sumidero, un sumidero espiral, etc. [*Sugerencia:* Dibuje el plano a-b y sombree cada punto (a, b) con un color diferente dependiendo del tipo de sistema lineal para esa selección (a, b) de parámetros.]

9. Considere la familia de dos parámetros de sistemas lineales

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

En el plano a-b, identifique todas las regiones donde este sistema posee un punto silla, un sumidero, un sumidero espiral, etc. [*Sugerencia:* Dibuje el plano a-b y sombree cada punto (a, b) con un color diferente dependiendo del tipo de sistema lineal para esa selección (a, b) de parámetros.]

10. Considere la familia de dos parámetros de sistemas lineales

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

En el plano a-b, identifique todas las regiones donde este sistema posee un punto silla, un sumidero, un sumidero espiral, etc. [*Sugerencia:* Dibuje el plano a-b y sombree cada punto (a, b) con un color diferente dependiendo del tipo de sistema lineal para esa selección (a, b) de parámetros.]

En los ejercicios 11-13, consideramos la ecuación

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = 0$$

que modela el movimiento de un oscilador armónico con masa m, constante de resorte k y coeficiente de amortiguamiento b. En cada ejercicio fijamos dos valores de esos tres parámetros y obtenemos una familia uniparamétrica de ecuaciones de segundo orden. Para cada familia uniparamétrica,

(a) reescriba la familia uniparamétrica como una familia uniparamétrica de sistemas lineales,
(b) dibuje la curva en el plano traza-determinante obtenida al variar el parámetro, y
(c) en un breve ensayo, analice los diferentes tipos de comportamiento exhibidos por esta familia.

11. Considere

$$\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + 3y = 0.$$

Es decir, fije $m = 1$ y $k = 3$, y haga $0 \leq b < \infty$.

12. Suponga que

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + ky = 0.$$

Esto es, fije $m = 1$ y $b = 2$, y haga $0 < k < \infty$.

13. Considere

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 2y = 0.$$

Es decir, fije $b = 1$ y $k = 2$, y haga $0 < m < \infty$.

3.8 SISTEMAS LINEALES TRIDIMENSIONALES

Hasta ahora hemos estudiado sistemas lineales con dos variables dependientes. El comportamiento de las soluciones y la naturaleza del plano fase de éstos pueden determinarse calculando los eigenvalores y eigenvectores de la matriz de coeficientes de 2×2. Una vez que hemos encontrado dos soluciones con condiciones iniciales linealmente independientes, podemos dar la solución general.

En esta sección mostraremos que lo mismo es cierto de los sistemas lineales con tres variables dependientes. Los eigenvalores y eigenvectores de la matriz de coeficientes de 3×3 determina el comportamiento de las soluciones particulares y de la general. Los sistemas lineales tridimensionales tienen tres eigenvalores, por lo que la lista de los espacios fase cualitativamente distintos y posibles es más larga que para los sistemas planos. Como debemos tratar con tres ecuaciones escalares en vez de dos, la aritmética puede volverse de pronto mucho más complicada. El lector necesitará conseguir un programa o una calculadora capaz de tratar matrices de 3×3.

Independencia lineal y el principio de linealidad

La forma general de un sistema lineal con tres variables dependientes es

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z\\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z\\ \frac{dz}{dt} &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z,\end{aligned}$$

donde x, y y z son las variables dependientes y los coeficientes a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$, son constantes. Podemos escribirlo en forma matricial como

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY},$$

donde $\mathbf{A}$ es la matriz de coeficientes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

y $\mathbf{Y}$ es el vector de variables dependientes,

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Para especificar una condición inicial en este tipo de sistema, debemos dar tres números, x_0, y_0 y z_0.

El principio de linealidad es válido para los sistemas lineales en todas las dimensiones, por lo que si $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$ son soluciones, entonces $k_1\mathbf{Y}_1(t) + k_2\mathbf{Y}_2(t)$ es también una solución para cualesquier constantes k_1 y k_2.

Supongamos que $\mathbf{Y}_1(t)$, $\mathbf{Y}_2(t)$ y $\mathbf{Y}_3(t)$ son tres soluciones del sistema lineal

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY}.$$

Si para cualquier punto (x_0, y_0, z_0) existen constantes k_1, k_2 y k_3 tales que

$$k_1\mathbf{Y}_1(0) + k_2\mathbf{Y}_2(0) + k_3\mathbf{Y}_3(0) = (x_0, y_0, z_0),$$

la solución general del sistema es entonces

$$\mathbf{Y}(t) = k_1\mathbf{Y}_1(t) + k_2\mathbf{Y}_2(t) + k_3\mathbf{Y}_3(t).$$

Para que $\mathbf{Y}_1(t)$, $\mathbf{Y}_2(t)$ y $\mathbf{Y}_3(t)$ den la solución general, los tres vectores $\mathbf{Y}_1(0)$, $\mathbf{Y}_2(0)$ y $\mathbf{Y}_3(0)$ deben señalar en "direcciones diferentes"; es decir, ninguno de ellos debe estar en el plano que pasa por el origen y por los otros dos. En este caso, se dice $\mathbf{Y}_1(0)$, $\mathbf{Y}_2(0)$ y $\mathbf{Y}_3(0)$ (y las soluciones correspondientes) son *linealmente independientes*. En los ejercicios presentamos un procedimiento algebraico para verificar la independencia lineal (vea los ejercicios 2 y 3).

Un ejemplo

Consideremos el sistema lineal

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY} = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 0.4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Podemos verificar que las funciones

$$\mathbf{Y}_1(t) = e^{0.2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_2(t) = e^{-0.1t} \begin{pmatrix} -\cos(\sqrt{0.03}\,t) - \sqrt{3}\operatorname{sen}(\sqrt{0.03}\,t) \\ -2\cos(\sqrt{0.03}\,t) + 2\sqrt{3}\operatorname{sen}(\sqrt{0.03}\,t) \\ 4\cos(\sqrt{0.03}\,t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_3(t) = e^{-0.1t} \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(\sqrt{0.03}\,t) + \sqrt{3}\cos(\sqrt{0.03}\,t) \\ -2\operatorname{sen}(\sqrt{0.03}\,t) - 2\sqrt{3}\cos(\sqrt{0.03}\,t) \\ 4\operatorname{sen}(\sqrt{0.03}\,t) \end{pmatrix}$$

son soluciones, sustituyéndolas en la ecuación diferencial. Por ejemplo,

$$\frac{d\mathbf{Y}_1}{dt} = e^{0.2t} \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 0.4 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{0.2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{0.2t} \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

por lo que $\mathbf{Y}_1(t)$ es una solución. Las otras dos funciones pueden revisarse en forma similar (vea el ejercicio 1). Podemos esbozar las curvas solución que las corresponden en el espacio fase tridimensional (vea la figura 3.55).

Las condiciones iniciales de esas tres soluciones son $\mathbf{Y}_1(0) = (1, 2, 2)$, $\mathbf{Y}_2(0) = (-1, -2, 4)$ y $\mathbf{Y}_3(0) = (\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 0)$. Esos vectores se muestran en la figura 3.56, donde podemos ver que ninguno de éstos se encuentra en el plano determinado por los otros dos; por consiguiente, son linealmente independientes.

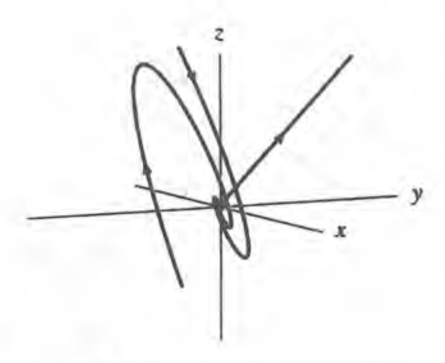


Figura 3.55
Las curvas solución de $\mathbf{Y}_1(t)$, $\mathbf{Y}_2(t)$ y $\mathbf{Y}_3(t)$.

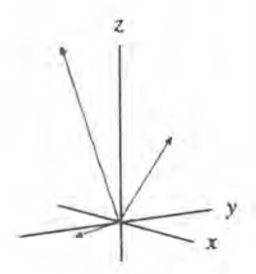


Figura 3.56
Vectores $\mathbf{Y}_1(0) = (1, 2, 2)$, $\mathbf{Y}_2(0) = (-1, -2, 4)$ y $\mathbf{Y}_3(0) = (\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 0)$ en el espacio xyz.

Por ejemplo, para encontrar la solución $\mathbf{Y}(t)$ con la posición inicial $\mathbf{Y}(0) = (2, 1, 3)$, debemos resolver

$$k_1\mathbf{Y}_1(0) + k_2\mathbf{Y}_2(0) + k_3\mathbf{Y}_3(0) = (2, 1, 3),$$

que es equivalente a

$$\begin{cases} k_1 - k_2 + \sqrt{3}k_3 = 2 \\ 2k_1 - 2k_2 - 2\sqrt{3}k_3 = 1 \\ 2k_1 + 4k_2 = 3. \end{cases}$$

Obtenemos $k_1 = 4/3$, $k_2 = 1/12$ y $k_3 = \sqrt{3}/4$, y la solución es

$$\mathbf{Y}(t) = \frac{4}{3}\mathbf{Y}_1(t) + \frac{1}{12}\mathbf{Y}_2(t) + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathbf{Y}_3(t).$$

Eigenvalores y eigenvectores

El método para encontrar las soluciones de sistemas con tres variables dependientes es el mismo que para sistemas con dos variables. Empezamos por determinar los eigenvalores y eigenvectores. Supongamos que nos dan un sistema lineal $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{AY}$, donde $\mathbf{A}$ es una matriz de coeficientes de 3×3 y $\mathbf{Y} = (x, y, z)$. Un *eigenvector* para la matriz $\mathbf{A}$ es un vector $\mathbf{V}$ no cero tal que

$$\mathbf{AV} = \lambda\mathbf{V},$$

donde λ es el *eigenvalor* para $\mathbf{V}$. Si $\mathbf{V}$ es un eigenvector para $\mathbf{A}$ con eigenvalor λ, entonces

$$\mathbf{Y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{V}$$

es una solución del sistema lineal.

El método para encontrar eigenvalores y eigenvectores para una matriz de 3×3

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

es muy similar al que se utiliza para sistemas bidimensionales, sólo que requiere más trabajo aritmético. En particular, necesitamos la fórmula para el determinante de una matriz de 3×3.

DEFINICIÓN El *determinante* de la matriz $\mathbf{A}$ es

$$\det \mathbf{A} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{32}). \quad \blacksquare$$

Usando la matriz identidad de 3×3

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

obtenemos el *polinomio característico* de $\mathbf{A}$ como

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Igual que en el caso bidimensional, tenemos:

TEOREMA Los eigenvalores de una matriz $\mathbf{A}$ de 3×3 son las raíces de su polinomio característico. $\blacksquare$

Para obtener los eigenvalores de una matriz de 3×3 debemos encontrar las raíces de un polinomio cúbico. Esto no es tan fácil como determinar las raíces de una cuadrática. Aunque existe una "ecuación cúbica" análoga a la cuadrática para encontrar las raíces, es bastante complicada. (Se emplea en los paquetes de álgebra computacional para dar los valores exactos de las raíces cúbicas.) Sin embargo, en casos donde no se factoriza fácilmente, recurrimos con frecuencia a procedimientos numéricos como el método de Newton para calcular las raíces cúbicas.

Para encontrar los eigenvectores correspondientes, debemos resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Afortunadamente hay muchos ejemplos de sistemas que ilustran los comportamientos posibles en tres dimensiones y para los cuales la aritmética no es tan difícil.

Una matriz diagonal

El tipo más simple de una matriz de 3×3 es una matriz *diagonal*, en la que los únicos términos no nulos se encuentran sobre la diagonal principal. Por ejemplo, consideremos el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de $\mathbf{A}$ es $(-3 - \lambda)(-1 - \lambda)(-2 - \lambda)$, que es muy simple porque muchos de los coeficientes de $\mathbf{A}$ son cero. Los eigenvalores son las raíces de este polinomio, es decir, las soluciones de

$$(-3 - \lambda)(-1 - \lambda)(-2 - \lambda) = 0.$$

Así, los eigenvalores son $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = -2$.

Encontrar los eigenvectores correspondientes no es complicado. Para $\lambda_1 = -3$, debemos solucionar

$$\mathbf{AV}_1 = -3\mathbf{V}_1$$

para $\mathbf{V}_1 = (x_1, y_1, z_1)$. El producto $\mathbf{AV}_1$ es

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_1 \\ -y_1 \\ -2z_1 \end{pmatrix},$$

y por tanto, tenemos que resolver

$$\begin{pmatrix} -3x_1 \\ -y_1 \\ -2z_1 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

para x_1, y_1 y z_1. Las soluciones de este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas son $y_1 = z_1 = 0$, y x_1 puede tener cualquier valor (no nulo). Así, en particular $(1, 0, 0)$ es un eigenvector para $\lambda_1 = -3$. Del mismo modo, encontramos que $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ son eigenvalores para $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = -2$, respectivamente. Observe que $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ son linealmente independientes.

Con estos eigenvalores y eigenvectores podemos construir soluciones del sistema

$$\mathbf{Y}_1(t) = e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Y}_2(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix},$$

y

$$\mathbf{Y}_3(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Como este sistema es diagonal, podríamos haber llegado hasta aquí "por inspección". Si escribimos el sistema en componentes

$$\frac{dx}{dt} = -3x$$
$$\frac{dy}{dt} = -y$$
$$\frac{dz}{dt} = -2z,$$

vemos que dx/dt depende sólo de x, dy/dt únicamente de y y dz/dt depende sólo de z. En otras palabras, el sistema se desacopla completamente y cada coordenada puede tratarse en forma independiente. Las soluciones de esas ecuaciones diferenciales son fáciles de encontrar.

Ahora que tenemos tres soluciones independientes, podemos resolver cualquier problema de valor inicial para este sistema. Por ejemplo, para encontrar la solución $\mathbf{Y}(t)$ con $\mathbf{Y}(0) = (2, 1, 2)$, es preciso determinar constantes k_1, k_2 y k_3 tales que

$$(2, 1, 2) = k_1\mathbf{Y}_1(0) + k_2\mathbf{Y}_2(0) + k_3\mathbf{Y}_3(0).$$

Así entonces, $k_1 = 2$, $k_2 = 1$ y $k_3 = 2$, y $\mathbf{Y}(t) = (2e^{-3t}, e^{-t}, 2e^{-2t})$ es la solución requerida.

La figura 3.57 es un croquis del espacio fase. Note que los ejes coordenados son líneas de eigenvectores, y por eso forman soluciones de línea recta. Como los tres eigenvalores son negativos, las soluciones a lo largo de los tres ejes tienden hacia el origen. Puesto que cualquier otra solución puede construirse como una combinación lineal de las soluciones sobre los ejes, todas éstas tienden hacia el origen y entonces es natural llamarlo un sumidero.

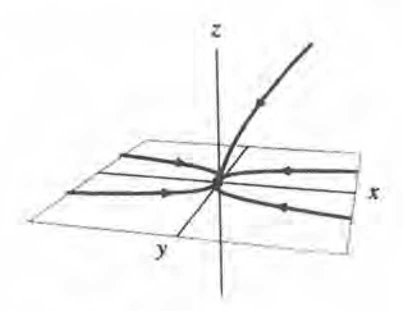


Figura 3.57
Espacio fase para $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{AY}$ para la matriz diagonal $\mathbf{A}$.

Comportamiento tridimensional

Antes de dar una clasificación de los sistemas lineales tridimensionales, daremos un ejemplo que tiene un comportamiento muy diferente del que es posible en dos dimensiones.

Consideremos el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{BY} = \begin{pmatrix} 0.1 & -1 & 0 \\ 1 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de $\mathbf{B}$ es

$$((0.1 - \lambda)(0.1 - \lambda) + 1)(-0.2 - \lambda) = (\lambda^2 - 0.2\lambda + 1.01)(-0.2 - \lambda),$$

por lo que los eigenvalores son $\lambda_1 = -0.2$, $\lambda_2 = 0.1 + i$ y $\lambda_3 = 0.1 - i$. Esperamos ver una línea de soluciones que se acercan al origen en el espacio fase, correspondiente al eigenvalor real negativo λ_1. Por analogía con el caso bidimensional, los eigenvalores complejos con parte real positiva pertenecen a soluciones que se mueven en espiral alejándose del origen. Éste es un "punto silla espiral", que no es posible en dos dimensiones.

Podríamos encontrar los eigenvectores asociados con cada eigenvalor igual que anteriormente y determinar la solución general. Los eigenvectores para los eigenvalores complejos son complicados, y para obtener las soluciones reales tendremos que tomar las partes reales e imaginarias tal como lo hicimos en los sistemas bidimensionales. Sin embargo, tenemos suerte de nuevo, y este sistema también se desacopla en

$$\frac{dx}{dt} = 0.1x - y$$
$$\frac{dy}{dt} = x + 0.1y$$

y

$$\frac{dz}{dt} = -0.2z.$$

En el plano x-y, los eigenvalores son $0.1 \pm i$, por lo que el origen es una fuente espiral. A lo largo del eje z, todas las soluciones tienden a cero con el paso del tiempo (vea la figura 3.58).

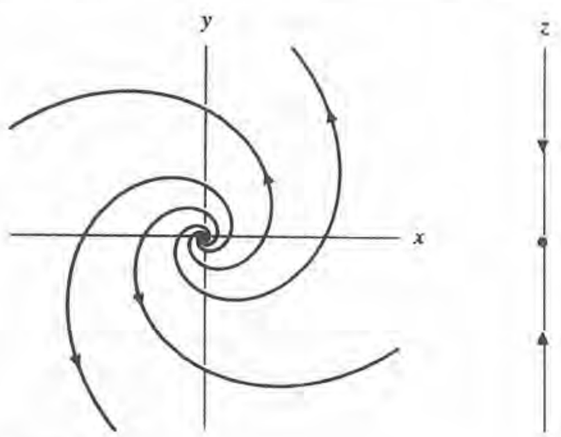


Figura 3.58
Plano fase para el sistema x-y y línea fase para z.

Al combinar esas figuras obtenemos un croquis del espacio fase tridimensional. Vea que la coordenada z de cada solución declina hacia cero, mientras que en el plano x-y, las soluciones se mueven en espiral alejándose del origen (vea la figura 3.59).

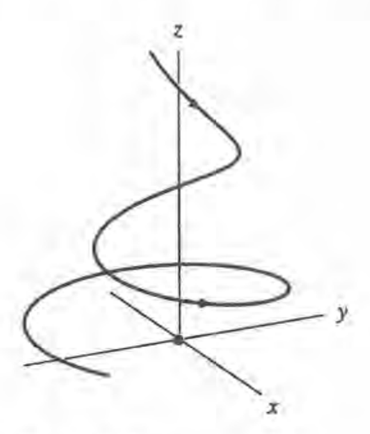


Figura 3.59
Espacio fase para $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{BY}$.

Clasificación de los sistemas lineales tridimensionales

Aunque hay más tipos posibles de gráficas de espacios fase para los sistemas tridimensionales que para los bidimensionales, la lista aún es finita. Igual que para dos dimensiones, la naturaleza del sistema queda determinada por los eigenvalores. Cuando estos últimos son reales y negativos, corresponden a soluciones de línea recta que tienden hacia el origen; pero si el eigenvalor es positivo, se alejan del origen. Los eigenvalores complejos pertenecen al movimiento en espiral. Las partes reales negativas indican un desplazamiento en espiral hacia el origen, mientras que las partes reales positivas señalan un movimiento en espiral alejándose del origen.

Como el polinomio característico es una función cúbica, habrá tres eigenvalores (que pueden no ser todos distintos si hay raíces repetidas). Siempre encontraremos por lo menos un eigenvalor real. Los otros dos pueden ser reales o un par complejo conjugado (vea los ejercicios).

Los tipos más importantes de los sistemas lineales tridimensionales pueden dividirse en tres categorías: sumideros, fuentes y puntos silla. En los ejercicios se proporcionan ejemplos de los otros casos (que incluyen sistemas con eigenvalores dobles y nulos).

Sumideros

Un sumidero es un punto de equilibrio en el origen al que tienden todas las soluciones cuando se incrementa el tiempo. Si los tres eigenvalores son reales y negativos, entonces habrá tres soluciones de línea recta, que tienden todas al origen. Como cualquier otra solución es una combinación lineal de esas soluciones, todas las soluciones tienden al origen cuando el tiempo se incrementa (vea la figura 3.57).

La otra posibilidad para un sumidero es que tenga un eigenvalor real negativo y dos eigenvalores complejos con partes reales negativas. Esto significa que habrá una solución de línea recta que tiende al origen y un plano de soluciones que se mueven en espiral también hacia ese punto. Las restantes exhiben esos dos comportamientos (vea la figura 3.60).

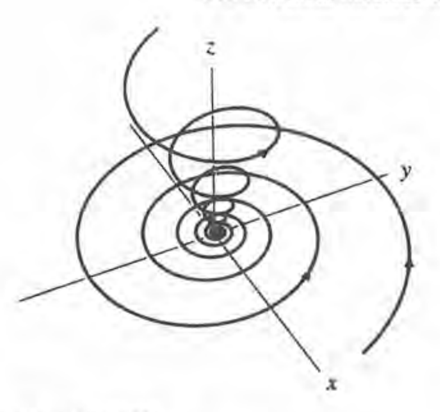


Figura 3.60
Ejemplo de espacio fase para un sumidero espiral.

Fuentes

También hay dos posibilidades para las fuentes. Podemos tener tres eigenvalores reales y positivos o un eigenvalor real positivo y un par complejo conjugado con partes reales positivas. Un ejemplo de un espacio fase se da en la figura 3.61. Observe que este sistema se ve tal como el sumidero en la figura 3.60, excepto que las direcciones de las flechas han sido invertidas, por lo que las soluciones se alejan del origen conforme el tiempo se incrementa.

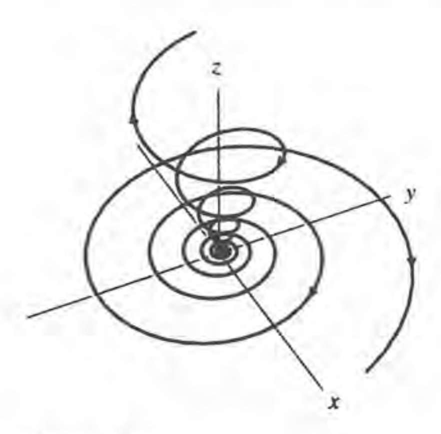


Figura 3.61
Ejemplo de espacio fase para una fuente espiral.

Puntos silla

El punto de equilibrio en el origen es un punto silla si, cuando el tiempo crece hasta el infinito, algunas soluciones tienden hacia él mientras que otras soluciones se alejan de él. Esto puede ocurrir de cuatro maneras diferentes. Si todos los eigenvalores son reales, entonces podríamos tener uno positivo y dos negativos o dos positivos y uno negativo. En el primer caso, uno positivo y dos negativos, habrá una línea recta de soluciones que tienden a alejarse del origen cuando el tiempo crece y un plano de soluciones que tiende ha-

cia el origen cuando el tiempo crece. En el otro caso, dos positivos y uno negativo, habrá un plano de soluciones que tiende a alejarse del origen cuando el tiempo crece y una línea de soluciones que tiende hacia el origen cuando el tiempo crece. En ambos casos, al final todas las otras soluciones se alejarán del origen cuando el tiempo crezca o decrezca (vea la figura 3.62).

Los otros dos casos ocurren si hay sólo un eigenvalor real y los otros dos son un par de complejos conjugados. Si el eigenvalor real es negativo y las partes reales de los eigenvalores complejos son positivas, entonces al incrementar el tiempo, habrá una línea recta de soluciones que tienden hacia el origen y un plano de soluciones que se alejan de él. Todas las otras soluciones son una combinación de esos comportamientos, por lo que al aumentar el tiempo se mueven en espiral alrededor de la línea recta de soluciones en lazos cada vez más amplios (vea la figura 3.59). La otra posibilidad es que el eigenvalor real sea positivo y los eigenvalores complejos tengan partes reales negativas. En este caso se tiene una línea recta de soluciones que tienden a alejarse del origen y un plano de soluciones que se mueven en espiral hacia el origen cuando el tiempo crece. Toda otra solución se mueve en espiral alrededor de la línea recta de soluciones mientras se aleja del origen (vea la figura 3.63).

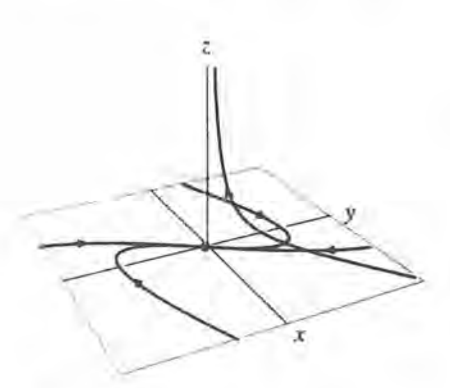


Figura 3.62
Ejemplo de un punto silla con un eigenvalor positivo y dos negativos.

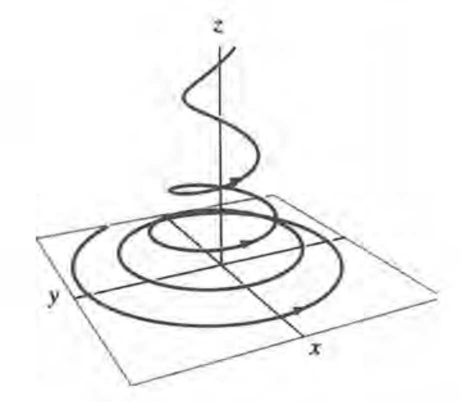


Figura 3.63
Ejemplo de un punto silla con un eigenvalor real y un par de eigenvalores complejos conjugados.

Revisión de un ejemplo

Terminemos esta sección volviendo al ejemplo que usamos al principio. Los otros casos son sistemas que se desacoplan en sistemas de menores dimensiones. Desafortunadamente, el caso general no es tan simple. Este ejemplo no se ve muy complicado porque la matriz de coeficientes tiene muchos elementos nulos. Sin embargo, éste no se desacopla inmediatamente en sistemas de menores dimensiones.

Considere el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY} = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 0.4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico para **A** es $-\lambda^3 + 0.008$, por lo que los eigenvalores son las soluciones de

$$-\lambda^3 + 0.008 = 0.$$

Es decir, los eigenvalores son las raíces cúbicas de 0.008. Todo número tiene tres raíces cúbicas si consideramos a las raíces cúbicas complejas como reales. Las de 0.008 son $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.2e^{i2\pi/3}$ y $\lambda_3 = 0.2e^{-i2\pi/3}$. Los dos últimos eigenvalores pueden escribirse como $\lambda_2 = -0.1 + i\sqrt{0.03}$ y $\lambda_3 = -0.1 - i\sqrt{0.03}$.

Este sistema es un punto silla con un eigenvalor real positivo y un par de eigenvalores complejos conjugados con partes reales negativas. Las soluciones se mueven apretadamente en espiral alrededor de la línea de eigenvectores asociada con $\lambda_1 = 0.2$. Para esbozar el espacio fase, debemos encontrar los eigenvectores para esos eigenvalores.

Para $\lambda_1 = 0.2$, los eigenvalores son soluciones de

$$\mathbf{AV}_1 = 0.2\mathbf{V}_1,$$

que se escribe en coordenadas como

$$\begin{cases} 0.1y_1 = 0.2x_1 \\ 0.2z_1 = 0.2y_1 \\ 0.4x_1 = 0.2z_1. \end{cases}$$

En particular, $\mathbf{V}_1 = (1/2, 1, 1)$ es un eigenvector. $\mathbf{V}_1$ puede usarse para determinar una línea entera de eigenvectores en el espacio.

Para encontrar el plano de soluciones que se mueven en espiral hacia el origen, debemos encontrar los eigenvectores para $\lambda_2 = -0.1 + i\sqrt{0.03}$. Es decir, debemos resolver

$$\mathbf{AV}_2 = (-0.1 + i\sqrt{0.03})\mathbf{V}_2$$

para $\mathbf{V}_2$. En otras palabras,

$$\begin{aligned} y_2 &= (-1 + i\sqrt{3})x_2 \\ 2z_2 &= (-1 + i\sqrt{3})y_2 \\ 4x_2 &= (-1 + i\sqrt{3})z_2. \end{aligned}$$

Un eigenvector asociado con λ_2 es $\mathbf{V}_2 = (-1 + i\sqrt{3}, -2 - i2\sqrt{3}, 4)$. La solución correspondiente del sistema es

$$\mathbf{Y}_2(t) = e^{(-0.1+i\sqrt{0.03})t}(-1 + i\sqrt{3}, -2 - i2\sqrt{3}, 4).$$

Podemos convertirlo en dos soluciones reales tomando las partes real e imaginaria. Como nuestra meta es encontrar el plano en que las soluciones se mueven en espiral, debemos fijarnos sólo en el punto inicial $\mathbf{Y}_2(0) = (-1 + i\sqrt{3}, -2 - i2\sqrt{3}, 4)$. Los puntos iniciales de las partes real e imaginaria son $(-1, -2, 4)$ y $(\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 0)$, respectivamente. El plano en el que las soluciones se desplazan en espiral hacia el origen está formado por todas las combinaciones lineales de esos dos vectores. Podemos usar esta información para esbozar con bastante precisión el espacio fase de este sistema (vea la figura 3.55). Tam-

bién trazamos las gráficas de las funciones coordenadas de una solución (vea las figuras 3.64 y 3.65). Note que para la solución del ejemplo mostrado, las tres coordenadas tienden al infinito cuando t crece, debido a que el eigenvector para el eigenvalor λ_1 tiene componentes no nulas para las tres variables.

En el primer ejemplo de esta sección se proporcionan tres soluciones linealmente independientes para este sistema. En él podemos observar que los sistemas lineales tridimensionales pueden ser bastante complejos (aun cuando muchos de los coeficientes sean cero). Sin embargo, el comportamiento cualitativo es aún determinado por los eigenvalores, por lo que es posible clasificar a esos sistemas sin tener que resolverlos completamente.

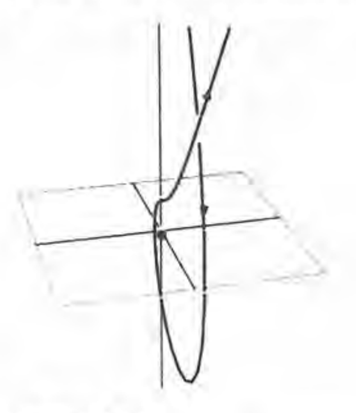


Figura 3.64
Espacio fase para el sistema $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{AY}$.

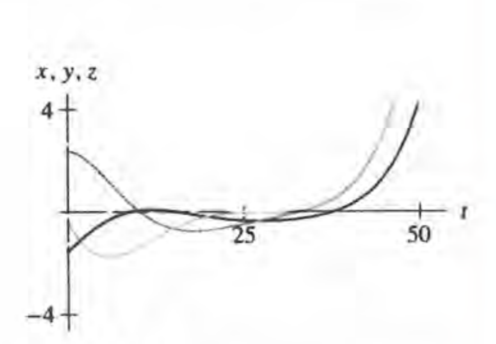


Figura 3.65
Gráficas de $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ para la solución indicada en la figura 3.64.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 3.8

1. Considere el sistema lineal

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY} = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 0.4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Revise que las funciones

$$\mathbf{Y}_2(t) = e^{-0.1t} \begin{pmatrix} -\cos(\sqrt{0.03}\,t) - \sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\sqrt{0.03}\,t) \\ -2\cos(\sqrt{0.03}\,t) + 2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\sqrt{0.03}\,t) \\ 4\cos(\sqrt{0.03}\,t) \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{Y}_3(t) = e^{-0.1t} \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}(\sqrt{0.03}\,t) + \sqrt{3}\cos(\sqrt{0.03}\,t) \\ -2\,\mathrm{sen}(\sqrt{0.03}\,t) - 2\sqrt{3}\cos(\sqrt{0.03}\,t) \\ 4\,\mathrm{sen}(\sqrt{0.03}\,t) \end{pmatrix}$$

son soluciones del sistema.

2. Si un vector $\mathbf{Y}_3$ se encuentra en el plano determinado por los dos vectores $\mathbf{Y}_1$ y $\mathbf{Y}_2$, entonces podemos escribir $\mathbf{Y}_3$ como una combinación lineal de $\mathbf{Y}_1$ y $\mathbf{Y}_2$. Esto es,

$$\mathbf{Y}_3 = k_1\mathbf{Y}_1 + k_2\mathbf{Y}_2$$

para algunas constantes k_1 y k_2. Pero entonces

$$k_1\mathbf{Y}_1 + k_2\mathbf{Y}_2 - \mathbf{Y}_3 = (0, 0, 0).$$

Demuestre que, si

$$k_1\mathbf{Y}_1 + k_2\mathbf{Y}_2 + k_3\mathbf{Y}_3 = (0, 0, 0)$$

donde no todas las k son cero, entonces los vectores no son linealmente independientes. [*Sugerencia:* Comience suponiendo que $k_3 \neq 0$ y demuestre que $\mathbf{Y}_3$ está en el plano determinado por $\mathbf{Y}_1$ y $\mathbf{Y}_2$. Trate luego los otros casos.] Note que este cálculo conduce al teorema de que tres vectores $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Y}_2$ y $\mathbf{Y}_3$ son linealmente independientes si y sólo si la única solución de

$$k_1\mathbf{Y}_1 + k_2\mathbf{Y}_2 + k_3\mathbf{Y}_3 = (0, 0, 0)$$

es $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

3. Usando el procedimiento del ejercicio 2, determine si los conjuntos de tres vectores siguientes son o no linealmente independientes.

(a) $(1, 2, 1)$, $(1, 3, 1)$, $(1, 4, 1)$
(b) $(2, 0, -1)$, $(3, 2, 2)$, $(1, -2, -3)$
(c) $(1, 2, 0)$, $(0, 1, 2)$, $(2, 0, 1)$
(d) $(-3, \pi, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(-2, -2, -2)$

En los ejercicios 4-7, considere el sistema lineal $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{A}\mathbf{Y}$ con la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ especificada. Cada uno de esos sistemas se desacopla en uno bidimensional y en otro unidimensional. Para cada ejercicio,

(a) calcule los eigenvalores,
(b) determine cómo se desacopla el sistema,
(c) esboce el plano fase bidimensional y la línea fase unidimensional para los sistemas desacoplados, y
(d) haga un croquis aproximado del retrato fase del sistema.

4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

6. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Los ejercicios 8-9 consideran las propiedades del polinomio cúbico

$$p(\lambda) = \alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta,$$

donde α, β, γ y δ son números reales.

8. **(a)** Demuestre que si α es positiva, entonces el límite de $p(\lambda)$ es ∞, cuando $\lambda \to \infty$; y el límite de $p(\lambda)$ es $-\infty$ cuando $\lambda \to -\infty$.

(b Demuestre que si α es negativa, entonces el límite de $p(\lambda)$ es $-\infty$, cuando $\lambda \to \infty$; y el límite de $p(\lambda)$ es ∞, cuando $\lambda \to -\infty$.

(c) Usando lo anterior, demuestre que $p(\lambda)$ debe tener por lo menos una raíz real; es decir, por lo menos un número real λ_0 tal que $p(\lambda_0) = 0$. [*Sugerencia:* Observe la gráfica de $p(\lambda)$.]

9. Suponga que $a + ib$ es una raíz de $p(\lambda)$, es decir, $p(a + ib) = 0$. Demuestre que $a - ib$ también es una raíz. [*Sugerencia:* Recuerde que un número complejo es cero si y sólo si sus partes real e imaginaria son cero. Luego calcule $p(a + ib)$ y $p(a - ib)$.]

En los ejercicios 10-13, considere el sistema lineal $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{BY}$ con la matriz de coeficientes $\mathbf{B}$ especificada. Esos sistemas no caen en la clasificación de los tipos más comunes presentados en el texto. Sin embargo, las ecuaciones para dx/dt y dy/dt se desacoplan de dz/dt. Para cada uno de esos sistemas,

(a) calcule los eigenvalores,

(b) esboce el plano fase x-y y la línea fase z, y

(c) haga un croquis aproximado del retrato fase del sistema.

10. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

11. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

12. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

13. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 14-15, considere el sistema lineal $d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{CY}$. Esos sistemas no están dentro de la clasificación de los tipos más comunes que incluimos en el texto, y tampoco se desacoplan en sistemas de menores dimensiones. Para cada sistema,

(a) calcule los eigenvalores,

(b) calcule los eigenvectores, y

(c) esboce (lo mejor que pueda) el retrato fase del sistema. [*Sugerencia:* Use los eigenvalores y los eigenvectores y también los vectores del campo vectorial.]

14. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

15. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

16. Para el sistema lineal

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$$

(a) Demuestre que $\mathbf{V}_1 = (1, 1, 1)$ es un eigenvector de la matriz de coeficientes calculando $\mathbf{AV}_1$. ¿Cuál es el eigenvalor asociado?

(b) Encuentre los otros dos eigenvalores para la matriz $\mathbf{A}$.

(c) Clasifique el sistema (fuente, sumidero, etcétera).

(d) Trace (lo mejor que pueda) el retrato fase. [*Sugerencia:* Use los otros eigenvalores y encuentre los otros eigenvectores.]

17. Para el sistema lineal

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$$

(a) Demuestre que $\mathbf{V}_1 = (1, 1, 0)$ es un eigenvector de la matriz de coeficientes calculando $\mathbf{AV}_1$. ¿Cuál es el eigenvalor que corresponde?

(b) Encuentre los otros dos eigenvalores para la matriz $\mathbf{A}$.

(c) Clasifique el sistema (fuente, sumidero, etcétera).

(d) Bosqueje (lo mejor que pueda) el retrato fase. [*Sugerencia:* Use los otros eigenvalores y encuentre los otros eigenvectores.]

18. Considere el sistema lineal

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{BY} = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(Que está relacionado con el sistema de Lorenz estudiado en la sección 2.5. Emplearemos los resultados obtenidos en este ejercicio cuando volvamos a las ecuaciones de Lorenz en la sección 5.5.)

(a) Encuentre el polinomio característico y los eigenvalores.

(b) Determine los eigenvectores.

(c) Dibuje el retrato fase (lo mejor que pueda).

(d) Comente cómo ayuda el "desacoplamiento" del sistema en los cálculos y en el esbozo del espacio fase.

Muchos años después, cuando Genaro finalmente se retira de escribir textos de matemáticas, decide unirse a sus amigos y antiguos colaboradores Pablo y Roberto en el negocio de los discos compactos. Él abre una tienda especializada en música New Age, localiza-

da entre las tiendas de Pablo y Roberto. En el tiempo (t), sean $z(t)$, $x(t)$ y $y(t)$ las ganancias de Genaro, Pablo y Roberto, respectivamente. Suponga que las tres tiendas se afectan entre sí en forma tal que

$$\frac{dx}{dt} = -y + z$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + z$$
$$\frac{dz}{dt} = z.$$

19. **(a)** Si Genaro tiene ganancias, ¿esto ayuda o daña a las ganancias de Pablo y Roberto?
(b) Si Pablo y Roberto están teniendo ganancias, ¿esto beneficia o perjudica las ganancias de Genaro?

20. Escriba este sistema en forma matricial y encuentre los eigenvalores. Úselos para clasificar el sistema.

21. Suponga que en el tiempo $t = 0$, tanto Pablo como Roberto están teniendo pequeñas ganancias (iguales), pero Genaro está saliendo parejo [$x(0) = y(0)$ son pequeñas y positivas, pero $z(0) = 0$].
(a) Esboce la curva solución en el espacio fase xyz.
(b) Trace las gráficas $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ de la solución.
(c) Describa cómo se comportan las ganancias de cada tienda.

22. Digamos que en el tiempo $t = 0$ tanto Pablo como Roberto están saliendo parejo y que Genaro está teniendo una pequeña ganancia [$x(0)$ y $y(0)$ son cero, pero $z(0)$ es pequeña y positiva].
(a) Esboce la curva solución en el espacio fase xyz.
(b) Trace las gráficas $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ de la solución.
(c) Describa el comportamiento de las ganancias de cada tienda.

LABORATORIO 3.1 Bifurcaciones en sistemas lineales

En el capítulo 3 hemos estudiado los procedimientos para resolver sistemas lineales. Dada la matriz de coeficientes, podemos usar esos métodos para clasificar el sistema, describir el comportamiento cualitativo de las soluciones y dar una fórmula para la solución general. En este laboratorio consideraremos una familia de dos parámetros de sistemas lineales. La meta es entender mejor cómo se relacionan entre sí los diferentes sistemas lineales; en otras palabras, qué bifurcaciones ocurren en las familias parametrizadas de los sistemas lineales.

Consideremos el sistema lineal

$$\frac{dx}{dt} = ax + by$$
$$\frac{dy}{dt} = -x - y$$

donde a y b son parámetros que pueden tomar cualquier valor real. En su reporte trate los siguientes temas:

1. Para cada valor de a y b, clasifique el sistema lineal como fuente, sumidero, centro, sumidero espiral, etc. Dibuje una gráfica del plano a-b e indique los valores de a y b para cada tipo de sistema (es decir, sombree los valores de a y b en rojo si el sistema es un sumidero, en azul si se trata de una fuente, etc.). No deje de incluir todos los cálculos necesarios para crear esta gráfica.

2. Cuando los valores de a y b cambian de manera que el punto (a, b) se mueve de una región a otra, el tipo de sistema lineal se modifica, es decir, ocurre una bifurcación. ¿Cuál de esas bifurcaciones es importante para el comportamiento a largo plazo de las soluciones? ¿Cuál de esas bifurcaciones corresponde a un cambio significativo en el plano fase o en las gráficas $x(t)$ y $y(t)$?

Sobre su reporte: Trate los incisos actuales en forma de un breve ensayo. Incluya todos los cálculos necesarios para producir la gráfica de la parte 1. Puede incluir planos fase y/o gráficas de soluciones para ilustrar su ensayo, pero su respuesta deberá estar completa y ser entendible sin las figuras.

LABORATORIO 3.2 Circuitos RLC

Ya hemos visto ejemplos de ecuaciones diferenciales que sirven como modelos de circuitos eléctricos simples que contienen un resistor, un capacitor y una fuente de voltaje. En este laboratorio consideramos circuitos ligeramente más complicados que consisten en un resistor, un capacitor, un inductor y una fuente de voltaje (vea la figura 3.66). El comportamiento del sistema puede describirse especificando la corriente que se mueve alrededor del circuito y los cambios de voltaje a través de cada uno de sus componentes. En este laboratorio seguimos un enfoque axiomático para la relación entre la corriente y los voltajes. Los lectores interesados en una mayor información sobre la obtención de esas leyes pueden consultar textos sobre teoría de los circuitos eléctricos.

En la ingeniería eléctrica tradicional, i representa la corriente que se mueve alrededor del circuito. Denotamos con v_T, v_C y v_L los voltajes a través de la fuente de voltaje,

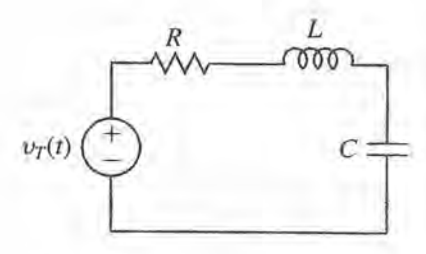


Figura 3.66
Circuito RLC.

del capacitor y del inductor, respectivamente. La resistencia se simboliza con R, con C la capacitancia y con L la inductancia de las componentes asociadas del circuito. Éstas se muestran en la figura 3.66. Consideramos v_T, R, C y L como parámetros impuestos por la persona que construye el circuito. Las cantidades i, v_C y v_L dependen del tiempo.

Será preciso tomar en cuenta las relaciones básicas siguientes entre las cantidades anteriores. Primero, la ley de Kirchhoff sobre voltajes establece que la suma de los cambios de voltaje alrededor de un lazo cerrado debe ser cero. Para nuestro circuito

$$v_T - Ri = v_C + v_L$$

A continuación necesitamos la relación entre corriente y voltaje en el capacitor e inductor. En un capacitor, la corriente es proporcional a la razón de cambio del voltaje. La constante de proporcionalidad es la capacitancia C. Por tanto, tenemos

$$C\frac{dv_C}{dt} = i$$

En un inductor, el voltaje es proporcional a la razón de cambio de la corriente. La constante de proporcionalidad es la inductancia L. Tenemos entonces

$$L\frac{di}{dt} = v_L$$

En este laboratorio consideraremos el posible comportamiento del circuito anterior para varias entradas diferentes de voltaje.

En su reporte considere las siguientes preguntas:

1. Iguale el voltaje de entrada a cero, es decir, suponga que $v_T = 0$. Emplee las tres ecuaciones anteriores para escribir un sistema de primer orden de ecuaciones diferenciales con variables dependientes i y v_C. [*Sugerencia:* Use la primera ecuación para eliminar v_L de la tercera ecuación. Debe tener R, C y L como parámetros en su sistema.]

2. Encuentre los eigenvalores del sistema resultante en términos de los parámetros R, C y L. ¿Cuáles son los planos fase posibles para su sistema, dado que R, C y L siempre son no negativos? Esboce el plano fase y las gráficas $v_C(t)$ e $i(t)$ para cada caso.

3. Convierta el sistema de primer orden de ecuaciones de la parte 1 en una ecuación diferencial de segundo orden que contenga sólo v_C (y ninguna i). (Ésta es la forma de la ecuación que encontrará en los textos sobre la teoría de los circuitos eléctricos.)

4. Repita la parte 1 suponiendo que v_T no es cero. El sistema resultante tendrá R, C, L y v_T como parámetros.

5. Las unidades usadas en las aplicaciones son voltios y amperios para voltajes y corrientes, ohmios para resistores, faradios para capacitores y henrios para inductores. Un circuito común podría tener los valores $R = 2\,000$ ohmios (o 2 kiloohmios), $C = 2 \times 10^{-7}$ faradios (o 0.2 microfaradios) y $L = 1.5$ henrios. Suponiendo una entrada $v_T = 0$, y valores iniciales de la corriente y voltaje $i(0) = 0$, $v_C(0) = 10$, describa el comportamiento de la corriente y voltaje para este circuito.

6. Repita la parte 5 usando una fuente de voltaje $v_T = 10$ voltios.

Sobre su reporte: Considere todos los incisos anteriores. Muestre el álgebra que utilice y justifique todos los pasos. En las partes 5 y 6 puede trabajar analítica o numéricamente. Dé los planos fase y las gráficas de las soluciones según sea apropiado.

LABORATORIO 3.3 Medición de la masa en el espacio

Los efectos sobre el cuerpo humano de una prolongada ingravidez durante vuelos espaciales no están completamente entendidos. Una variable importante que debe monitorearse es el "peso" del astronauta. Sin embargo, el peso se refiere a la fuerza de la gravedad sobre un cuerpo. Lo que en realidad debe medirse es la masa del cuerpo. Para efectuar esta medición se usa un sistema masa-resorte, donde la masa es el cuerpo del astronauta. El astronauta se sienta en una silla especial unida a resortes. Después se mide la frecuencia de la oscilación del astronauta en la silla y de ahí se calcula la masa.*

En su reporte considere los temas siguientes:

1. Considere que la silla tiene una masa de 20 kg. El sistema se calibra inicialmente colocando una masa conocida en la silla y midiendo el periodo de las oscilaciones. Suponga que una masa de 25 kg sobre la silla conduce a una oscilación de 1.3 segundos por oscilación. Creemos que el coeficiente de amortiguamiento del aparato es muy pequeño (entonces nuestra primera suposición en que no hay amortiguamiento). ¿Cuál será el periodo de las oscilaciones de un astronauta con masa de 60 kg? ¿Cuál sería el de usted?

2. ¿Importa si la calibración se hace en la Tierra o en el espacio? (Sería mejor realizarla en la Tierra ya que es muy caro lanzar al espacio masas de 25 kg.)

3. Suponga que se comete un error durante la calibración y que la frecuencia real resultante cuando se coloca una masa de 25 kg en la silla es de 1.31 segundos en vez de 1.3 segundos. ¿Qué error resulta al medir la masa del astronauta de 60 kg? ¿Con masa de 80 kg?

4. Suponga que se genera una pequeña cantidad de amortiguamiento en la silla. ¿Qué tanto afecta esto a las mediciones? ¿Cómo determinaría usted si existe algún amortiguamiento (es decir, qué mediciones efectuaría durante la fase de calibración)?

* Esta información proviene de la columna "Q & A" del *New York Times*, Sección sobre ciencia, 1 de agosto de 1995, p. C6.

Sobre su reporte: En su reporte considere cada uno de los incisos anteriores. Muestre todos los cálculos algebraicos que efectuó y justifique todas sus afirmaciones. Si bien este laboratorio no requiere aproximaciones numéricas de las soluciones (ya que podemos resolver de manera explícita todas las ecuaciones que aparecen en él), puede incluir esbozos de las soluciones o gráficas generadas por computadora *si esto es apropiado.*

LABORATORIO 3.4 Encuentre su propio oscilador armónico

En el texto afirmamos que el oscilador armónico podría usarse como un modelo simple para muchas situaciones diferentes. Los ingredientes clave son una fuerza restauradora, que empuja hacia atrás el sistema hacia una posición de reposo y (tal vez) una fuerza de amortiguamiento.

Para este laboratorio encontrará un sistema de este tipo. Puede ser mecánico, biológico, psicológico, político, financiero o de cualquier otra clase. Usted tendrá que efectuar algunos análisis en su sistema, por lo que necesita obtener algunos datos sobre su "movimiento". Podrá registrar los datos o usar los que estén publicados (con referencias apropiadas).

En su reporte considere los temas siguientes:

1. En un corto ensayo, describa cuidadosamente el sistema que se propone modelar con una ecuación de un oscilador armónico. Establezca la variable dependiente y describa la posición de reposo, la fuerza restauradora y el amortiguamiento.
2. Reúna los datos sobre el comportamiento de su sistema, observándolo o consultando publicaciones al respecto (indique las referencias).
3. Use sus datos para estimar los valores de los parámetros apropiados para su sistema. Clasifíquelo (sobreamortiguado, críticamente amortiguado o subamortiguado). Compare las soluciones de la ecuación del oscilador armónico con los datos que haya recopilado. Describa qué tan bien concuerdan las soluciones del modelo con los datos y analice cualquier discrepancia.

Sobre su reporte: Comente acerca de cada uno de los tres incisos anteriores en forma de un pequeño ensayo. En la parte 2 describa cómo obtuvo sus datos (citando las referencias apropiadas o dando detalles de su procedimiento experimental). En la parte 3 mencione cualquier problema que haya surgido al usar el oscilador armónico como modelo. (Si sus datos difieren considerablemente de sus soluciones, trate de ajustar los valores de los parámetros que está usando o busque otra situación que sea mejor modelada por las ecuaciones del oscilador armónico.)

LABORATORIO 3.5 Un biberón como oscilador armónico

Si usted llevó a cabo el experimento del laboratorio anterior, habrá visto sin duda que los osciladores armónicos están en todas partes. Ahora veremos un oscilador armónico que uno de los autores descubrió en una ocasión, muy tarde por la noche.

Considere un tubo en forma de U parcialmente lleno con un fluido. (Por ejemplo, un biberón de diseño común tiene la forma mostrada en la figura 3.67.)

Si se mantiene vertical, el nivel del fluido estará en reposo a una altura igual en ambos lados de la botella. Si inclinamos rápidamente el biberón hacia un lado, y luego lo en-

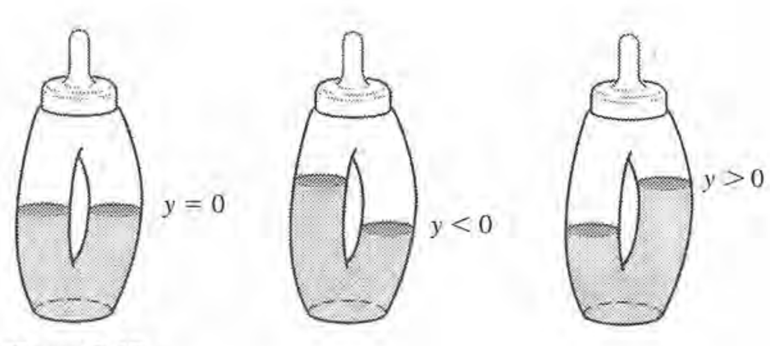


Figura 3.67
Biberón en forma de U.

derezamos, habrá más fluido en un lado que en el otro. La gravedad actuando sobre este fluido adicional proporcionará una fuerza restauradora, empujando al sistema de regreso hacia la posición de reposo, donde ambos lados están al mismo nivel.

En su reporte tome en cuenta:

1. Sea $y(t)$ la altura del fluido a un lado de la botella y $y = 0$ corresponde a la posición de reposo. Suponga que la fuerza restauradora es proporcional a la diferencia entre la masa en los lados izquierdo y derecho del biberón, y también, como primera aproximación, que la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad. Con esta información, obtenga una ecuación diferencial que modele el sistema basado en la ecuación del oscilador armónico.

2. Compre o pida prestado un biberón y obsérvelo. Estime el periodo natural de las oscilaciones y la razón de declinación de la amplitud de las oscilaciones. Use las observaciones para estimar los valores de los parámetros para la ecuación del oscilador armónico.

3. Compare las soluciones de la ecuación del oscilador armónico en la parte 2 con sus observaciones. En particular, si usted incrementa la masa total en la botella pero deja el tamaño del desplazamiento inicial sin cambio, ¿predice correctamente el modelo el cambio de comportamiento del fluido en el biberón? Por ejemplo, ¿crece o decrece el periodo natural en esta situación?

Sobre su reporte: Haga sus observaciones de cada uno de los tres incisos anteriores en forma de un corto ensayo. En la parte 1 describa con detalle la relación entre las fuerzas y el modelo dado por la ecuación diferencial. En la parte 2 describa los experimentos que llevó a cabo para obtener los datos así como los cálculos necesarios que efectuó con éstos para determinar los coeficientes de la ecuación del oscilador armónico. En la parte 3 analice cualquier discrepancia entre sus datos y las predicciones del modelo.

4 CONDICIÓN FORZADA Y RESONANCIA

En este capítulo consideraremos algunas ecuaciones de segundo orden y sistemas no autónomos de importancia particular, junto con los procedimientos matemáticos usados para estudiarlos. Esos ejemplos son notables porque ocurren en numerosas aplicaciones y porque las ideas matemáticas desarrolladas para enfrentarlos son muy atractivas.

Comenzaremos con un sistema llamado el oscilador armónico forzado. Este sistema modela (entre otras cosas) una masa unida a un resorte que se desliza sobre una mesa. Las únicas fuerzas incluidas en el modelo son la que restaura el resorte y el amortiguamiento. Cualquier otra que afecte el movimiento de la masa se considera como una fuerza externa. Un oscilador armónico con fuerza externa que dependa sólo del tiempo es un oscilador armónico forzado.

En las primeras cuatro secciones veremos procedimientos para solucionar las ecuaciones especiales del oscilador armónico para funciones típicas de forzamiento, y empleándolas como guía analizaremos el fenómeno de la resonancia. En la sección final revisaremos los modelos recientes que explican el colapso del puente del Estrecho de Tacoma (vea la cubierta de este libro).

4.1 OSCILADORES ARMÓNICOS FORZADOS

En las secciones 2.1 y 2.3 presentamos la ecuación del oscilador armónico como un modelo para un sistema físico de una masa unida a un resorte deslizante sobre una mesa. La masa está sometida a dos fuerzas, la restauradora proporcionada por el resorte y la de amortiguamiento. Se supone que la fuerza restauradora es proporcional al desplazamiento y que el amortiguamiento es proporcional a la velocidad. Las constantes de proporcionalidad son parámetros llamados la constante de resorte y el coeficiente de amortiguamiento. Obtenemos una ecuación de segundo orden, lineal, de coeficientes constantes. En la sección 3.6 usamos los procedimientos del estudio de los sistemas lineales para clasificar los comportamientos posibles de las soluciones de la ecuación del oscilador armónico. Además, describimos un método eficiente para generar la solución general de esas ecuaciones.

En este capítulo consideraremos el efecto de "fuerzas externas", es decir, fuerzas aparte de la restauradora y de la de amortiguamiento. Y que pueden incluir la que hace vibrar a la mesa o la que empuja a la masa.

Otro dispositivo que puede modelarse de manera muy informal usando el sistema del oscilador armónico es el movimiento de una copa de cristal después de ser tocada suavemente con un tenedor. La variable de posición y mide la cantidad de deformación en la capa con respecto a su posición de reposo. La fuerza restauradora empuja de regreso a la copa a su forma original. Después de que se toca con tenedor, el sonido que se genera es causado por las oscilaciones de la copa alrededor de la posición de reposo, por lo que éste es un oscilador subamortiguado. La frecuencia del sonido en este caso coincide con la frecuencia natural de las oscilaciones de la copa. Como ejemplo de una fuerza externa, imaginemos un cantante de ópera cerca de la copa, que canta una nota específica. Las ondas de sonido empujan contra la copa y la deforman ligeramente. El tamaño y dirección de esta fuerza externa dependen sólo del tiempo.

En las primeras cuatro secciones de este capítulo consideraremos cómo las fuerzas externas afectan al movimiento de un oscilador armónico. En particular, ¿cómo es que un cantante de ópera rompe la copa emitiendo una nota específica?

Una ecuación para el oscilador armónico forzado

Recuerde que las ecuaciones para el oscilador armónico provienen de la segunda ley de Newton

$$\text{masa} \times \text{aceleración} = \text{fuerza},$$

aplicada al movimiento de una masa unida a un resorte, deslizándose sobre una mesa. Denotamos con $y(t)$ la posición de la masa m en el tiempo t y con $y = 0$ la posición de reposo. Las fuerzas sobre la masa son la fuerza del resorte $-ky$ y el amortiguamiento $-b(dy/dt)$. Al sustituirlas en la ley de Newton se obtiene

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - b\frac{dy}{dt},$$

que suele escribirse como

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m}y = 0.$$

Los parámetros son $m > 0$, $k > 0$ y $b \geq 0$.

Para incluir una fuerza externa debemos agregar otro término, el de forzamiento, al lado derecho de la ecuación. Éste puede ser cualquier función. Consideraremos que el forzamiento externo depende sólo del tiempo, y estará dado por una función $f(t)$. Algunos ejemplos comunes de funciones de forzamiento incluyen a las funciones constantes (para una fuerza que empuja con intensidad constante contra la masa) y $f(t) = e^{-at}$ (para una fuerza cuya intensidad decrece en forma exponencial con el tiempo). Un ejemplo importante es $f(t) = \operatorname{sen} \omega t$ o $\cos \omega t$, llamado forzamiento senoidal con periodo $2\pi/\omega$ (o frecuencia $\omega/(2\pi)$). Esto corresponde a una fuerza que alternadamente empuja y jala a la masa hacia atrás y hacia adelante con cierta periodicidad (como las ondas acústicas empujando contra un vaso).

La nueva ecuación es

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - b\frac{dy}{dt} + f(t),$$

que suele escribirse como

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m}y = \frac{f(t)}{m}.$$

Si $p = b/m$, $q = k/m$ y $g(t) = f(t)/m$, entonces tenemos

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = g(t).$$

Ésta es una ecuación lineal de segundo orden, de coeficientes constantes, **no homogénea** y no autónoma. El nuevo adjetivo *no homogénea* se refiere al hecho de que el lado derecho de la ecuación no es cero. También nos referimos a este sistema, de manera abreviada, como **oscilador armónico forzado** o **ecuación forzada.** Con frecuencia abusamos un poco de la terminología y llamamos a $g(t)$ la función de forzamiento. La ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0$$

se llama la ecuación correspondiente **homogénea** o **no forzada**.

Nuestra meta para la ecuación del oscilador armónico forzado es la misma que para la del oscilador armónico. Con los parámetros p y q y la función de forzamiento $g(t)$, describiremos el movimiento de la masa, produciremos gráficas de las soluciones y, de ser posible, obtendremos las fórmulas para las soluciones. En esta sección ejemplificaremos un método para encontrar las soluciones explícitas del sistema del oscilador armónico forzado para tipos especiales de funciones de forzamiento.

El que se emplea aquí es un método de "conjetura afortunada" con el impresionante nombre de *método de los coeficientes indeterminados.* Además, existe otro alternativo, y algo más sistemático, el método de las transformadas de Laplace, que veremos en el capítulo 6. De nuevo debemos recalcar que con ecuaciones no lineales no existe un método que dé la solución general para funciones de forzamiento arbitrarias. Las ecuaciones que podemos resolver explícitamente son casos especiales. El objetivo de esta sección es obtener la solución general para unos cuantos casos especiales y estudiar el comportamiento de sus soluciones.

El principio de linealidad ampliado

Para encontrar la solución general de una ecuación de la forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = g(t),$$

aprovechamos el hecho de que ya sabemos cómo hallar la solución general de la ecuación homogénea de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0.$$

Podríamos convertirla en un sistema de primer orden y encontrar la solución general calculando los eigenvalores y eigenvectores. Sin embargo, en la sección 3.6 señalamos que los eigenvalores y la solución general pueden obtenerse rápidamente por medio de un método de conjetura y prueba, de modo que lo usaremos a lo largo de este capítulo.

La clave para calcular la solución general de una ecuación del oscilador armónico forzado es una extensión del principio de linealidad del capítulo 3.

PRINCIPIO DE LINEALIDAD AMPLIADO Consideremos una ecuación no homogénea (una ecuación forzada o con término de forzamiento)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = g(t)$$

y su ecuación homogénea correspondiente (la ecuación no forzada)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0.$$

1. Supongamos que $y_p(t)$ es una solución particular de la ecuación no homogénea y $y_h(t)$ es una solución de la ecuación homogénea correspondiente. Entonces $y_h(t) + y_p(t)$ es también una solución de la ecuación no homogénea.
2. Supongamos que $y_p(t)$ y $y_q(t)$ son dos soluciones de la ecuación no homogénea. Entonces $y_p(t) - y_q(t)$ es una solución de la ecuación homogénea correspondiente.

Por tanto, si $k_1y_1(t) + k_2y_2(t)$ es la solución general de la ecuación homogénea, entonces

$$k_1y_1(t) + k_2y_2(t) + y_p(t)$$

es la solución general de la ecuación no homogénea. ■

Podemos comprobar este teorema al sustituir las funciones dadas en la ecuación no homogénea. Para verificar la primera afirmación, sustituimos $y_h(t) + y_p(t)$ en la ecuación no homogénea y obtenemos

$$\frac{d^2}{dt}(y_h + y_p) + p\frac{d}{dt}(y_h + y_p) + q(y_h + y_p)$$
$$= \left(\frac{d^2y_h}{dt} + \frac{d^2y_p}{dt}\right) + p\left(\frac{dy_h}{dt} + \frac{dy_p}{dt}\right) + q\left(y_h + y_p\right)$$

$$= \left(\frac{d^2 y_h}{dt} + p\frac{dy_h}{dt} + q y_h \right) + \left(\frac{d^2 y_p}{dt} + p\frac{dy_p}{dt} + q y_p \right)$$

$$= 0 + g(t) = g(t),$$

por lo que $y_h(t) + y_p(t)$ es una solución de la ecuación no homogénea.

Para la segunda afirmación, calculamos

$$\frac{d^2}{dt}(y_p - y_q) + p\frac{d}{dt}(y_p - y_q) + q(y_p - y_q)$$

$$= \left(\frac{d^2 y_p}{dt} - \frac{d^2 y_q}{dt} \right) + p\left(\frac{dy_p}{dt} - \frac{dy_q}{dt} \right) + q\,(y_p - y_q)$$

$$= \left(\frac{d^2 y_p}{dt} + p\frac{dy_p}{dt} + q y_p \right) - \left(\frac{d^2 y_q}{dt} + p\frac{dy_q}{dt} + q y_q \right)$$

$$= g(t) - g(t) = 0,$$

por lo que $y_p(t) - y_q(t)$ es una solución de la ecuación homogénea.

Si $k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)$ es la solución general de la ecuación homogénea, entonces la primera parte del principio de linealidad ampliado dice que

$$k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t) + y_p(t)$$

es una solución de la ecuación no homogénea para *cualquier* selección de las constantes k_1 y k_2. La segunda parte del principio de linealidad ampliado dice que *cualquier* solución $y_q(t)$ de la ecuación no homogénea puede escribirse como

$$k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t) + y_p(t)$$

para alguna selección de k_1 y k_2. Por tanto,

$$k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t) + y_p(t)$$

es la solución general de la ecuación no homogénea.

El principio de linealidad ampliado nos da un algoritmo para encontrar la solución general de ecuaciones para osciladores armónicos forzados:

Paso 1 Encuentre la solución general de la ecuación correspondiente de segundo orden no forzada (homogénea).

Paso 2 Encuentre *una* solución particular de la ecuación forzada (no homogénea).

Paso 3 Sume los resultados de los pasos 1 y 2 para obtener la solución general de la ecuación forzada.

Implicaciones cualitativas del principio de linealidad ampliado

El principio de linealidad ampliado nos da una poderosa herramienta para entender el comportamiento cualitativo de las soluciones de las ecuaciones del oscilador armónico *amortiguado* forzado. Para ver esto, recordamos primero que los coeficientes p y q en

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0$$

satisfacen las desigualdades $q > 0$ y $p \geq 0$. Siempre que se tiene amortiguamiento (como en cualquier dispositivo físico mecánico), el coeficiente p de amortiguamiento es positivo y el punto de equilibrio en el origen del sistema correspondiente es un sumidero (vea la sección 3.6). En consecuencia, toda solución de la ecuación no forzada tiende a cero.

Al agregar una fuerza externa $g(t)$, el principio de linealidad ampliado implica que la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = g(t)$$

tiene la solución general

$$k_1y_1(t) + k_2y_2(t) + y_p(t),$$

donde $k_1y_1(t) + k_2y_2(t)$ es la solución general de la ecuación no forzada y $y_p(t)$ es una solución de la ecuación forzada. Pero sabemos que $k_1y_1(t) + k_2y_2(t)$ tiende a cero. Por tanto, para t grandes debemos tener

$$k_1y_1(t) + k_2y_2(t) + y_p(t) \approx y_p(t).$$

Es decir, para t grandes, *todas* las soluciones de la ecuación del oscilador armónico forzado con amortiguamiento ($p > 0$) son aproximadamente las mismas. En la figura 4.1 se muestra un esquema de esta solución. En otras palabras, las condiciones iniciales no tienen ningún efecto sobre el comportamiento a largo plazo de las soluciones.

Solución de estado permanente

En el análisis anterior, cualquier solución puede jugar el papel de $y_p(t)$. En aplicaciones ingenieriles $y_p(t)$ suele llamarse la **respuesta forzada**. El término **respuesta de estado permanente** se usa para describir el comportamiento de la respuesta forzada para t grandes. (La frase "estado permanente" es algo inapropiado ya que $y_p(t)$ no tiene que ser constante.)

Una solución del oscilador armónico no forzado (con cualesquier condiciones iniciales) se llama **respuesta natural** o *respuesta libre*. El análisis anterior puede reformularse con la frase: "Todas las soluciones de un oscilador armónico amortiguado forzado tienden a la solución de estado permanente porque la respuesta natural se muere, dejando sólo la respuesta forzada."

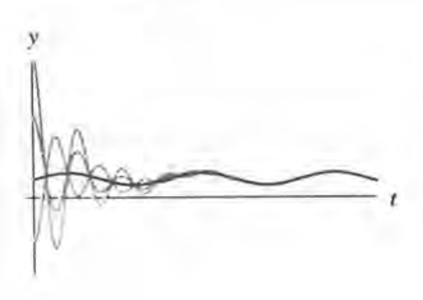


Figura 4.1
Gráficas típicas de soluciones de una ecuación del oscilador armónico forzado con amortiguamiento no nulo ($p > 0$). La solución $y_p(t)$ se muestra en línea más oscura.

Un ejemplo del método de los coeficientes indeterminados

Considere la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = e^{-t}.$$

Para encontrar la solución general, seguimos el procedimiento sugerido por el principio de linealidad ampliado. El primer paso es determinar la solución general de la ecuación no forzada (homogénea)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0.$$

Usando los métodos de la sección 3.6, los eigenvalores son -2 y -3. Éste es un sistema sobreamortiguado y la solución general es

$$y_h(t) = k_1e^{-2t} + k_2e^{-3t}.$$

El segundo paso es hallar una solución $y_p(t)$ de la ecuación forzada (no homogénea)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = e^{-t}.$$

El método que usamos es una leve variación del de conjetura y prueba. Como tenemos el término e^{-t} en el lado derecho de la ecuación, una primera suposición es $y_p(t) = e^{-t}$. Sustituyendo esta conjetura en el lado izquierdo, obtenemos

$$\frac{d^2y_p}{dt^2} + 5\frac{dy_p}{dt} + 6y_p = e^{-t} - 5e^{-t} + 6e^{-t} = 2e^{-t},$$

que no iguala el lado derecho de la ecuación forzada.

Por lo tanto, nuestra conjetura e^{-t} no es una solución. Sin embargo, falla sólo por una constante. Es razonable esperar que un múltiplo constante de e^{-t} sea una solución, pero la selección correcta de la constante no es clara. Evitamos el tema de momento y mejoramos nuestra conjetura para $y_p(t) = ke^{-t}$, donde k es una constante desconocida (o un "coeficiente indeterminado"). Esperamos que escogiendo el valor correcto para k podamos hacer a $y_p(t)$ una solución.

Al sustituir ke^{-t} en el lado izquierdo de la ecuación diferencial, tenemos

$$\frac{d^2y_p}{dt^2} + 5\frac{dy_p}{dt} + 6y_p = ke^{-t} - 5ke^{-t} + 6ke^{-t} = 2ke^{-t}.$$

Para que $y_p(t)$ sea una solución, debemos elegir $k = 1/2$. Por consiguiente, $y_p(t) = e^{-t}/2$ es una solución de la ecuación forzada.

La solución general de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = e^{-t}$$

es entonces la suma de la solución general de la ecuación no forzada más una solución particular de la ecuación forzada. Entonces la solución general es

$$y(t) = k_1e^{-2t} + k_2e^{-3t} + \frac{e^{-t}}{2}.$$

En la figura 4.2 se muestran varias soluciones con condiciones iniciales diferentes. Como se predijo, todas tienden a $y_p(t) = e^{-t}/2$ cuando t se incrementa.

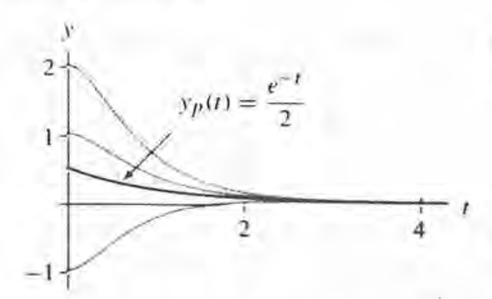


Figura 4.2
Varias soluciones de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = e^{-t}.$$

Observe que todas las gráficas son asintóticas a $y_p(t) = e^{-t}/2$ cuando t crece.

El método de los coeficientes indeterminados

La obtención de la solución de la ecuación no forzada se analizó en la sección 3.6. Entonces, lo que es nuevo en el ejemplo que terminamos es el procedimiento usado para encontrar una solución particular de la ecuación forzada. Usamos un método de conjetura afortunada. Sin embargo, no dejamos todo a la suerte. El hecho de que la solución contenga un término de la forma e^{-t} no es tan sorprendente, ya que esta expresión forma el lado derecho de la ecuación. Por tanto, hicimos una conjetura inteligente de que la solución particular toma la forma $y_p(t) = ke^{-t}$ y luego determinamos el valor específico de k que convirtió a $y_p(t)$ en una solución.

Este "método" para encontrar soluciones particulares de la ecuación del oscilador armónico forzado es similar, en esencia, a nuestro método de conjetura y prueba para ecuaciones homogéneas de segundo orden. Puede resumirse en dos pasos. Primero, haga una conjetura razonable para una solución, pero deje algunos coeficientes indeterminados. Luego sustitúyala en la ecuación diferencial y encuentre los valores de los coeficientes que hacen de la conjetura una solución. Denominamos a éste el **método de los coeficientes indeterminados.**

Segunda conjetura

Siempre que usamos el método de conjetura y prueba, corremos el riesgo de que nuestra primera suposición no sea una solución (no importa qué tan razonable sea). Aun cuando determinemos al final los coeficientes, tal vez esto no sea suficiente para obtener una solución. En esta situación sólo queda volver a conjeturar. ("Si a la primera no tiene usted éxito . . .")

Considere la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = e^{-2t}.$$

Esta ecuación difiere de la del ejemplo previo sólo en la función de forzamiento. La solución general de la ecuación no forzada es aún

$$y_h(t) = k_1e^{-2t} + k_2e^{-3t}.$$

Para encontrar una solución particular de la ecuación forzada, nuestra conjetura razonable es $y_p(t) = ke^{-2t}$, con k como el coeficiente indeterminado. Sustituyéndola en el lado izquierdo de la ecuación forzada obtenemos

$$\frac{d^2y_p}{dt^2} + 5\frac{dy_p}{dt} + 6y_p = 4ke^{-2t} - 10ke^{-2t} + 6ke^{-2t} = 0.$$

Este resultado es muy frustrante. No importa qué valor escojamos para k, al sustituir $y_p(t)$ en el lado izquierdo de la ecuación forzada obtenemos cero. Por tanto, no hay ninguna solución particular de la forma $y_p(t) = ke^{-2t}$.

Selección de una segunda conjetura

El problema con nuestra primera conjetura es que para toda k, $y_p(t) = ke^{-2t}$ es una solución de la ecuación no forzada. Cuando sustituimos $y_p(t)$ en el lado izquierdo de la ecuación diferencial, tenemos la certeza de que obtendremos cero. Por otra parte, cualquier conjetura para $y_p(t)$ debe contener e^{-2t} como un factor para que sea posible obtener e^{-2t} en el lado derecho.

Encontramos esta misma situación cuando analizamos las raíces repetidas de la ecuación característica (vea la sección 3.6). Ahí vimos que una segunda conjetura no tan obvia era kte^{-2t}. Para saber si aquí aplica también esta suposición, usamos un método numérico para encontrar una solución aproximada $y(t)$ del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = e^{-2t}, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = -2.$$

y comparamos el resultado con e^{-2t}. [Observe que escogemos las mismas condiciones iniciales para $y(t)$ que para e^{-2t}. Es decir, en $t = 0$, $e^{-2t} = 1$ y $d(e^{-2t})/dt = -2$.] En la figura 4.3 graficamos la solución $y(t)$ y e^{-2t}. Note que las gráficas de esas dos funciones son difíciles de distinguir. Un examen más cuidadoso muestra que la gráfica de la solución $y(t)$ permanece un poco arriba de la gráfica de e^{-2t}. Como esperamos que e^{-2t} aparezca como factor en $y(t)$, tiene sentido graficar la razón $y(t)/e^{-2t}$ (vea la figura 4.4). Después de un periodo inicial, la razón parece seguir una línea recta. Es decir, para t grandes, la solución parece ser aproximadamente kte^{-2t}.

Basándonos en este experimento numérico, escogemos $y_p(t) = kte^{-2t}$ como nuestra segunda conjetura, donde k es el coeficiente indeterminado. Al sustituir $y_p(t)$ en el lado izquierdo de la ecuación forzada obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d^2y_p}{dt^2} + 5\frac{dy_p}{dt} + 6y_p &= \frac{d^2(kte^{-2t})}{dt} + 5\frac{d(kte^{-2t})}{dt} + 6kte^{-2t} \\ &= 4kte^{-2t} - 4ke^{-2t} + 5(-2kte^{-2t} + ke^{-2t}) + 6kte^{-2t} \\ &= ke^{-2t}\end{aligned}$$

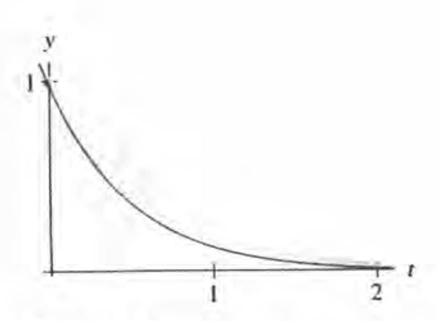


Figura 4.3
Solución de $d^2y/dt^2 + 5dy/dt + 6y = e^{-2t}$ con condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$, gráficas con la función e^{-2t}.

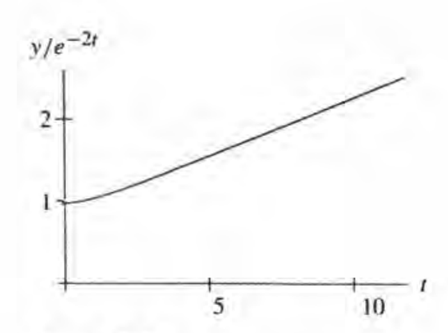


Figura 4.4
Razón y/e^{-2t} de las dos gráficas en la figura 4.3.

Por consiguiente, si escogemos $k = 1$, la función $y_p(t) = te^{-2t}$ es una solución de la ecuación con forzamiento. La solución general es entonces

$$y(t) = k_1e^{-2t} + k_2e^{-3t} + te^{-2t}.$$

La figura 4.5 muestra varias soluciones de la ecuación con forzamiento y condiciones iniciales diferentes. Todas las soluciones tienden a $y_p(t) = te^{-2t}$ (que tiende al eje t) como se predijo.

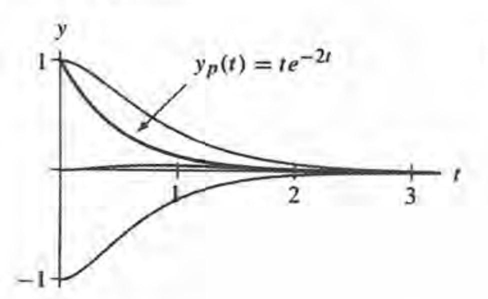


Figura 4.5
Varias soluciones de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = e^{-2t}.$$

Regla empírica para una segunda conjetura

La motivación descrita arriba es un buen ejemplo de lo poco satisfactorio que son los métodos de conjetura afortunada. Si bien la evidencia numérica para multiplicar la primera conjetura por t es muy convincente, se requiere un ojo agudo para encontrarla. En el capítulo 6 veremos otros procedimientos para proponer esta segunda conjetura.

Resulta que para las ecuaciones lineales de cualquier orden, los dos ejemplos que hemos analizado dan una regla empírica general para encontrar soluciones particulares. La forma de la conjetura depende del lado derecho de la ecuación (la función de forzamiento). Si la primera que se plantea no proporciona una solución particular (algo que ocurre cuando el lado derecho es una solución de la ecuación homogénea), intentamos una segunda conjetura multiplicando la primera por t.

Un ejemplo de la teoría de los circuitos eléctricos

Presentamos un ejemplo de una ecuación de segundo orden no homogénea, típica de la teoría de los circuitos eléctricos (con números de la práctica pero algo incómodos). Consideremos el circuito resistor-inductor-capacitor (RLC) mostrado en la figura 4.6. Suponga que el voltaje en la fuente es $V_S(t) = 2e^{-t/3}$ voltios en el tiempo t; es decir, la resistencia de la fuente de voltaje decae según una razón exponencial.

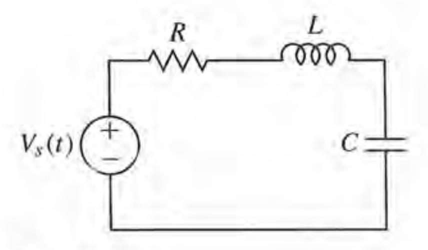


Figura 4.6
Circuito RLC por modelarse.

Suponga que $R = 4\text{k}\Omega = 4\,000\Omega$, $C = 0.25\mu\text{F} = 0.25 \times 10^{-6}\text{F}$ y $L = 1.6\text{H}$ (donde Ω, F y H son las unidades estándar en la teoría de los circuitos eléctricos, ohmios, faradios y henrios). El voltaje $v(t)$ a través del capacitor es una solución de la ecuación de segundo orden

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + RC\frac{dv}{dt} + v = V_S(t).$$

Con los valores proporcionados, tenemos

$$0.4 \times 10^{-6}\frac{d^2v}{dt^2} + 10^{-3}\frac{dv}{dt} + v = 2e^{-t/3}.$$

Podemos transformar esta ecuación en una forma más familiar multiplicando toda la ecuación por 2.5×10^6 para obtener

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2500\frac{dv}{dt} + 2.5 \times 10^6 v = 5 \times 10^6 e^{-t/3}.$$

Esos números, aunque se escogieron de manera arbitraria, son reales para las unidades de medida estándar en circuitos eléctricos. Para encontrar la solución general seguimos el procedimiento anterior. Primero determinamos la solución general de la ecuación homogénea. Luego calculamos una solución particular de la ecuación no homogénea.

Comenzamos calculando la solución general de

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2500\frac{dv}{dt} + 2.5 \times 10^6 v = 0.$$

Los eigenvalores son $(-1.25 \pm i\sqrt{0.9375}) \times 10^3$. Usando la aproximación 0.968 para $\sqrt{0.9375}$, la solución general es

$$v(t) = k_1 e^{-1250t}\operatorname{sen}(968t) + k_2 e^{-1250t}\cos(968t),$$

donde k_1 y k_2 son constantes. (Note que la solución decae increíblemente rápido a cero, pero también oscila muy rápido.)

Ahora, para encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2500\frac{dv}{dt} + 2.5 \times 10^6 v = 5 \times 10^6 e^{-t/3},$$

conjeturamos que $v_p(t) = ke^{-t/3}$, donde k es el coeficiente indeterminado. Para encontrar el valor apropiado de k, sustituimos la conjetura en la ecuación diferencial. El lado izquierdo es

$$\begin{aligned}\frac{d^2v_p}{dt} + 2500\frac{dv_p}{dt} + 2.5 \times 10^6 v_p &= \frac{d^2(ke^{-t/3})}{dt} + 2500\frac{d(ke^{-t/3})}{dt} + 2.5 \times 10^6 ke^{-t/3}\\ &= \frac{k}{9}e^{-t/3} - 2500\frac{k}{3}e^{-t/3} + 2.5 \times 10^6 ke^{-t/3}\\ &= \left(\frac{1}{9} - \frac{2500}{3} + 2.5 \times 10^6\right) ke^{-t/3}.\end{aligned}$$

A continuación igualamos este lado izquierdo con el lado derecho de la ecuación no homogénea, cuyo valor es $5 \times 10^6 e^{-t/3}$. Cancelando el término $e^{-t/3}$ y despejando k, vemos que $k \approx 2$. Nuestra solución particular (aproximada) es $v_p(t) = 2e^{-t/3}$.

Ahora podemos determinar la solución general

$$v(t) = k_1 e^{-1250t} \operatorname{sen}(968t) + k_2 e^{-1250t} \cos(968t) + 2e^{-t/3},$$

donde k_1 y k_2 son constantes que ajustamos de acuerdo con las condiciones iniciales. Los primeros dos términos de la solución general oscilan y decrecen muy rápidamente a cero. Por tanto, para t grandes, toda solución es cercana a la solución particular. La gráfica de la solución que satisface la condición inicial $(v(0), v'(0)) = (1, 0)$ se muestra en la figura 4.7. Para ver las oscilaciones, debemos fijar nuestra atención muy cerca de $t = 0$ (vea la figura 4.8). En el lenguaje de la teoría de los circuitos, decimos que la respuesta natural (la solución de la ecuación homogénea) decae en seguida y que toda solución tiende a la respuesta forzada que es $2e^{-t/3}$.

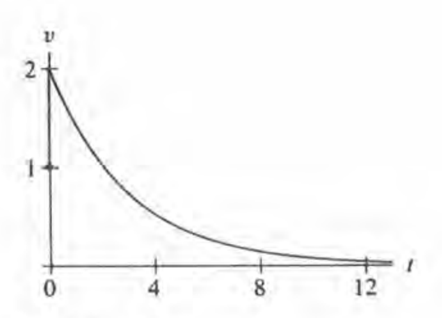


Figura 4.7
Solución de

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2500\frac{dv}{dt} + 2.5 \times 10^6 = 5 \times 10^6 e^{-t/3}$$

con condición inicial $v(0) = 1$, $v'(0) = 0$.

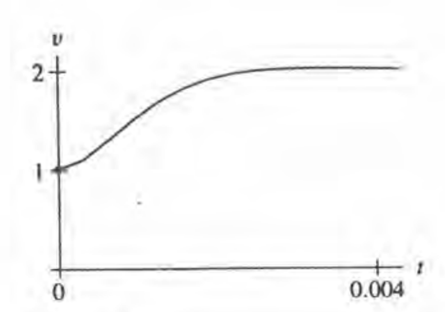


Figura 4.8
Gráfica de la solución de la figura 4.7. Aquí la mostramos sólo para valores de t que están muy cercanos a 0; el objetivo es ilustrar el rápido crecimiento desde el valor inicial $v(0) = 1$.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 4.1

En los ejercicios 1-6, encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada.

1. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 6\dfrac{dy}{dt} + 8y = e^{-t}$

2. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 6\dfrac{dy}{dt} + 8y = 2e^{-3t}$

3. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 7\dfrac{dy}{dt} + 12y = 3e^{-2t}$

4. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 13y = e^{-t}$

5. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 13y = -3e^{-2t}$

6. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 7\dfrac{dy}{dt} + 10y = e^{-2t}$

En los ejercicios 7-10, encuentre la solución del problema de valor inicial dado.

7. $\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 8y = e^{-t}$,
$y(0) = y'(0) = 0$

8. $\frac{d^2y}{dt^2} + 7\frac{dy}{dt} + 12y = 3e^{-t}$,
$y(0) = 2,\ y'(0) = 1$

9. $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 13y = -3e^{-2t}$,
$y(0) = y'(0) = 0$

10. $\frac{d^2y}{dt^2} + 7\frac{dy}{dt} + 10y = e^{-2t}$,
$y(0) = y'(0) = 0$

En los ejercicios 11-16,

(a) determine la solución general,

(b) calcule la solución con $y(0) = y'(0) = 0$, y

(c) describa el comportamiento a largo plazo de las soluciones en un párrafo breve.

11. $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = e^{-t/2}$

12. $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = e^{-2t}$

13. $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = e^{-4t}$

14. $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 20y = e^{-t/2}$

15. $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 20y = e^{-2t}$

16. $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 20y = e^{-4t}$

17. Encuentre la solución general de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = e^{-t}.$$

[*Sugerencia:* Siga conjeturando.]

18. Una de las funciones de forzamiento más comunes es la de forzamiento constante. La ecuación para un oscilador armónico con forzamiento constante es

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = c,$$

donde p, q y c son constantes. Como podemos hallar la solución general de la ecuación no forzada con nuestros métodos usuales, también es posible calcular la que corresponde a la ecuación forzada si determinamos una solución particular. Encuentre esta última a partir de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = c.$$

[*Sugerencia:* Conjeture una solución que se parezca a la función de forzamiento.]

En los ejercicios 19-22, calcule

(a) la solución general y

(b) la solución con $y(0) = y'(0) = 0$.

19. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 6\dfrac{dy}{dt} + 8y = 5$

20. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = 2$

21. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + 10y = 10$

22. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 6y = -8$

El análisis cualitativo del comportamiento de las soluciones de ecuaciones para osciladores armónicos amortiguados forzados se basa en el hecho de que las soluciones de la ecuación no forzada (respuesta natural) tienden a cero cuando t crece. Si no existe amortiguamiento, entonces la respuesta natural no tiende a cero y el patrón de comportamiento de las soluciones es más complicado (vea la sección 4.3). Sin embargo, el principio de linealidad ampliado y el método de los coeficientes indeterminados se aplican a todas las ecuaciones lineales no homogéneas.

En los ejercicios 23-28,

(a) calcule la solución general,

(b) determine la solución con $y(0) = y'(0) = 0$, y

(c) haga un croquis aproximado y describa en un breve párrafo el comportamiento a largo plazo de la solución en el inciso (b).

23. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 9y = e^{-t}$

24. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = 2e^{-2t}$

25. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2y = -3$

26. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = e^{t}$

27. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 9y = 6$

28. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2y = -e^{t}$

29. Si empleamos el método de los coeficientes indeterminados para encontrar una solución particular, tenemos que plantear la conjetura razonable (hasta la multiplicación por constantes o coeficientes indeterminados). En esta sección tratamos con el forzamiento exponencial; pero si nuestra función es de otro tipo, entonces debemos ajustar la conjetura adecuadamente. Por ejemplo, para una ecuación de la forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = -3t^2 + 2t + 3,$$

la función de forzamiento es el polinomio cuadrático $g(t) = -3t^2 + 2t + 3$. Es razonable suponer que en este caso una solución particular es también un polinomio cuadrático. Por tanto, proponemos $y_p(t) = at^2 + bt + c$. Las constantes a, b y c se determinan sustituyendo $y_p(t)$ en la ecuación.

(a) Encuentre la solución general de la ecuación especificada en este ejercicio.

(b) Encuentre la solución particular con la condición inicial $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

En los ejercicios 30-33,

(a) calcule la solución general,

(b) calcule la solución con $y(0) = y'(0) = 0$, y

(c) bosqueje un croquis y describa en unas cuantas líneas el comportamiento a largo plazo de la solución en el inciso (b).

30. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} = 3t + 2$

31. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = 3t + 2$

32. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = t^2$

33. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = t - \dfrac{t^2}{20}$

34. Podemos ampliar el método de los coeficientes indeterminados para resolver ecuaciones cuyas funciones de forzamiento sean sumas de varios tipos de funciones. De manera más precisa, suponga que $y_1(t)$ es una solución de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = g(t)$$

y que $y_2(t)$ es una solución de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = h(t).$$

Demuestre que $y_1(t) + y_2(t)$ es una solución de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = g(t) + h(t).$$

En los ejercicios 35-40,

(a) calcule la solución general,

(b) calcule la solución con $y(0) = y'(0) = 0$, y

(c) describa en un párrafo pequeño el comportamiento a largo plazo de la solución en el inciso (b).

35. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = e^{-t} + 4$

36. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = e^{-t} - 4$

37. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 6\dfrac{dy}{dt} + 8y = 2t + e^{-t}$

38. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 6\dfrac{dy}{dt} + 8y = 2t + e^{t}$

39. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = t + e^{-t}$

40. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = 6 + t^2 + e^{t}$

4.2 FORZAMIENTO SENOIDAL

En esta sección estudiaremos la ecuación del oscilador armónico forzado

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = g(t),$$

donde $g(t)$ es una función seno o coseno. Este tipo de fuerza externa ocurre con frecuencia en las aplicaciones. Por ejemplo, en las vibraciones de un edificio sometido a fuerzas sísmicas y en las ondas de presión acústica que golpean una copa. Esas fuerzas comparten dos características cualitativas. En primer lugar, son periódicas; es decir, se repiten después de un tiempo T definido, llamado periodo, por lo que

$$g(t + T) = g(t)$$

para toda t. En segundo lugar, tienen un promedio cero. Para cada periodo, el empuje en una dirección es igual al tirón en la otra, lo que puede expresarse analíticamente como

$$\int_0^T g(t)\,dt = 0.$$

Las funciones más simples y familiares con esta propiedad son sen ωt y cos ωt, cuyo periodo es $\omega/(2\pi)$ y la frecuencia es $2\pi/\omega$.

En esta sección aplicaremos el método de los coeficientes indeterminados al estudio de los osciladores armónicos amortiguados con forzamiento senoidal. En la sección 4.3 consideramos el oscilador armónico no amortiguado con forzamiento senoidal y en la sección 4.4 estudiamos cómo las soluciones del oscilador armónico amortiguado con forzamiento senoidal dependen de la frecuencia de la fuerza y del parámetro de amortiguamiento.

Forzamiento senoidal de un oscilador armónico amortiguado

Para entender mejor el comportamiento de un oscilador armónico con forzamiento periódico, determinamos primero la solución general de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = \operatorname{sen} t$$

siguiendo el procedimiento indicado en la sección 4.1.

Los eigenvalores de la ecuación no forzada

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

son $-1 \pm i$. Por consiguiente, el oscilador es subamortiguado y la solución general es

$$y(t) = k_1 e^{-t}\cos t + k_2 e^{-t}\operatorname{sen} t.$$

Para hallar una solución de la ecuación forzada usamos el método de los coeficientes indeterminados. A primera vista parece que $y_p(t) = k$ sen t es una conjetura razonable. Sin embargo, debido a dy/dt, al sustituir esta conjetura en la ecuación diferencial, obtene-

mos un término que contiene cos t en el lado izquierdo. Ninguna selección de k eliminará este término, y no hay cosenos en el lado derecho de la ecuación. Podríamos hacer una conjetura más general del tipo

$$y_p(t) = a\cos t + b\,\mathrm{sen}\,t$$

con dos coeficientes indeterminados, pero es más eficiente aprovechar nuestro conocimiento de los exponenciales complejos.

Complejificación

Primero, considere la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = e^{it}.$$

Una solución particular de esta ecuación diferencial compleja, que llamamos $y_c(t)$ (el subíndice c indica complejidad), tiene una parte real y una parte imaginaria. Es decir,

$$y_c(t) = y_{\mathrm{re}}(t) + i\,y_{\mathrm{im}}(t).$$

Al sustituir $y_c(t)$ en la ecuación diferencial y al aplicar la fórmula de Euler, obtenemos

$$\frac{d^2(y_{\mathrm{re}} + i\,y_{\mathrm{im}})}{dt^2} + 2\frac{d(y_{\mathrm{re}} + i\,y_{\mathrm{im}})}{dt} + 2(y_{\mathrm{re}} + i\,y_{\mathrm{im}}) = \cos t + i\,\mathrm{sen}\,t.$$

Tomando las partes real e imaginaria en ambos lados de la ecuación, tenemos

$$\frac{d^2y_{\mathrm{re}}}{dt^2} + 2\frac{dy_{\mathrm{re}}}{dt} + 2y_{\mathrm{re}} = \cos t \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2y_{\mathrm{im}}}{dt^2} + 2\frac{dy_{\mathrm{im}}}{dt} + 2y_{\mathrm{im}} = \mathrm{sen}\,t.$$

Por consiguiente, la parte imaginaria $y_{\mathrm{im}}(t)$, es una solución particular de la ecuación original con forzamiento sen t.

La ventaja de usar exponenciales complejos es que la conjetura apropiada para la solución particular es de nuevo otra exponencial. Para

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = e^{it},$$

conjeturamos $y_c(t) = ae^{it}$ y encontramos el coeficiente (complejo) a que convierte a esta conjetura en una solución. Sustituyendo en el lado izquierdo de la ecuación diferencial, nos da

$$\begin{aligned}\frac{d^2y_c}{dt^2} + 2\frac{dy_c}{dt} + 2y_c &= -ae^{it} + 2aie^{it} + 2ae^{it}\\ &= a(1+2i)e^{it}.\end{aligned}$$

Para que $y_c(t)$ sea una solución, debemos tomar

$$a = \frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{5}$$

(vea en los apéndices un repaso de la aritmética compleja). Para determinar las partes real e imaginaria, escribimos

$$y_c(t) = \frac{1-2i}{5}(\cos t + i \operatorname{sen} t)$$
$$= \left(\frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\operatorname{sen} t\right) + i\left(-\frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\operatorname{sen} t\right).$$

Considerando la parte imaginaria, hallamos una solución particular de la ecuación original con forzamiento sen t,

$$y_p(t) = -\frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\operatorname{sen} t.$$

Por tanto, la solución general de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = \operatorname{sen} t$$

es

$$y(t) = k_1 e^{-t}\operatorname{sen} t + k_2 e^{-t}\cos t + \left(-\frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\operatorname{sen} t\right).$$

Análisis cualitativo

Para determinar el comportamiento cualitativo de las soluciones de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = \operatorname{sen} t,$$

notamos que la ecuación no forzada es un oscilador armónico subamortiguado. Como señalamos en la sección 4.1, la parte que proviene de la solución del oscilador no forzado tiende a cero (la respuesta natural), dejando sólo la solución particular del oscilador forzado (la respuesta forzada). De la solución general para esta ecuación, vemos que la respuesta natural tiende a cero como e^{-t} (vea la figura 4.9). Por consiguiente, para t grandes, toda solución es cercana a

$$y_p(t) = -\frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\operatorname{sen} t.$$

El comportamiento de $y_p(t)$ puede hacerse más evidente usando identidades trigonométricas para combinar el seno y el coseno en una función coseno (vea el ejercicio 22,

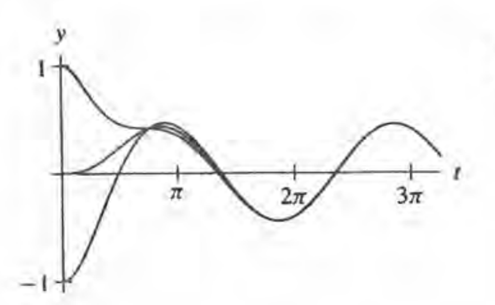


Figura 4.9
Varias soluciones de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = \operatorname{sen} t.$$

p. 280). Sin embargo, como estamos utilizando números complejos para determinar soluciones particulares, emplearemos un enfoque alternativo que implica la fórmula de Euler para combinar esos dos términos.

Consideremos la solución de la ecuación diferencial compleja $y_c(t) = ae^{it}$, donde $a = (1 - 2i)/5$. Escribimos a en su forma polar como

$$\begin{aligned} a &= |a|e^{i\theta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}e^{i\theta} \end{aligned}$$

(vea en el apéndice sobre números complejos una definición de la forma polar). En términos del ángulo θ, tenemos

$$\begin{aligned} y_c(t) &= ae^{it} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}e^{i\theta}e^{it}. \end{aligned}$$

Como sumamos exponentes cuando multiplicamos exponenciales,

$$y_c(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}e^{i(t+\theta)} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\cos(t+\theta) + i\,\text{sen}(t+\theta)).$$

Debido a que nuestra solución particular $y_p(t)$ es la parte imaginaria de $y_c(t)$, vemos que

$$y_p(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\text{sen}(t+\theta).$$

Como en este contexto es tradicional usar el coseno en vez del seno y representar el ángulo θ en términos de grados, recordamos que

$$\text{sen}\,\alpha = \cos(\alpha - 90°).$$

Entonces,

$$y_p(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\cos(t + \theta - 90°),$$

y sólo necesitamos determinar θ para completar el cálculo. Como θ es el ángulo polar asociado con el número complejo a, vemos que

$$\theta = \arctan\left(\frac{-2}{1}\right) \approx -63°.$$

Nuestra solución particular puede, por tanto, expresarse

$$y_p(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\cos(t - 153°).$$

El ángulo 153° suele denotarse por ϕ.

Esta forma de la ecuación para $y_p(t)$ es particularmente útil. Sin calcular nada, vemos que $y_p(t)$ es una función periódica con amplitud $1/\sqrt{5}$ y periodo 2π. También obser-

vamos que la gráfica de $y_p(t)$ puede obtenerse de la gráfica del coseno desplazándola hacia la derecha 153° y "alargándola" por un factor de $1/\sqrt{5}$. El ángulo ϕ se llama el **ángulo de fase.**

Es preciso señalar que el número complejo a, que es el coeficiente indeterminado en este cálculo, define tanto la amplitud como el ángulo de fase de la respuesta forzada. La amplitud es justamente la magnitud $|a|$ de a y el ángulo de fase puede calcularse enseguida a partir del ángulo polar de a. En la sección 4.4 estudiamos cómo la amplitud y el desplazamiento de fase dependen de los parámetros para un oscilador armónico forzado.

Interpretación física

Considere que el oscilador armónico modela una masa unida a un resorte que se desliza sobre una mesa con amortiguamiento y que la fuerza externa proviene de una inclinación periódica de la mesa. El resultado anterior puede resumirse diciendo que el comportamiento a largo plazo de la masa es deslizarse hacia atrás y hacia adelante con la misma frecuencia con que es inclinada la mesa. A partir de la solución particular de la ecuación forzada en la forma $A\cos(t+\phi)$ podemos conocer la amplitud A y el ángulo de fase ϕ.

El comportamiento de las soluciones en el ejemplo anterior es el patrón común a largo plazo de las soluciones de ecuaciones para osciladores armónicos amortiguados con forzamiento senoidal o cosenoidal. Todas se acercan a una solución periódica (la respuesta forzada) que oscila con el mismo periodo que el forzamiento. Es importante recordar que si bien la función de forzamiento y la respuesta forzada tienen apariencia similar, no son las mismas. La amplitud y la fase de la respuesta forzada dependen de manera complicada de los parámetros del oscilador armónico y de la frecuencia de forzamiento. Consideraremos esta dependencia con todo detalle en la sección 4.4.

El plano fase de un oscilador armónico forzado

Hasta ahora todos nuestros retratos de soluciones en este capítulo han sido de la solución como una función del tiempo. Hemos usado nuestro conocimiento de los sistemas y de las ecuaciones de segundo orden lineales y de coeficientes constantes, como ayuda para encontrar la solución general de las ecuaciones del oscilador armónico forzado, pero no hemos convertido la ecuación forzada en un sistema de primer orden.

La razón por la que no hemos hecho esta conversión es que un oscilador armónico forzado

$$\frac{d^2y}{dt^2}+p\frac{dy}{dt}+qy=g(t)$$

y su correspondiente sistema de primer orden

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}&=v\\ \frac{dv}{dt}&=-qy-pv+g(t)\end{aligned}$$

son no autónomos. El vector tangente de una curva solución en el plano fase depende de la posición (y, v) y del tiempo t, por lo que el campo vectorial cambia con el tiempo. Tomando en cuenta esta variación, dos soluciones con los mismos valores (y, v) en tiempos

diferentes pueden seguir trayectorias distintas. Las curvas solución pueden entonces cruzarse en el plano y-v sin violar el teorema de unicidad.

Aún es útil convertir la ecuación no autónoma de segundo orden a un sistema de primer orden. No hay procedimientos numéricos elementales aplicables a ecuaciones de segundo orden, pero el método de Euler (así como otros, vea el capítulo 7) es esencialmente el mismo para sistemas de primer orden autónomos y no autónomos. Además, las curvas solución en el plano y-v pueden ayudar a entender el comportamiento de las soluciones.

Con el fin de demostrar lo anterior y obtener más práctica con el método de los coeficientes indeterminados, consideremos la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 10y = 4\cos 2t.$$

Para encontrar la solución general, notamos primero que los eigenvalores de la ecuación no forzada

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 10y = 0$$

son $-1 \pm 3i$. Por consiguiente, la solución general correspondiente es

$$y(t) = k_1 e^{-t}\cos 3t + k_2 e^{-t}\,\text{sen}\,3t.$$

Si introducimos números complejos para hallar una solución particular de la ecuación forzada, obtenemos

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 10y = 4e^{2it}.$$

La conjetura usual es $y_c(t) = ae^{2it}$. Al sustituirla en el lado izquierdo de la ecuación diferencial resulta

$$\begin{aligned}\frac{d^2y_c}{dt^2} + 2\frac{dy_c}{dt} + 10y_c &= -4ae^{2it} + 4aie^{2it} + 10ae^{2it}\\ &= a(6+4i)e^{2it}\end{aligned}$$

Para que ae^{2it} sea una solución, debemos tener

$$a(6+4i) = 4.$$

Por tanto,

$$a = \frac{4}{6+4i} = \frac{4(6-4i)}{52} = \frac{6-4i}{13},$$

y entonces

$$\begin{aligned}y_c(t) &= \frac{6-4i}{13}e^{2it}\\ &= \frac{6-4i}{13}(\cos 2t + i\,\text{sen}\,2t)\\ &= \left(\frac{6}{13}\cos 2t + \frac{4}{13}\,\text{sen}\,2t\right) + i\left(-\frac{4}{13}\cos 2t + \frac{6}{13}\,\text{sen}\,2t\right)\end{aligned}$$

Una solución particular $y_p(t)$ de la ecuación original con forzamiento 3 cos $2t$ es la parte real de $y_c(t)$, que es

$$y_p(t) = \frac{6}{13}\cos 2t + \frac{4}{13}\operatorname{sen} 2t.$$

Por consiguiente, la solución general de la ecuación forzada

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 10y = 4\cos 2t$$

es

$$y(t) = k_1 e^{-t}\cos 3t + k_2 e^{-t}\operatorname{sen} 3t + \frac{6}{13}\cos 2t + \frac{4}{13}\operatorname{sen} 2t,$$

que puede escribirse como

$$y(t) = k_1 e^{-t}\cos 3t + k_2 e^{-t}\operatorname{sen} 3t + \frac{2\sqrt{13}}{13}\cos(2t + \phi),$$

donde el desplazamiento de fase $\phi \approx -34°$.

Análisis cualitativo: gráficas de soluciones

Sabemos que para cualquier selección de condiciones iniciales, el término

$$k_1 e^{-t}\cos 3t + k_2 e^{-t}\operatorname{sen} 3t$$

en la solución general tiende muy rápido a cero. Por tanto, toda solución es aproximadamente

$$\frac{2\sqrt{13}}{13}\cos(2t - 34°)$$

para t grandes. Esta función es periódica en t con periodo π y amplitud $2\sqrt{13}/13 \approx 0.55$.

Si reescribimos la ecuación forzada como un sistema de primer orden, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v\\ \frac{dv}{dt} &= -10y - 2v + 4\cos 2t.\end{aligned}$$

Si $y(t)$ es una solución de la ecuación de segundo orden, entonces $(y(t), v(t))$ es una solución del sistema. Podemos practicar las soluciones en los planos t-y y y-v.

Por ejemplo, para calcular la solución que satisface $y(0) = y'(0) = 0$, tenemos que resolver

$$\begin{cases} k_1 + \dfrac{6}{13} = 0 \\ -k_1 + 3k_2 + \dfrac{8}{13} = 0. \end{cases}$$

Al hacerlo, encontramos $k_1 = -6/13$ y $k_2 = -14/39$, y la solución con esas condiciones iniciales es

$$y(t) = -\frac{6}{13}e^{-t}\cos 3t - \frac{14}{39}e^{-t}\operatorname{sen} 3t + \frac{6}{13}\cos 2t + \frac{4}{13}\operatorname{sen} 2t.$$

Podemos graficar nuestro resultado en el plano t-y y la solución del sistema correspondiente en el plano y-v (vea la figura 4.10). Ambas figuras muestran la solución oscilando alrededor de $y = 0$. Después de un tiempo breve, la periodicidad de la solución es π.

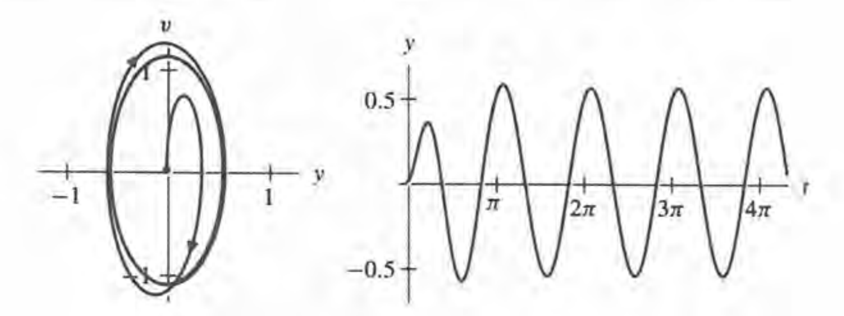


Figura 4.10
Gráfica de la solución de $d^2y/dt^2 + 2dy/dt + 10y = 4\cos 2t$ con condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$ en los planos y-v y t-y.

Como segundo ejemplo, consideremos la solución con $y(0) = 2$ y $y'(0) = 0$. Igual que antes, podemos despejar k_1 y k_2, obteniendo $k_1 = 4/13$ y $k_2 = 20/13$. Las gráficas de esta solución en los planos t-y y y-v se muestran en la figura 4.11. Nuevamente, después de un periodo corto, ambas representaciones de la solución adquieren un comportamiento periódico, oscilando alrededor de $y = 0$. En este caso podemos ver claramente la solución en el plano y-v cruzándose sobre sí misma. Como se indicó, esto no es una violación del teorema de unicidad porque el sistema es no autónomo.

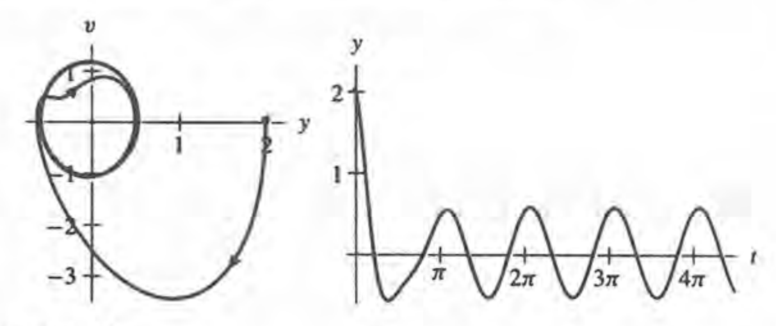


Figura 4.11
Gráfica de la solución de $d^2y/dt^2 + 2dy/dt + 10y = 4\cos 2t$ con condiciones iniciales $y(0) = 2$ y $y'(0) = 0$ en los planos y-v y t-y.

Interpretación de los planos fase

Al estudiar los retratos de las soluciones en el plano y-v, podemos hacer las siguientes observaciones cualitativas. La fuerza restauradora y el amortiguamiento son proporcionales a y y a $v = dy/dt$, respectivamente. Para y y v grandes, la fuerza externa es mucho más pequeña que las fuerzas restauradora y de amortiguamiento del oscilador no forzado. Por consiguiente, lejos del origen, las soluciones en el plano y-v tienen forma muy parecida a

las soluciones del correspondiente oscilador no forzado; es decir, tienden hacia el origen (vea la figura 4.12). Sin embargo, cuando y y v son cercanas a cero, la fuerza externa es tan grande o mayor que la restauradora o la de amortiguamiento. En esta parte del plano y-v, dicha fuerza supera al amortiguamiento y empuja la solución lejos del origen (vea la figura 4.13). Las soluciones tienden hacia la región del plano y-v donde las fuerzas externas y el amortiguamiento se "equilibran".

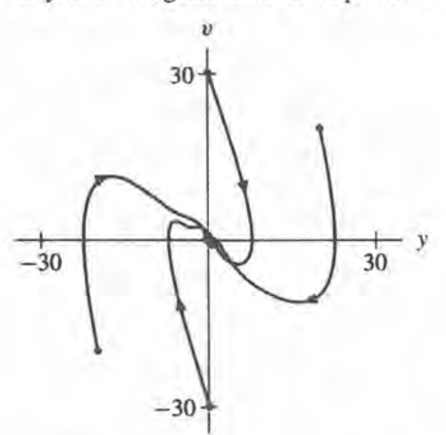


Figura 4.12
Varias soluciones de
$d^2y/dt^2 + 3dy/dt + 2y = 3\cos 2t$, con condiciones iniciales lejanas del origen.

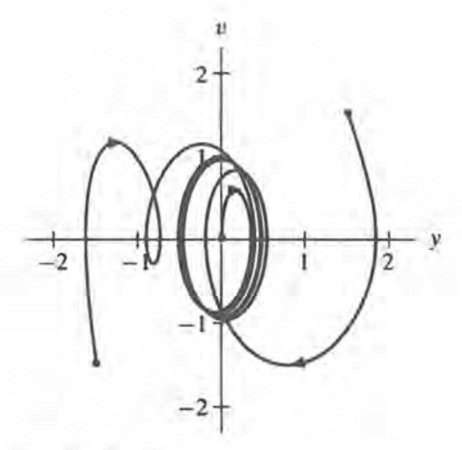


Figura 4.13
Varias soluciones de
$d^2y/dt^2 + 3dy/dt + 2y = 3\cos 2t$, con condiciones iniciales cercanas al origen.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 4.2

En los ejercicios 1-10, encuentre la solución general de la ecuación dada.

1. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = \cos t$

2. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = 5\cos t$

3. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = \operatorname{sen} t$

4. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = 2\operatorname{sen} t$

5. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 6\dfrac{dy}{dt} + 8y = \cos t$

6. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 6\dfrac{dy}{dt} + 8y = -4\cos 3t$

7. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 13y = 3\cos 2t$

8. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 20y = -\cos 5t$

9. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 20y = -3\operatorname{sen} 2t$

10. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + y = \cos 3t$

En los ejercicios 11-14, encuentre la solución del problema de valor inicial dado.

11. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 6\dfrac{dy}{dt} + 8y = \cos t$
$y(0) = y'(0) = 0$

12. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 6\dfrac{dy}{dt} + 8y = 2\cos 3t$
$y(0) = y'(0) = 0$

13. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 20y = -3\,\text{sen}\,2t$

$y(0) = y'(0) = 0$

14. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + y = 2\cos 2t$

$y(0) = y'(0) = 0$

15. Para encontrar una solución particular de una ecuación forzada con forzamiento senoidal o cosenoidal, resolvemos la correspondiente ecuación complejificada. Este método resulta muy eficiente, pero también hay otros. Calcule una solución particular por medio del método de los coeficientes indeterminados para la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + y = \cos 3t$$

(a) usando la conjetura $y_p(t) = a\cos 3t + b\,\text{sen}\,3t$ (con a y b como coeficientes indeterminados) y

(b) mediante la conjetura $y_p(t) = A\cos(3t + \phi)$ (con A y ϕ como coeficientes indeterminados).

Abajo se muestran las gráficas $y(t)$ de varias soluciones de

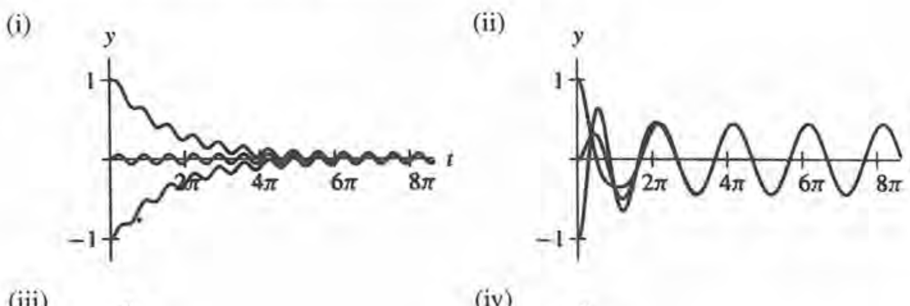
$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = \cos\omega t$$

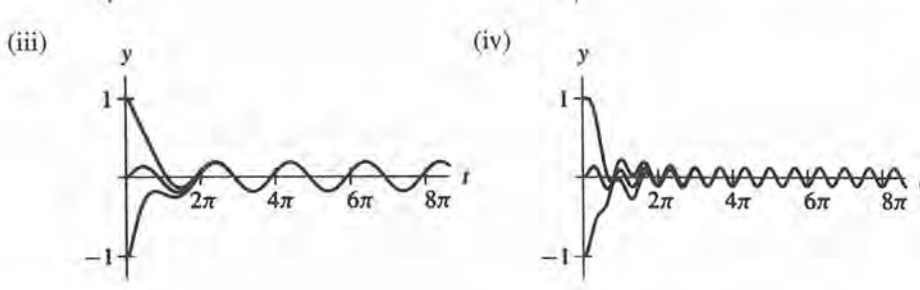
para diversos valores de los parámetros p, q y ω.

En los ejercicios 16-19,

(a) asocie cada figura con uno de los conjuntos de parámetros dados, y

(b) escriba un párrafo breve justificando su selección.





16. $p = 5, q = 3, \omega = 1$

17. $p = 1, q = 3, \omega = 1$

18. $p = 5, q = 1, \omega = 3$

19. $p = 1, q = 1, \omega = 3$

20. Demuestre que si $y_p(t)$ es una solución de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = g(t),$$

entonces $ky_p(t)$ es una solución de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = kg(t)$$

para cualquier constante k.

21. Encuentre la solución general de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 8y = 5\cos t.$$

[*Sugerencia:* Vea los ejercicios 5 y 20.]

22. **(a)** Determine la solución general de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 20y = 3 + 2\cos 2t.$$

[*Sugerencia:* Vea el ejercicio 34 en la sección 4.1.]

(b) Analice el comportamiento a largo plazo de las soluciones de esta ecuación.

23. **(a)** Calcule la solución general de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 20y = e^{-t}\cos t.$$

[*Sugerencia:* Considere que la función de forzamiento es la parte real de una exponencial compleja.]

(b) Analice el comportamiento a largo plazo de las soluciones de esta ecuación.

24. **(a)** Encuentre la solución general de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 20y = e^{-2t}\,\mathrm{sen}\,4t.$$

[*Sugerencia:* Siga conjeturando.]

(b) Analice el comportamiento a largo plazo de las soluciones de esta ecuación.

En los ejercicios 25 y 26 exploramos los diferentes tipos de notación que se utilizan para expresar las soluciones de las ecuaciones del oscilador armónico con funciones trigonométricas de forzamiento. Desafortunadamente, las diferencias en la terminología hacen difícil la comunicación entre matemáticos e ingenieros, aun cuando estén hablando de lo mismo.

25. Dada una función

$$g(t) = a\cos\omega t + b\,\mathrm{sen}\,\omega t,$$

donde a y b son constantes, demuestre que $g(t)$ es la parte real de la función compleja

$$ke^{i\phi}e^{i\omega t}.$$

[*Sugerencia:* Use la fórmula de Euler.]

Observación: La expresión compleja $ke^{i\phi}$ se denomina un **fasor**. Si sabemos que $g(t)$ tiene la forma $k\cos(\omega t + \phi)$, entonces sólo tenemos que conocer las constantes k y ϕ, la amplitud y la fase, para conocer la función g. Por tanto, podemos usar el fasor $ke^{i\phi}$ como notación para la función $g(t) = ke^{i\phi}e^{i\omega t}$.

26. Demuestre que si $k_1e^{i\phi_1}$ es el fasor que representa $g_1(t)$ y $k_2e^{i\phi_2}$ es el fasor que simboliza $g_2(t)$ (ambos con frecuencia $\omega/(2\pi)$), entonces el fasor que representa la suma $g_1(t) + g_2(t)$ es $k_1e^{i\phi_1} + k_2e^{i\phi_2}$. [*Sugerencia:* Escriba las funciones $g_1(t)$ y $g_2(t)$ como las partes reales del producto de los fasores y $e^{i\omega t}$, súmelos y simplifique.]
Observación: La terminología de los fasores se usa ampliamente en la teoría de los circuitos eléctricos, en la que se ha desarrollado un álgebra de fasores para tratar con corrientes y voltajes en circuitos cuyas fuentes de voltaje son periódicas.

4.3 FORZAMIENTO NO AMORTIGUADO Y RESONANCIA

En la sección 4.2 consideramos el efecto del forzamiento periódico sobre los osciladores armónicos amortiguados. En esta sección estudiaremos los osciladores no amortiguados forzados periódicamente. A pesar de que los sistemas físicos tienen siempre algún amortiguamiento, hay una buena razón para estudiar el caso no amortiguado. Si el sistema físico que estamos modelando posee un amortiguamiento muy pequeño, entonces la ecuación no amortiguada es una buena aproximación, por lo menos durante un cierto intervalo. En consecuencia, el comportamiento de las soluciones de la ecuación no amortiguada nos da una información cualitativa considerable sobre el patrón que siguen las soluciones cuando el amortiguamiento es pequeño.

El principio de linealidad ampliado de la sección 4.1 es aplicable a cualquier ecuación de un oscilador armónico forzado, sea amortiguado o no. La solución general es la suma de la solución general de la ecuación no forzada (respuesta natural) y una solución particular de la misma (respuesta forzada). Para el oscilador armónico forzado amortiguado, sabemos que el término de amortiguamiento ocasiona que la respuesta natural tienda a cero. Así entonces, toda solución se aproxima a la respuesta forzada con el paso del tiempo, independientemente de la condición inicial. Éste no es el caso para las ecuaciones no amortiguadas. El comportamiento detallado de las soluciones depende de las condiciones iniciales para todo tiempo. Sin embargo, aún es posible dar una descripción cualitativa de las soluciones, que se aplica para todas las condiciones iniciales.

En esta sección centraremos nuestra atención en el caso del forzamiento senoidal de las ecuaciones no amortiguadas. De particular interés es la manera en que la descripción cualitativa de las soluciones depende de la frecuencia del término de forzamiento, ya que cuando la frecuencia de dicha función se aproxima a la frecuencia natural de la ecuación, ocurre un cambio significativo en el comportamiento de las soluciones. Este fenómeno se llama *resonancia*.

Un oscilador armónico no amortiguado con forzamiento senoidal

Comenzamos con un cuidadoso estudio de la ecuación de un oscilador armónico particular no amortiguado con forzamiento senoidal dada por

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = \cos\omega t.$$

Esta ecuación contiene un parámetro ω que controla la frecuencia del forzamiento externo. La frecuencia del forzamiento es $\omega/(2\pi)$. Para calcular la solución general, emplearemos primero el método de la sección 4.1.

Los eigenvalores de la ecuación no forzada

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = 0$$

son $\pm i\sqrt{2}$, por lo que la solución general es

$$y_h(t) = k_1 \cos \sqrt{2}\, t + k_2 \operatorname{sen} \sqrt{2}\, t.$$

Como no hay amortiguamiento, las soluciones oscilan todo el tiempo con la frecuencia natural $\sqrt{2}/(2\pi)$. La amplitud de la oscilación está determinada por los valores de k_1 y k_2, que a su vez están definidos por las condiciones iniciales.

Para encontrar una solución de la ecuación forzada

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = \cos \omega t$$

usamos el método de los coeficientes indeterminados. Podríamos emplear una combinación de funciones trigonométricas como conjetura de la solución particular, pero como veremos, hay ventajas en complejificar la ecuación, tal como lo hicimos en la sección 4.2. Consideremos

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = e^{i\omega t}.$$

La parte real de una solución de esta ecuación es una solución de la ecuación con forzamiento $\cos \omega t$. Como siempre, conjeturamos $y_c(t) = ae^{i\omega t}$ y determinamos a. Al sustituir $y_c(t)$ en el lado izquierdo de la ecuación, encontramos

$$\begin{aligned}\frac{d^2y_c}{dt^2} + 2y_c &= -a\omega^2 e^{i\omega t} + 2ae^{i\omega t} \\ &= a(2 - \omega^2)e^{i\omega t}.\end{aligned}$$

Para que $y_c(t)$ sea una solución, debemos tener $a = 1/(2 - \omega^2)$, por lo que

$$y_c(t) = \frac{1}{2 - \omega^2} e^{i\omega t} = \frac{1}{2 - \omega^2} (\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t).$$

Por consiguiente, una solución $y_p(t)$ de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = \cos \omega t$$

es la parte real de $y_c(t)$, por tanto

$$y_p(t) = \frac{1}{2 - \omega^2} \cos \omega t.$$

La solución general de la ecuación forzada es entonces

$$y(t) = k_1 \cos \sqrt{2}\, t + k_2 \operatorname{sen} \sqrt{2}\, t + \frac{1}{2 - \omega^2} \cos \omega t.$$

Observe que la solución depende de ω, que consideramos como un parámetro. Debemos omitir el caso $\omega = \sqrt{2}$ puesto que este valor hace nulo al denominador $2 - \omega^2$. Trataremos el caso después en esta sección.

Análisis cualitativo

Si tenemos a mano la solución general, podemos considerar el comportamiento cualitativo de las soluciones de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = \cos \omega t.$$

Note que, como se predijo, la respuesta no forzada no tiende a cero. Además, para toda t, la solución es una suma de términos seno y coseno de frecuencia $\sqrt{2}/(2\pi)$ y $\omega/(2\pi)$. Para algunos valores de t, tanto la respuesta forzada como la no forzada son positivas o negativas, por lo que se refuerzan una con la otra. Para otros valores de t, las respuestas tienen signos opuestos y se cancelan entre sí. Vemos esos efectos en las gráficas de soluciones típicas (vea las figuras 4.14 y 4.15).

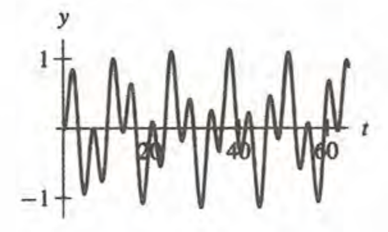


Figura 4.14
Solución de $d^2y/dt^2 + 2y = \cos \omega t$, para $\omega = 0.5$, $y(0) = y'(0) = 0$.

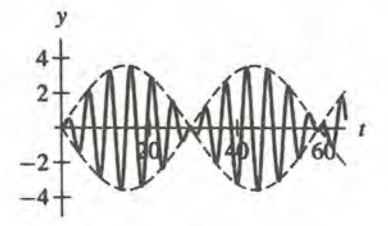


Figura 4.15
Solución de $d^2y/dt^2 + 2y = \cos \omega t$, para $\omega = 1.2$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Pulsación

Existe una estructura adicional de las soluciones que es más evidente si $\omega = 1.2$ que si $\omega = 0.5$ (compare las figuras 4.14 y 4.15). Si $\omega = 1.2$, la amplitud de las oscilaciones crece y decrece según un patrón muy regular. Este fenómeno se denomina **pulsación**. Los pulsos ocurren cuando la respuesta natural y la respuesta forzada tienen aproximadamente la misma frecuencia. Éste es el caso si $\omega = 1.2$, ya que la frecuencia natural, $\sqrt{2}/(2\pi) \approx 1.4/(2\pi)$ y la de forzamiento, $1.2/(2\pi)$, están cercanas entre sí.

Con dos frecuencias tan próximas, las dos respuestas tienden a reforzarse o a cancelarse entre sí sobre largos intervalos. Podemos comprobarlo observando las respuestas natural y forzada por separado para una selección particular de condiciones iniciales (vea

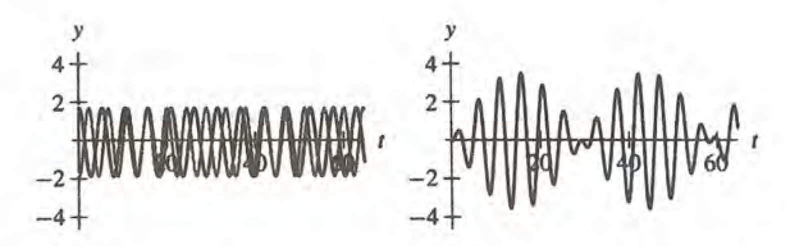


Figura 4.16
En la figura a la izquierda, graficamos las respuestas natural y forzada para el problema de valor inicial $d^2y/dt^2 + 2y = \cos \omega t$ con $\omega = 1.2$, $y(0) = y'(0) = 0$. A la derecha, graficamos la suma de esas dos funciones. Ésta es la solución deseada.

la figura 4.16). Durante ciertos intervalos esas gráficas oscilan al unísono por lo que su suma exhibe una amplitud grande. Sobre otros intervalos, las funciones tienen signos opuestos y su suma es menor. Incidentalmente, usted puede percibir el fenómeno de la pulsación cuando escucha un piano o una guitarra que está fuera de tono.

Podemos determinar el periodo y la frecuencia de las pulsaciones usando exponenciales complejos. Ya hemos determinado que la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(t) = k_1 \cos \sqrt{2}\, t + k_2 \operatorname{sen} \sqrt{2}\, t + a \cos \omega t,$$

donde $a = 1/(2 - \omega^2)$. Consideremos ahora la solución particular $y(t)$ que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$. Esos valores iniciales implican que $k_1 = -a$ y $k_2 = 0$. Por tanto, la solución del problema de valor inicial es

$$y(t) = a \left(\cos \omega t - \cos \sqrt{2}\, t \right).$$

Para simplificar la notación de nuestro cálculo con exponenciales, hacemos

$$\alpha = \frac{\omega + \sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\omega - \sqrt{2}}{2}.$$

Es decir, α es el promedio de ω y $\sqrt{2}$, y β es la mitad de la diferencia entre ω y $\sqrt{2}$. Usando la fórmula de Euler, podemos considerar que $y(t)$ es la parte real de la función compleja

$$y_c(t) = a \left(e^{i\omega t} - e^{i\sqrt{2}\, t} \right).$$

Note que $\omega t = (\alpha + \beta)t$ y $\sqrt{2}\, t = (\alpha - \beta)t$. Por tanto,

$$y_c(t) = a \left(e^{i(\alpha+\beta)t} - e^{i(\alpha-\beta)t} \right),$$

y usando las reglas usuales para manipular exponentes, tenemos

$$y_c(t) = a e^{i\alpha t} (e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}).$$

Como $e^{i\beta t} = \cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t$ y $e^{-i\beta t} = \cos \beta t - i \operatorname{sen} \beta t$, obtenemos

$$e^{i\beta t} - e^{-i\beta t} = 2i \operatorname{sen} \beta t,$$

entonces

$$y_c(t) = a e^{i\alpha t} (2i \operatorname{sen} \beta t).$$

Recordando que la solución deseada $y(t)$ es la parte real de $y_c(t)$, calculamos

$$\begin{aligned} y_c(t) &= a(\cos \alpha t + i \operatorname{sen} \alpha t)(2i \operatorname{sen} \beta t) \\ &= a(-2 \operatorname{sen} \alpha t \operatorname{sen} \beta t - 2i \cos \alpha t \operatorname{sen} \beta t), \end{aligned}$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} y(t) &= -2a\, [\operatorname{sen} \alpha t]\, [\operatorname{sen} \beta t] \\ &= -2a \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\omega + \sqrt{2}}{2} \right) t \right] \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\omega - \sqrt{2}}{2} \right) t \right]. \end{aligned}$$

Si $\omega \approx \sqrt{2}$, la frecuencia de $\text{sen}((\omega - \sqrt{2})t/2)$ es bastante pequeña. Ésta es la frecuencia de las pulsaciones. Como la frecuencia es pequeña y el periodo es el recíproco de la frecuencia, el periodo de la función $\text{sen}((\omega - \sqrt{2})t/2)$ es grande. Por ejemplo, si $\omega = 1.2$, la frecuencia de los pulsos es

$$\frac{\sqrt{2} - 1.2}{4\pi} \approx 0.017,$$

y el periodo es $4\pi/(\sqrt{2} - 1.2) \approx 58$. Esta pequeña oscilación está representada por las líneas punteadas en la figura 4.15.

Por otra parte, la frecuencia del término $\text{sen}((\omega + \sqrt{2})t/2)$ es $(\sqrt{2} + \omega)/(4\pi)$, que es el promedio de las frecuencias natural y de forzamiento. Si $\omega = 1.2$, esta frecuencia es $(\sqrt{2} + 1.2)/(4\pi) \approx 0.21$, que es relativamente grande. El periodo es $4\pi/(\sqrt{2} + 1.2) \approx 4.76$. Este periodo y frecuencia de las oscilaciones rápidas es visible en la figura 4.15.

Dependencia de la amplitud de la frecuencia del forzamiento

Hay una característica más importante en la solución general de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = \cos \omega t$$

que podemos obtener de la fórmula

$$y(t) = k_1 \cos \sqrt{2}\, t + k_2 \,\text{sen} \sqrt{2}\, t + \frac{1}{2 - \omega^2} \cos \omega t.$$

El comportamiento preciso de una solución depende de los valores de k_1 y k_2, y éstos se determinan con las condiciones iniciales. Sin embargo, cada solución contiene el término

$$\frac{1}{2 - \omega^2} \cos \omega t.$$

La amplitud de las oscilaciones de esta función está dada por $1/|2 - \omega^2|$ (vea la figura 4.17).

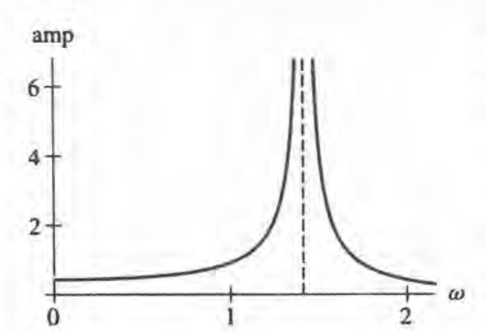


Figura 4.17
Gráfica de $1/|2 - \omega^2|$, la amplitud de las oscilaciones de las soluciones de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = \cos \omega t$$

para t grandes.

De la figura 4.17 podemos hacer algunas predicciones sobre el comportamiento de las soluciones forzadas. Si ω es muy grande, entonces el coeficiente $a = 1/(2 - \omega^2)$ es pequeño. En este caso, las soluciones de la ecuación forzada

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = \cos \omega t$$

están muy cercanas a las soluciones de la ecuación no forzada. Un valor grande de ω significa que la fuerza externa tiene periodo muy corto y frecuencia grande. El análisis anterior predice que una fuerza externa con frecuencia grande tiene sólo un pequeño efecto en las soluciones. El oscilador armónico no tiene el tiempo suficiente para responder a un empujón en una dirección antes de que cambie el signo de la fuerza externa. Un ejemplo típico se muestra en la figura 4.18.

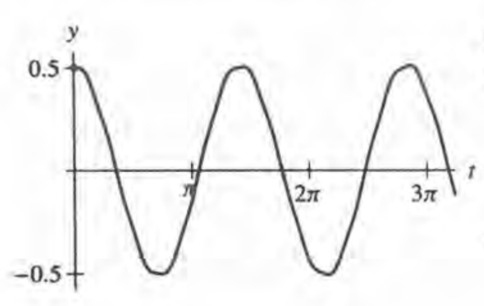


Figura 4.18
Soluciones de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = \cos 10t$$

para condiciones iniciales $y(0) = 0.5$, $y'(0) = 0$.

Por otra parte, si ω es cercana a $\sqrt{2}$, $1/|2 - \omega^2|$ es muy grande ya que el denominador es pequeño. En este caso, la fuerza externa tiene un efecto considerable sobre las soluciones. Como las frecuencias de forzamiento y natural son casi iguales, la fuerza externa empuja y jala al oscilador armónico casi con la misma frecuencia que el oscilador no forzado. Éste se llama forzamiento *casi resonante*. En este caso, el periodo de la pulsación es muy largo y la respuesta natural y la respuesta forzada se refuerzan entre sí por largos periodos. Aun las soluciones con condiciones iniciales relativamente pequeñas oscilan al final con amplitudes muy grandes (vea la figura 4.19).

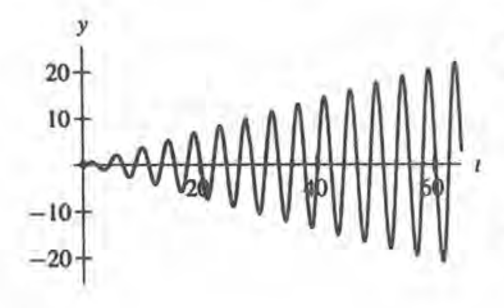


Figura 4.19
Solución de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = \cos 1.4t$$

con $y(0) = y'(0) = 0$.

Resonancia

En nuestro estudio de las soluciones de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = \cos \omega t,$$

hemos evitado el caso $\omega = \sqrt{2}$. Es decir, cuando la frecuencia de la fuerza externa (o forzamiento) es exactamente la misma que la frecuencia natural del oscilador, a esto se denomina **forzamiento resonante** y se dice que el oscilador está en **resonancia**. Fue necesario evitarlo por razones algebraicas, ya que encontramos $2 - \omega^2$ en el denominador de la solución general. Del análisis anterior para el caso $\omega \approx \sqrt{2}$, sospechamos que las so-

luciones tienen un comportamiento cualitativo muy interesante en el caso del forzamiento resonante.

Comportamiento cualitativo

Si $\omega = \sqrt{2}$, la ecuación diferencial toma la forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = \cos\sqrt{2}\,t.$$

Es posible predecir el comportamiento de sus soluciones de dos maneras. Primero, podemos estudiar soluciones de la ecuación forzada

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = \cos\omega t$$

para ω muy próxima a t. Como señalamos antes, la frecuencia de los pulsos disminuye y la amplitud de la respuesta forzada se incrementa cuando ω se acerca a $\sqrt{2}$. En la figura 4.20 se muestra una secuencia de soluciones con ω acercándose a $\sqrt{2}$.

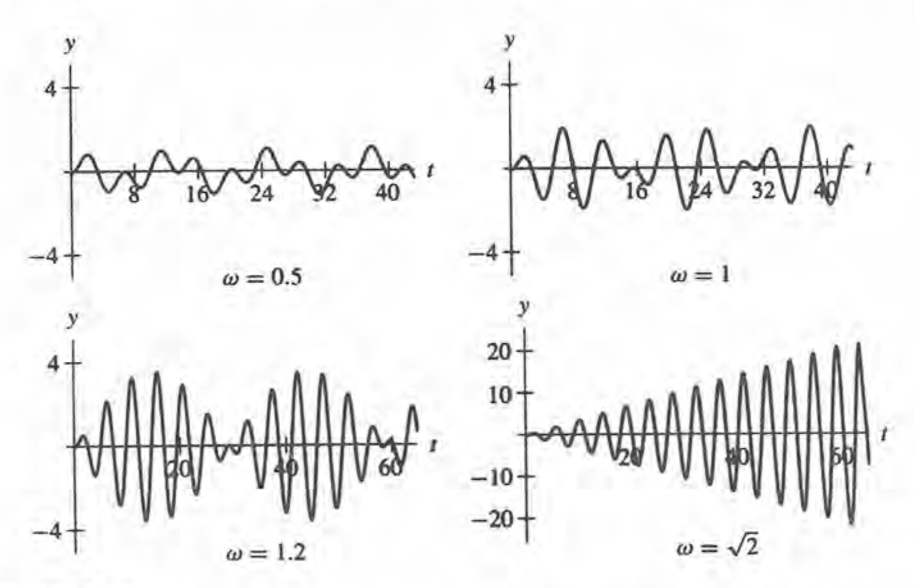


Figura 4.20
Soluciones de $d^2y/dt^2 + 2y = \cos\omega t$ con $y(0) = y'(0) = 0$ para $\omega = 0.5$, $\omega = 1$, $\omega = 1.2$ y $\omega = \sqrt{2}$.

En la figura 4.20 vemos también una solución numérica de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = \cos\sqrt{2}\,t.$$

De esas figuras podemos hacer la predicción razonable de que la respuesta forzada del oscilador armónico no amortiguado con forzamiento resonante oscila con una amplitud que crece todo el tiempo.

La solución general en el caso de resonancia

A continuación calculamos la solución general de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = \cos\sqrt{2}\,t.$$

La solución general de la ecuación no forzada es aún

$$k_1 \cos\sqrt{2}\,t + k_2 \operatorname{sen}\sqrt{2}\,t.$$

Para encontrar una solución particular procedemos como antes y consideramos

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = e^{i\sqrt{2}t}.$$

La primera conjetura natural de $y_c(t) = ae^{i\sqrt{2}t}$ no se cumple para ningún valor de a, porque es una solución de la ecuación no forzada. En la figura 4.20 vemos que las soluciones de la ecuación forzada aún oscilan, pero la amplitud de las oscilaciones crece linealmente con t. Esto motiva nuestra segunda conjetura $y_c(t) = ate^{i\sqrt{2}t}$; es decir, multiplicamos nuestra primera conjetura por t. (La cual también concuerda con la regla empírica para una segunda conjetura que vimos en la sección 4.1.) Usando

$$\frac{dy_c}{dt} = a\left(e^{i\sqrt{2}t} + i\sqrt{2}\,te^{i\sqrt{2}t}\right)$$

y

$$\frac{d^2y_c}{dt^2} = 2a\left(i\sqrt{2}e^{i\sqrt{2}t} - te^{i\sqrt{2}t}\right),$$

sustituimos $y_c(t)$ en el lado izquierdo de la ecuación diferencial y obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d^2y_c}{dt^2} + 2y_c &= 2a\left(i\sqrt{2}e^{i\sqrt{2}t} - te^{i\sqrt{2}t}\right) + 2ate^{i\sqrt{2}t}\\ &= 2ai\sqrt{2}e^{i\sqrt{2}t}.\end{aligned}$$

Como este lado izquierdo debe ser igual a $e^{i\sqrt{2}t}$ si $y_c(t)$ es una solución, tenemos

$$a = \frac{1}{2i\sqrt{2}},$$

que también puede escribirse como $a = -i/(2\sqrt{2})$ porque $1/i = -i$. Entonces

$$\begin{aligned}y_c(t) &= -\frac{i}{2\sqrt{2}}\,t\,e^{i\sqrt{2}t}\\ &= -\frac{i}{2\sqrt{2}}\,t\left(\cos\sqrt{2}\,t + i\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t\right).\end{aligned}$$

Puesto que la solución particular $y_p(t)$ que deseamos es la parte real de $y_c(t)$, encontramos que

$$y_p(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,t\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t.$$

y la solución general de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = \cos\sqrt{2}\,t$$

es

$$k_1 \cos\sqrt{2}\,t + k_2 \operatorname{sen}\sqrt{2}\,t + \frac{1}{2\sqrt{2}}\,t \operatorname{sen}\sqrt{2}\,t.$$

De la solución general vemos que nuestra predicción del comportamiento cualitativo de las soluciones es correcta. Toda solución oscila con frecuencia natural (que en este caso es la misma que la frecuencia del forzamiento). Para valores pequeños del tiempo t, la solución se parece a una solución particular del oscilador no forzado porque es cercana a cero para t pequeñas. Para t grandes, el término

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\,t \operatorname{sen}\sqrt{2}\,t$$

domina a los otros, por lo que la amplitud de la oscilación crece linealmente (vea la figura 4.21).

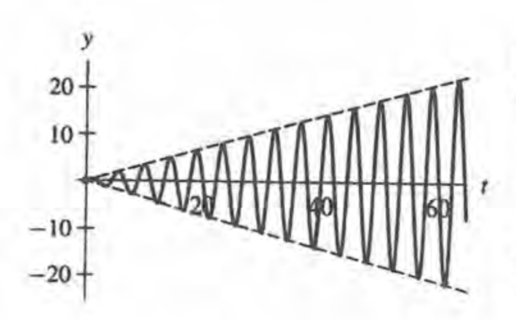


Figura 4.21
Solución de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = \cos\sqrt{2}\,t$$

con $y(0) = y'(0) = 0$. Las líneas punteadas son $y = \pm t/(2\sqrt{2})$.

Una explicación heurística de la resonancia

No hay nada especial acerca de la ecuación particular que examinamos en esta sección. Para cualquier ecuación de la forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + qy = \cos\omega t,$$

si la frecuencia natural $\sqrt{q}/(2\pi)$ del oscilador es igual a la frecuencia $\omega/(2\pi)$ del forzamiento, entonces toda solución oscila con amplitud ilimitada. Tampoco hay nada especial acerca de usar el coseno como fuerza externa. Para una ecuación típica de la forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + qy = g(t),$$

donde $g(t)$ es una función periódica con frecuencia $\sqrt{q}/(2\pi)$, toda solución oscila con amplitud ilimitada.

La resonancia es sorprendente por dos razones. Primera, las soluciones se vuelven ilimitadas aun cuando la fuerza externa sea limitada. Segunda, la fuerza externa empuja exactamente la misma cantidad que jala. En promedio, la fuerza externa es cero. Esas dos propiedades podrían conducirnos a suponer que el efecto del forzamiento periódico externo no sería grande.

La explicación de la resonancia se encuentra en la condición adicional de que las frecuencias de forzamiento y natural deben ser iguales. Si imaginamos al oscilador armónico como una masa y un resorte sobre una mesa y la fuerza externa como el efecto de inclinar la mesa hacia atrás y hacia adelante, entonces el forzamiento resonante significa que la mesa está siendo inclinada con el mismo periodo que el movimiento no forzado de la masa. Supongamos que la masa parte de su posición de reposo con velocidad nula. La inclinación de la mesa induce un desplazamiento en la masa. Como los periodos del movimiento de la mesa y de la masa son los mismos, la mesa está siempre inclinada de manera que se incrementa la rapidez de la masa. Con cada periodo ésta se mueve alejándose cada vez más de la posición de reposo. Como el sistema es lineal, el periodo de las oscilaciones no depende de la amplitud y el efecto descrito con anterioridad continúa agregando energía al sistema hasta que el resorte se rompe o la masa se cae de la mesa. Usando el mismo análisis, podemos describir cómo es que un cantante de ópera rompe una copa al emitir una nota particular.*

La resonancia puede ser o útil o peligrosa. Por ejemplo, la resonancia nos permite diseñar dispositivos que tienen una gran respuesta sólo en presencia de un forzamiento de una frecuencia particular. Por otra parte, si el sistema no forzado corresponde al movimiento oscilante de un puente y la fuerza externa proviene de un sismo, una solución de gran amplitud puede ser catastrófica.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 4.3

En los ejercicios 1-6, calcule la solución general de la ecuación dada.

1. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 9y = \cos t$

2. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 9y = 5\,\mathrm{sen} 2t$

3. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = -\cos\dfrac{t}{2}$

4. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = 3\cos 2t$

5. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3y = \cos 3t$

6. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 5y = 5\,\mathrm{sen}\, 5t$

En los ejercicios 7-10, calcule la solución del problema de valor inicial dado.

7. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 9y = \cos t$
$y(0) = y'(0) = 0$

8. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = 3\cos 2t$
$y(0) = y'(0) = 0$

9. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 5y = 3\cos 2t$
$y(0) = y'(0) = 0$

10. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 9y = \mathrm{sen} 3t$
$y(0) = 1,\ y'(0) = -1$

* Los experimentos indican que se requiere un tono de aproximadamente 140 dB durante 2 o 3 segundos para romper una copa de vino de buena calidad. Producir tal tono está en el límite de nuestra habilidad para cantar. Vea Haym Kruglak y René Pittet, "The Caruso Legend Lives on", *The Physics Teacher*. Vol. 17, p. 49, enero de 1979, y las referencias citadas ahí.

En los ejercicios 11-14, para la ecuación especificada,

(a) calcule la frecuencia de los pulsos,

(b) determine la frecuencia de las oscilaciones rápidas, y

(c) use la información de los incisos (a) y (b) para dibujar un croquis aproximado de una solución típica. [*Sugerencia:* Hágalo sin cálculos adicionales.]

11. $\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = \cos\frac{9t}{4}$

12. $\frac{d^2y}{dt^2} + 10y = \operatorname{sen} 3t$

13. $\frac{d^2y}{dt^2} + 5y = 3\cos 2t$

14. $\frac{d^2y}{dt^2} + 6y = \cos 2t$

En los ejercicios 15-18 se da una gráfica $y(t)$, que corresponde a la solución $y(t)$ de una de las siguientes ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$. Determine qué ecuación diferencial tiene $y(t)$ como solución y dé una breve justificación de su respuesta.

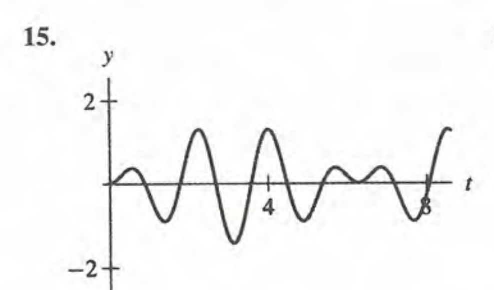
(i) $\frac{d^2y}{dt^2} + 15y = \cos 4t$

(ii) $\frac{d^2y}{dt^2} + 16y = 5\cos 3t$

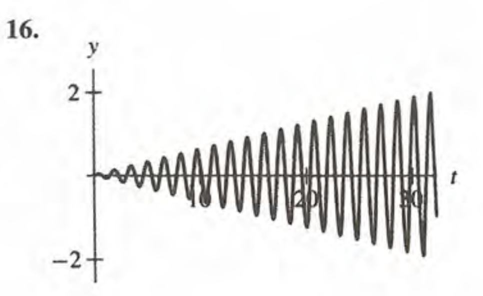
(iii) $\frac{d^2y}{dt^2} + 16y = \frac{1}{2}\cos 4t$

(iv) $\frac{d^2y}{dt^2} + 16y = 10$

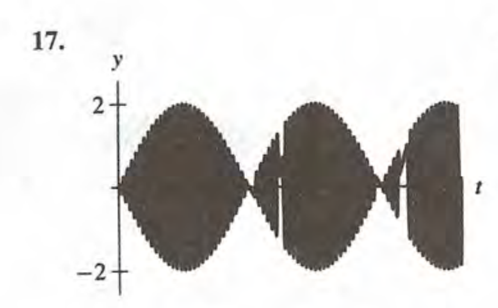
15.



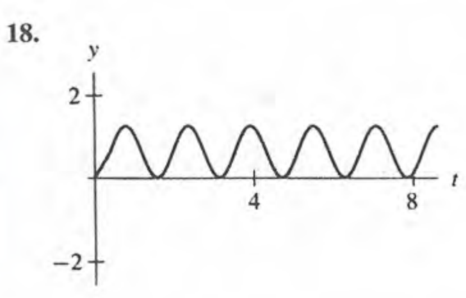
16.



17.



18.



19. Considere la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 15y = \cos 4t + 2\,\mathrm{sen}\,t.$$

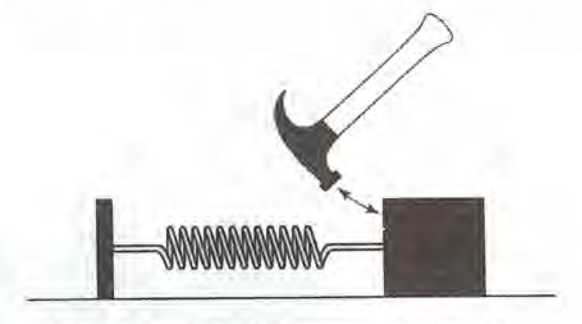
(a) Calcule la solución general. [*Sugerencia:* Vea el ejercicio 34 en la sección 4.1.]
(b) Determine la solución con $y(0) = y'(0) = 0$.
(c) Esboce la gráfica de la solución del inciso (b).
(d) En un ensayo breve, describa el comportamiento de la solución del inciso (b). ¿Cómo podría predecir este comportamiento?

20. Los comerciales para un fabricante de cinta grabadora muestran una copa de cristal en el momento en que ésta se rompe por el sonido de una grabación de la voz de un cantante de ópera. ¿Es esto una buena prueba de la calidad de la cinta?

21. Según una leyenda, una banda de música de una universidad tiene prohibido marchar bajo los acordes de la canción "Hey, Jude". La razón es que siempre que la banda toca esta canción, los espectadores marcan el compás con sus pies y después del segundo coro, la estructura del estadio empieza a bambolearse en forma notable. Las autoridades insisten en que no hay ningún peligro de colapso, pero prohibieron la canción como una precaución. Ninguna otra melodía tiene este efecto sobre el estadio (aunque los espectadores marcan siempre el compás con sus pies). Dé una posible explicación sobre la violenta reacción de la estructura del estadio frente al rítmico acompañamiento por parte de los espectadores cuando la banda toca la canción "Hey, Jude".

22. Suponga que el sistema de suspensión de un automóvil promedio puede ser modelado bastante bien por medio de un oscilador armónico subamortiguado con periodo natural de 2 segundos. ¿A qué separación deben colocarse los topes de velocidad para que un automóvil que viaja a 10 millas por hora sobre varios topes, rebote cada vez más violentamente en cada uno de éstos?

23. Considere una masa unitaria que resbala sobre una mesa sin fricción unida a un resorte, con constante de resorte $k = 16$. Suponga que la masa es golpeada ligeramente por un martillo cada T segundos.



Masa golpeada periódicamente con un martillo.

Suponga que el primer golpe tiene lugar en $t = 0$ y que antes de ese tiempo la masa está en reposo. Describa qué sucede cuando está en movimiento para los periodos T del golpeteo siguientes:

(a) $T = 1$ **(b)** $T = 3/2$ **(c)** $T = 2$ **(d)** $T = 5/2$ **(e)** $T = 3$

4.4 AMPLITUD Y FASE DEL ESTADO PERMANENTE

En esta sección volvemos a la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = \cos\omega t$$

para el oscilador armónico amortiguado con forzamiento periódico. Nuestra meta es establecer una relación cuantitativa entre el comportamiento de las soluciones y los parámetros, particularmente ω, que determina la frecuencia del forzamiento, y p, que determina el amortiguamiento. Como vimos en la sección 4.2, el patrón que siguen a largo plazo todas las soluciones es el mismo. Está determinado por una solución particular $y_p(t)$ de la ecuación forzada que puede escribirse en la forma

$$y_p(t) = A\cos(\omega t + \phi).$$

Por consiguiente, para una t grande, todas las soluciones oscilan con la misma frecuencia que el forzamiento. Éste es el comportamiento de *estado permanente* de las soluciones. La amplitud de la oscilación es A y el *ángulo de fase* es ϕ. En esta sección encontraremos expresiones para A y ϕ como funciones de ω, p y q.

Para un amortiguamiento pequeño (p cercano a cero), esperamos que las soluciones se comporten de modo muy parecido al caso en el que no está presente esta fuerza, por lo menos durante una cantidad limitada de tiempo. La amplitud A de la respuesta forzada es grande si la frecuencia de la fuerza externa es cercana a la frecuencia natural de la ecuación sin forzamiento.

Comportamiento del estado permanente

Para encontrar una solución particular de la ecuación forzada

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = \cos\omega t,$$

seguimos el procedimiento presentado en la sección 4.2 y usamos el método de los coeficientes indeterminados aplicado a la ecuación complejificada

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = e^{i\omega t}.$$

A continuación, conjeturamos $y_c(t) = ae^{i\omega t}$ y determinamos el valor de a que hace que $y_c(t)$ sea una solución. Sustituyendo $y_c(t)$ en el lado izquierdo de la ecuación diferencial, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d^2y_c}{dt^2} + p\frac{dy_c}{dt} + qy_c &= -a\omega^2 e^{i\omega t} + p(ia\omega e^{i\omega t}) + q(ae^{i\omega t})\\ &= a\left((q-\omega^2) + ip\omega\right)e^{i\omega t}.\end{aligned}$$

Para que $y_c(t)$ sea una solución, debemos tomar

$$a = \frac{1}{b}$$

donde b es el número complejo $(q - \omega^2) + ip\omega$.

Como vimos en la sección 4.2, podemos determinar la amplitud A y el ángulo de fase ϕ de $y_p(t)$ de la forma polar

$$a = |a|e^{i\phi} = Ae^{i\phi}$$

del número complejo a. (Vea en el apéndice sobre números complejos la representación polar de un número complejo.) En este caso, como $a = 1/b$, tenemos

$$|a| = \frac{1}{|b|}$$

y el ángulo polar ϕ de a es el negativo del ángulo polar de b. Por tanto, el número complejo

$$a = \frac{1}{b} = \frac{1}{(q - \omega^2) + i(p\omega)}$$

encapsula la amplitud y el ángulo de fase de la respuesta forzada.

Esto resulta muy conveniente. Con cualquier oscilador armónico amortiguado con forzamiento $\cos \omega t$, podemos obtener el comportamiento a largo plazo de la solución para cualquier ω directamente de los valores de los parámetros p, q y ω.

Amplitud y fase

Dado $y_p(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, es conveniente tener fórmulas para A y ϕ. Como $A = |a| = 1/|b|$ y

$$|b| = \sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2},$$

tenemos

$$A = \frac{1}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}}.$$

Estamos suponiendo que p y ω son positivos, y que por tanto el número complejo b tiene una parte imaginaria positiva. En consecuencia, consideramos su ángulo polar localizado entre 0 y π. Además, como el ángulo polar de $a = 1/b$ es el negativo de b, consideramos que ϕ es el ángulo entre $-\pi$ y 0, tal que

$$\tan \phi = \frac{-p\omega}{q - \omega^2}.$$

Amplitud

En resumen, para una t grande, sabemos que todas las soluciones de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = \cos \omega t$$

oscilan con la misma amplitud A y con la misma frecuencia $\omega/(2\pi)$ que la función de forzamiento. La fórmula para la amplitud es

$$A = \frac{1}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}}.$$

En la figura 4.22 mostramos la gráfica de A en función de ω para $q = 2$ y diversos valores de p. Las figuras para otros valores de q son similares. Si p es pequeña, el amortigua-

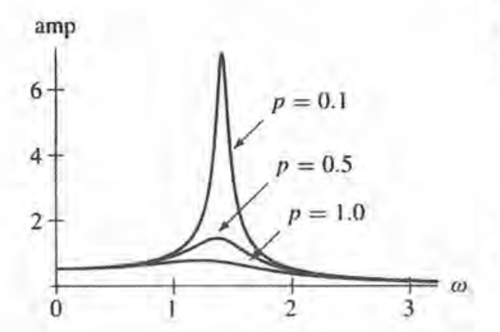


Figura 4.22
Gráficas de la amplitud

$$A = \frac{1}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}}$$

con $q = 2$ y $p = 0.1$, $p = 0.5$ y $p = 1.0$.

miento es pequeño. No es sorprendente ver que la amplitud A es grande para $\omega \approx \sqrt{2}$, ya que si $p = 0$, este valor de ω corresponde al forzamiento de resonancia. Cuando p crece, suceden dos cosas: el valor máximo de A decrece, pero donde se encuentra ese valor, ω se mueve hacia la izquierda. (Es un buen repaso de los problemas de máximos y mínimos calcular el valor máximo de A y el lugar en que se alcanza. Vea el ejercicio 3.)

Podemos visualizar la amplitud A de varias maneras. Por ejemplo, si fijamos q, entonces podemos graficar A en función de las dos variables p y ω (vea la figura 4.23). Nuevamente, la característica más notable de esta gráfica es la explosión de A cerca de la resonancia para p cercana a cero y ω cercana a $\sqrt{q}$.

Otra vista de la amplitud se obtiene fijando la frecuencia de forzamiento ω y graficando A en función de p y q. Tal gráfica se muestra en la figura 4.24. Esta gráfica muestra que, escogiendo de manera apropiada p y q, podemos obtener una gran amplitud de respuesta. Idealmente, nos gustaría ver la gráfica de A como una función de los tres parámetros ω, p y q, pero quedaría representada en cuatro dimensiones.

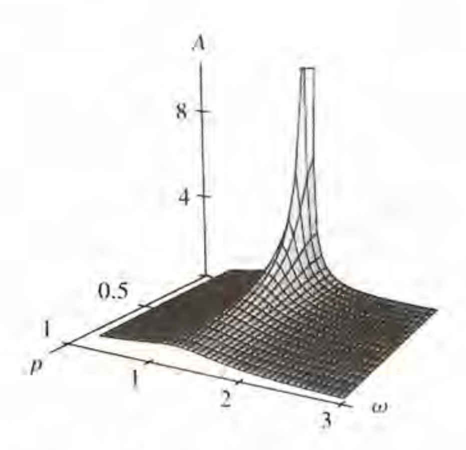


Figura 4.23
Gráfica de la amplitud de A como una función de p y ω para $q = 2$.

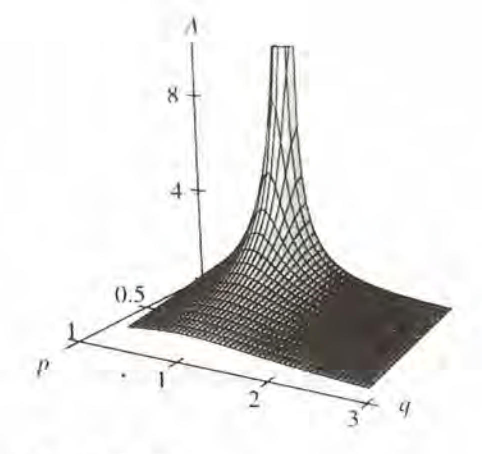


Figura 4.24
Gráfica de la amplitud de A como una función de p y q para $\omega = 1$.

Ángulo de fase

Una solución particular de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = \cos \omega t$$

puede escribirse en la forma

$$y_p(t) = A\cos(\omega t + \phi),$$

y podemos pensar el comportamiento a largo plazo de las soluciones de esta ecuación como traslaciones y escalamientos del forzamiento externo cos ωt. El escalamiento se logra multiplicando por la amplitud A. La traslación corresponde a la adición del ángulo de fase ϕ. La gráfica de

$$A\cos(\omega t + \phi) = A\cos\left(\omega\left(t + \frac{\phi}{\omega}\right)\right)$$

se obtiene deslizando la gráfica de A cos ωt en una magnitud de ϕ/ω hacia la derecha, si $\phi/\omega < 0$, y hacia la izquierda si $\phi/\omega > 0$.

Por conveniencia, escogemos el ángulo de fase ϕ entre $-\pi$ y 0, de manera que se satisface la condición

$$\tan\phi = \frac{-p\omega}{q - \omega^2}.$$

Idealmente nos gustaría ver la gráfica de ϕ como una función de los tres parámetros ω, p y q, pero ésta también requiere cuatro dimensiones. En la figura 4.25 establecemos que $q = 2$ y esbozamos la gráfica de ϕ como una función de ω para distintos valores de p. Para otros valores de q las gráficas son cualitativamente iguales. Note que cuando p es pequeña, el ángulo de fase ϕ permanece cerca de cero para una ω pequeña. La gráfica de ϕ tiene una pendiente grande cuando pasa por $-\pi/2 = 90°$, si ω está próxima a $\sqrt{q}$. Para una ω grande, ϕ es asintótica a $-\pi$. En otras palabras, para una fuerza externa con frecuencia mínima, las soluciones están casi en fase con el forzamiento; para frecuencias grandes, las soluciones están casi medio periodo fuera de fase con el forzamiento.

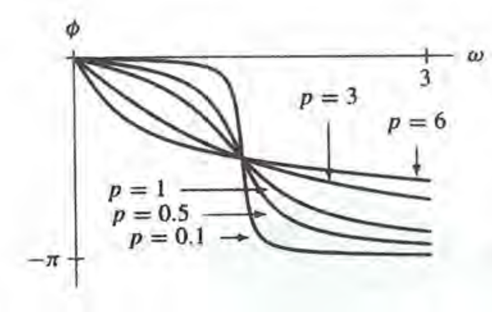


Figura 4.25
Ángulo de fase ϕ para $q = 2$ con $p = 0.1$, $p = 0.5$, $p = 1.0$, $p = 3.0$ y $p = 6.0$. Note que cuando p es pequeño, el ángulo de fase ϕ tiende a cero cuando el valor de ω es mínimo. La gráfica de ϕ tiene una pendiente grande cuando pasa por $-\pi/2 = 90°$ si ω está cerca de $\sqrt{q}$. Para ω grande, ϕ es asintótico a $-\pi$.

Más parámetros

Hay dos parámetros más que quisiéramos considerar: la amplitud y la fase de la función de forzamiento. Es decir, consideramos

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = F\cos(\omega t + \theta),$$

donde F y θ son constantes. Afortunadamente, esos dos nuevos parámetros agregan poca complicación al análisis.

Primero, digamos que $y_p(t)$ es una solución de la ecuación forzada

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = g(t)$$

para alguna función $g(t)$. Si F es una constante, de la linealidad de la ecuación diferencial inferimos que el producto $Fy_p(t)$ es una solución de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = Fg(t)$$

(vea el ejercicio 20 en la sección 4.2). Al multiplicar la fuerza externa por un múltiplo constante, queda multiplicada la respuesta forzada por la misma cantidad.

En segundo lugar, suponga de nuevo que $y_p(t)$ es una solución de la ecuación forzada

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = g(t)$$

para alguna función $g(t)$. Si θ es una constante, entonces $y_p(t + \theta)$ es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = g(t + \theta).$$

Esta afirmación puede verificarse si definimos una nueva variable independiente $\tau = t + \theta$ y revisamos que $y_p(\tau)$ es una solución de

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + p\frac{dy_p}{d\tau} + qy_p = g(\tau)$$

(es decir, sólo desplazamos el eje t; vea el ejercicio 5).

Un recordatorio tranquilizante

Hemos acumulado una gran cantidad de información relativa a las soluciones de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = \cos\omega t,$$

especialmente si $p \geq 0$ y $q > 0$. Es importante recordar que nuestros cálculos se basan en la forma especial de esta ecuación. Sólo cuando ésta es lineal podemos usar el principio de linealidad ampliado para descomponer la solución general en la solución general de la ecuación no forzada más una solución particular de la ecuación forzada. Sólo el hecho de que la función forzada es una función coseno nos permite encontrar una solución particular y manipularla como lo hemos hecho en las últimas tres secciones.

Sin embargo, la naturaleza específica de las ecuaciones consideradas en este capítulo no disminuye la importancia de los cálculos que hemos hecho en las últimas cuatro secciones. Hemos aprendido mucho sobre ejemplos particulares. Esto es importante por dos razones. En primer lugar, como lo hemos dicho muchas veces, esta ecuación diferencial particular es un modelo excelente para muchos sistemas físicos diferentes. En segundo lugar, entender esta ecuación nos da un punto de partida para estudiar otros tipos de ecuaciones (no todas las funciones periódicas forzadas son senos o cosenos y no todas las ecuaciones diferenciales son lineales).

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 4.4

1. La armónica de cristal es un instrumento musical inventado por Ben Franklin. Consiste en una colección de vasos de cristal, un vaso para cada nota. El ejecutante frota su dedo ligeramente húmedo alrededor del borde del vaso y las vibraciones resultantes del cristal dan un tono muy puro. El instrumento puede afinarse vertiendo agua en los vasos. Entre mayor presión aplica el ejecutante sobre el vaso, más intenso es el sonido (pero la frecuencia permanece igual). Explique cómo funciona la armónica de cristal.

2. Suponga que un cantante de ópera puede romper una copa al cantar una nota particular.

(a) ¿Tendrá que cantar una nota más alta o una más baja para romper una copa idéntica que está medio llena de agua?

(b) Suponga que ambas notas están dentro de la tesitura del cantante. ¿Será más fácil o más difícil romper la copa cuando está medio llena de agua?

3. Para una t grande, toda solución de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = \cos \omega t$$

oscila con frecuencia $\omega/(2\pi)$ y amplitud A dada por

$$A(\omega, p, q) = \frac{1}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}}.$$

La amplitud A es entonces una función de los parámetros ω, p y q.

(a) Calcule $\partial A/\partial \omega$.

(b) Para p y q fijas, si $M(p, q)$ es el valor máximo de $A(\omega, p, q)$ como función de ω. Calcule una expresión para $M(p, q)$. [*Sugerencia:* Éste es un problema de máximos y mínimos del cálculo.]

4. Para la función $M(p, q)$ del ejercicio 3,

(a) para $q = 1$, trace $M(p, q)$ como función de p,

(b) explique por qué $M(p, q) = 1/\sqrt{p^2q - p^4/4}$ si el amortiguamiento es suficientemente pequeño; y

(c) diga por qué $M(p, q)$ es proporcional a $1/p$ cuando $p \to 0$.

5. Si $y_p(t)$ es una solución de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = g(t),$$

demuestre que $y_p(t + \theta)$ es una solución de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = g(t + \theta).$$

6. En esta sección calculamos una solución particular de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = \cos\omega t$$

de la forma

$$y_p(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

donde el ángulo de fase ϕ satisface la ecuación

$$\tan\phi = \frac{-p\omega}{q - \omega^2}$$

y $-180^\circ < \phi < 0$. El ángulo ϕ es una función $\phi(\omega, p, q)$ de los parámetros ω, p y q.

(a) Calcule $\partial\phi/\partial\omega$.

(b) Calcule $\partial^2\phi/\partial\omega^2$.

(c) Para $q = 2$ y varios valores de p cercanos a cero, encuentre el valor de ω donde ϕ cambia más rápidamente.

[*Sugerencia:* Este ejercicio es una excelente oportunidad para probar la fuerza de los paquetes de diferenciación simbólica.]

4.5 EL PUENTE DEL ESTRECHO DE TACOMA

El 1 de julio de 1940 fue abierto al tránsito el puente del Estrecho de Tacoma, con un costo de 6 millones de dólares. El 7 de noviembre de 1940, durante un vendaval, el puente se rompió y se vino abajo. Durante su corta vida, el puente colgante de más de una milla de largo fue conocido como el "Galloping Gertie" debido a que la superficie de rodamiento oscilaba considerablemente con el viento. El colapso se convirtió en un escándalo por varias razones, entre otras por el hecho de que el dinero del seguro había sido robado y el puente quedó sin asegurar.*

La superficie de rodamiento de un puente colgante cuelga de cables verticales unidos a cables soportados por torres (vea la figura 4.26, donde se ve un esquema del puente). Si consideramos que los cables verticales son largos resortes, entonces es tentador mo-

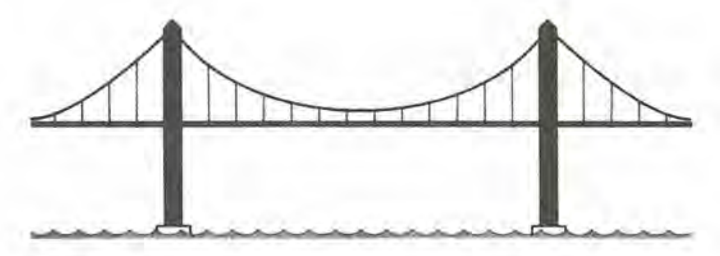


Figura 4.26
Esquema de un puente colgante.

* La historia del puente y su colapso puede consultarse en Martin Braun, *Differential Equations and Their Applications*, Springer-Verlag, 1993, p. 173, y Matthys Levy y Mario Salvadori, *Why Buildings Fall Down: How Structures Fail*, W. W. Norton Co., 1992, p. 109.

delar las oscilaciones de la superficie de rodamiento con una ecuación de oscilador armónico. Es posible que el viento en alguna medida proporcione un forzamiento periódico. Podríamos suponer que el colapso se debió a la resonancia.

Pero el asunto no es tan simple. Sabemos que para causar efectos significativos, la frecuencia de forzamiento de un oscilador armónico forzado debe ser muy cercana a su frecuencia natural. El viento rara vez presenta este comportamiento durante mucho tiempo, y sería de muy mala suerte que generara oscilaciones con una frecuencia casi exactamente igual a la frecuencia del puente.

Las investigaciones recientes sobre la dinámica de puentes colgantes (por dos matemáticos, A. C. Lazer y P. J. McKenna*) indican que el oscilador armónico lineal no es un modelo exacto para predecir el movimiento de un puente colgante. Los cables verticales actúan como resortes cuando están estirados. Es decir, cuando la superficie de rodamiento está debajo de su posición de reposo, los cables tiran hacia arriba. Sin embargo, cuando la superficie de rodamiento está considerablemente arriba de su posición de reposo, los cables quedan flojos, por lo que no jalan hacia abajo. Por consiguiente, la superficie de rodamiento experimenta una menor fuerza tratando de regresarla a la posición de reposo cuando es empujada hacia arriba que cuando es estirada hacia abajo (vea la figura 4.27).

En esta sección estudiaremos un modelo para un sistema con esas propiedades. El sistema de ecuaciones que estudiaremos fue desarrollado por Lazer y McKenna a partir de modelos más complicados de oscilaciones en puentes colgantes. Este sistema da una información considerable acerca de los comportamientos posibles de los puentes colgantes e incluso sugiere cómo pueden construirse con mayor seguridad.

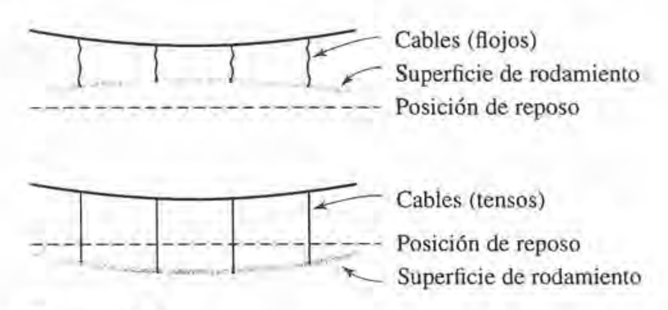


Figura 4.27
Acercamiento del cable vertical cuando la superficie de rodamiento está arriba y abajo de la posición de reposo.

Obtención de las ecuaciones

El modelo que consideramos para el movimiento del puente usa sólo una variable para describir la posición del puente. Suponemos que el puente oscila hacia arriba y hacia abajo como en la figura 4.27. Si $y(t)$, medida en pies o en metros, representa la posición vertical del centro del puente, y $y = 0$ corresponde al punto donde los cables están tensos pero no estirados. Entonces cuando $y < 0$ los cables están estirados y cuando $y > 0$ los cables están flojos (vea la figura 4.28). Por supuesto, al usar sólo una variable para estudiar el movimiento del puente se ignoran muchos posibles movimientos; comentaremos sobre otros modelos al final de esta sección.

* Vea "Large-amplitude Periodic Oscillations in Suspension Bridges: Some New Connections with Nonlinear Analysis" por A. C. Lazer y P. J. McKenna, en *SIAM Review*. Vol. 32, núm. 4, 1990, pp. 537-578.

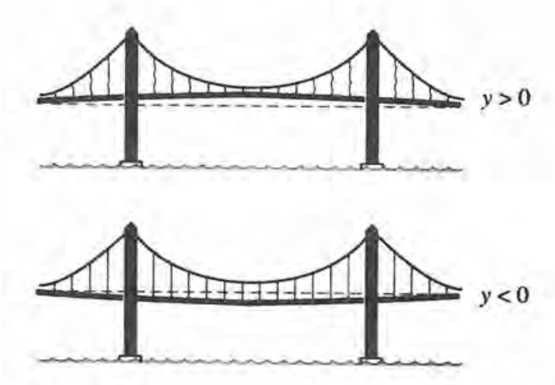


Figura 4.28
Posiciones del puente correspondientes a $y > 0$ y $y < 0$.

Para desarrollar un modelo para $y(t)$, consideramos las fuerzas que actúan sobre el centro del puente. La gravedad proporciona una fuerza constante en la dirección negativa de y. Suponemos además que los cables proporcionan una fuerza que jala al puente hacia arriba cuando $y < 0$, y que es proporcional a y. Por otra parte, cuando $y > 0$, el cable no toma ninguna fuerza. Cuando $y \neq 0$, se tiene también una fuerza restauradora que jala a y de regreso hacia $y = 0$ debido al alargamiento de la superficie de rodamiento. Finalmente, habrá también algo de amortiguamiento, que se considera proporcional a dy/dt. Escogemos las unidades de manera que la masa del puente sea 1.

Con base en estas hipótesis, la ecuación desarrollada por Lazer y McKenna para modelar un puente colgante en un día tranquilo (sin viento) es

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha\frac{dy}{dt} + \beta y + c(y) = -g.$$

El primer término es la aceleración vertical. El segundo término, $\alpha(dy/dt)$, surge del amortiguamiento. Como los puentes colgantes son estructuras relativamente flexibles, creemos que α es pequeña. El término βy toma en cuenta la fuerza proporcionada por el material del puente al jalarlo de regreso hacia $y = 0$. La función $c(y)$ toma en cuenta el jalón del cable cuando $y < 0$ (y la falta de éste cuando $y \geq 0$), y por tanto está dada por

$$c(y) = \begin{cases} \gamma y, & \text{si } y < 0; \\ 0, & \text{si } y \geq 0. \end{cases}$$

La constante g representa la fuerza debida a la gravedad.

Podemos convertir esto a un sistema en la forma usual, y obtenemos

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -\beta y - c(y) - \alpha v - g.$$

Éste es un sistema autónomo. Al simplificar el lado derecho, combinando $-\beta y$ con los tér-

minos en $c(y)$, obtenemos

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -h(y) - \alpha v - g,$$

donde $h(y)$ es la función definida por tramos

$$h(y) = \begin{cases} ay, & \text{si } y < 0; \\ by, & \text{si } y \geq 0, \end{cases}$$

y $a = \beta + \gamma$ y $b = \beta$.

Para estudiar este ejemplo numéricamente, escogemos valores particulares de los parámetros. (Estos valores no son sugeridos por ningún puente en particular.) Siguiendo a Lazer y McKenna, tomamos $a = 17$, $b = 13$, $\alpha = 0.01$ y $g = 10$. El sistema en estudio es entonces

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -h(y) - 0.01v - 10,$$

donde

$$h(y) = \begin{cases} 17y, & \text{si } y < 0; \\ 13y, & \text{si } y \geq 0. \end{cases}$$

Podemos calcular fácilmente que este sistema tiene sólo un punto de equilibrio, que está dado por $(y, v) = (-10/17, 0)$. La coordenada y de dicho punto es negativa porque la gravedad obliga al puente a deflexionarse un poco, alargando los cables. Los resultados numéricos indican que las soluciones se mueven en espiral hacia el punto de equilibrio muy lentamente. Y es justo lo que esperamos porque se tiene una pequeña cantidad presente de amortiguamiento. El campo de direcciones y las curvas solución se muestran en las figuras 4.29 y 4.30. La discontinuidad del campo de direcciones a lo largo de la línea $y = 0$ es difícil de observar porque el campo vectorial es casi vertical en ambos lados de la línea.

El comportamiento de las soluciones indica que el puente oscila alrededor de la posición de equilibrio. La amplitud de la oscilación declina lentamente debido a la pequeña cantidad de amortiguamiento. Como las fuerzas que controlan el movimiento cambian de manera abrupta a lo largo de $y = 0$, las soluciones también modifican su dirección cuando cruzan del medio plano izquierdo al medio plano derecho.

El efecto del viento

Para tomar en cuenta el efecto del viento en el modelo, agregamos un término adicional al lado derecho de la ecuación. El efecto del viento es muy difícil de cuantificar. No sólo hay ráfagas de mayor o menor duración y resistencia aleatoria, sino que también su manera de interactuar con el puente puede ser muy complicada. Aunque suponemos que el

Figura 4.29
Campo de direcciones para el sistema

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -h(y) - 0.01v - 10.$$

Hay un sumidero espiral en $(y, v) = (-10/17, 0)$. En la figura 4.30, vemos que las curvas solución para el sistema se mueven en espiral lentamente hacia el punto de equilibrio.

viento tiene rapidez y dirección constante, el efecto sobre el puente no tiene que ser constante. Cuando el aire pasa por dicha construcción, se forman vórtices o remolinos (como aquellos en el extremo de un remo en el agua) arriba y abajo de la superficie de rodamiento. Cuando estos remolinos se vuelven suficientemente grandes, "se rompen", ocasionando que el puente rebote. Por consiguiente, aun un viento constante puede impartir un empuje periódico al puente.

A pesar de esas complicaciones, suponemos, por simplicidad, que el viento proporciona un término de forzamiento de la forma λ sen μt. Como es improbable que vientos turbulentos den un término de forzamiento con amplitud constante λ o frecuencia constante $\mu/(2\pi)$, estudiaremos el comportamiento de las soluciones que persistan para un rango de valores λ y μ.

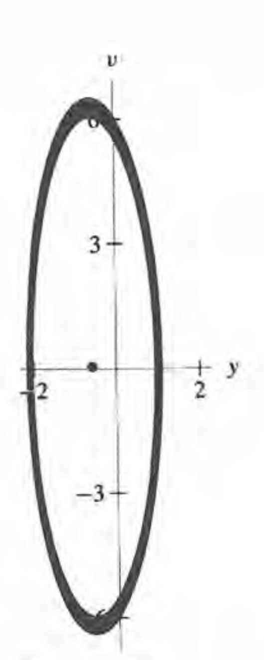


Figura 4.30
Las curvas solución se mueven en espiral lentamente hacia el equilibrio.

El sistema con forzamiento está dado por

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -h(y) - 0.01v - 10 + \lambda \operatorname{sen} \mu t.$$

Éste es un modelo bastante simple para el comportamiento complicado de un puente que se mueve con el viento, pero después veremos que incluso este simple modelo tiene soluciones que se comportan de manera sorprendente.

Comportamiento de las soluciones

Hemos visto que un sistema lineal con amortiguamiento y forzamiento senoidal tiene una solución periódica a la que tiende toda otra órbita cuando el tiempo crece; ésta es la solución de estado permanente. En otras palabras, sin importar cuáles sean las condiciones iniciales, el comportamiento a largo plazo del sistema será el mismo. La amplitud y frecuencia de esta solución periódica están determinadas por la amplitud y frecuencia del término de forzamiento (vea la sección 4.2).

El comportamiento del sistema

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -h(y) - 0.01v - 10 + \lambda \operatorname{sen} \mu t$$

es bastante diferente. Abajo describimos los resultados de un estudio numérico de las soluciones de este sistema llevadas a cabo por Glover, Lazer y McKenna.*

*Vea "Existence and Stability of Large-scale Nonlinear Oscillations in Suspension Bridges" por J. Glover, A. C. Lazer y P. J. McKenna, *ZAMP*. Vol. 40, 1989, pp. 171-200.

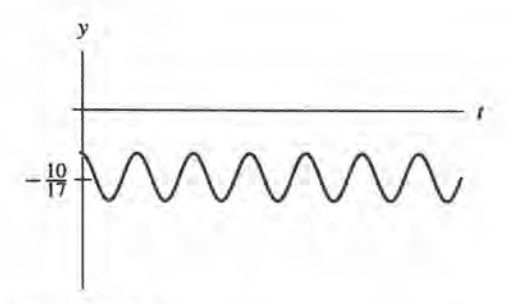


Figura 4.31
Solución del sistema con forzamiento pequeño.

Si, por ejemplo, escogemos $\mu = 4$ y λ muy pequeña ($\lambda < 0.05$), toda solución tiende hacia una solución periódica con magnitud pequeña cerca de $y = -10/17$ (vea la figura 4.31). Para esta solución periódica, $y(t)$ es negativa para toda t; y como nunca cruza $y = 0$, se comporta justo como la solución del sistema lineal forzado

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -17y - 0.01v - 10 + \lambda \operatorname{sen} 4t.$$

En términos del comportamiento del puente, esto significa que frente a vientos ligeros, esperamos que el puente oscile con amplitud pequeña. La gravedad mantiene al puente flexionado hacia abajo y los cables están siempre algo estirados (vea la figura 4.32). En este rango, el modelado de los cables como resortes lineales es razonable.

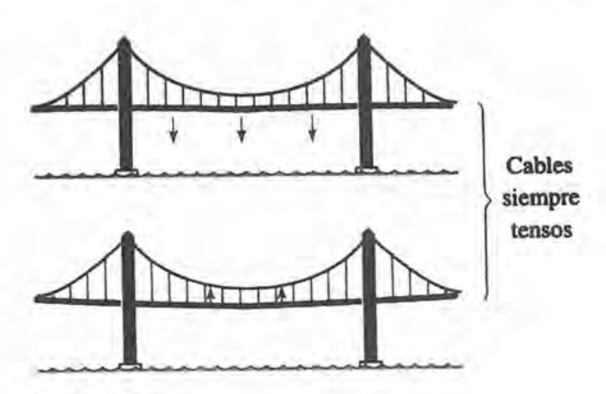


Figura 4.32
Esquema del puente oscilando con vientos de pequeña intensidad.

A medida que λ se incrementa, se observa un nuevo fenómeno. Las condiciones iniciales cerca de $(y, v) = (-10/17, 0)$ aún dan soluciones que oscilan con pequeña amplitud (vea la figura 4.33). Sin embargo, si $y(0) = -10/17$ pero $v(0)$ es grande, las soluciones pueden comportarse en forma diferente. Hay otra solución periódica que oscila alrededor de $y = -10/17$ pero con amplitud (relativamente) grande (vea la figura 4.34).

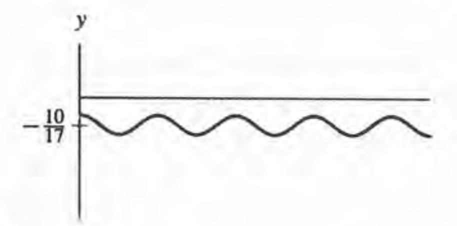


Figura 4.33
Solución del sistema forzado con fuerzas externas mayores que en la figura 4.31 y condiciones iniciales cerca del equilibrio.

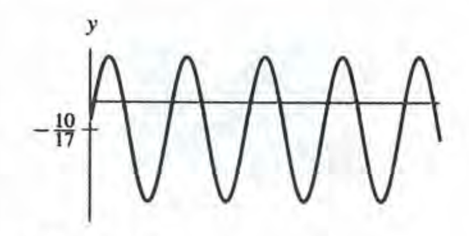


Figura 4.34
Solución del sistema forzado con la misma magnitud que en la figura 4.33, pero con condiciones iniciales más alejadas del equilibrio.

Esto tiene implicaciones muy serias para el comportamiento del puente. Si el desplazamiento inicial es pequeño, entonces esperamos ver oscilaciones mínimas igual que antes. Pero si una ráfaga de viento golpea al puente con suficiente fuerza para levantarlo arriba de $y = 0$, los cables quedarán flojos y el modelo lineal ya no es exacto (vea la figura 4.35). En esta situación, las oscilaciones podrían hacerse mucho más amplias y *no se morirían*. Así entonces, en un viento moderado ($\lambda > 0.06$), una sola ráfaga fuerte podría ocasionar repentinamente que el puente empezase a oscilar con mucha mayor amplitud, tal vez con consecuencias devastadoras.

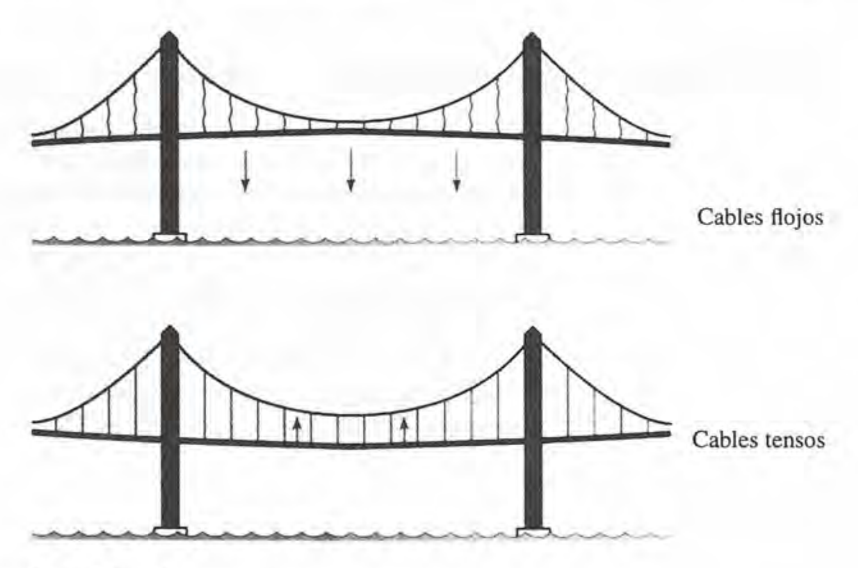


Figura 4.35
Esquemas de las oscilaciones de gran amplitud del puente.

Variación de los parámetros

Como se mencionó antes, puesto que los efectos del viento no son particularmente regulares, deberíamos investigar el comportamiento de las soluciones cuando λ y μ varían. Resulta que la solución periódica de gran amplitud persiste para un intervalo bastante amplio de λ y μ. Esto significa que aun en vientos con velocidad y dirección irregulares, el repentino salto en comportamiento a una oscilacion persistente con gran amplitud es posible.



Joseph McKenna (1948-), nacido en Dublín, Irlanda, recibió su Ph.D. en matemáticas en la Universidad de Michigan. Durante la mayor parte de su vida profesional se ha ocupado en la investigación de ecuaciones diferenciales, aplicándolas a diversos problemas de física de suelos, dinámica de fluidos, óptica, biología y más recientemente a la flexión de puentes y barcos.

Su trabajo con A. C. Lazer, descrito en esta sección, ha recibido considerable atención por parte de las comunidades de matemáticos e ingenieros. Sus investigaciones contradicen directamente el punto de vista, prevaleciente durante mucho tiempo, de que el fenómeno de la resonancia causó el colapso del puente del Estrecho de Tacoma. También han sugerido varios tipos alternativos de ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento de tales puentes colgantes, incluida la ecuación descrita en este capítulo y un modelo más complicado que implica ecuaciones no lineales algo parecidas a las que veremos en el próximo capítulo.

McKenna es actualmente profesor de matemáticas en la Universidades Connecticut.

¿Explica esto el desastre del puente del Estrecho de Tacoma?

Al igual que para cualquier modelo simple de un sistema complicado, cabe una nota de advertencia. Para construir este modelo, hemos hecho un número de hipótesis simplificadoras. Éstas incluyen, pero no se limitan a suponer que el puente oscila en una sola pieza; puede hacerlo en dos o más secciones (vea la figura 4.36). Para tomarlo en cuenta en nuestro modelo, tendríamos que incluir una nueva variable independiente para la posición a lo largo del puente. El modelo resultante conduce a una ecuación diferencial parcial.

Otro factor que hemos ignorado es que la superficie de rodamiento de este puente tiene ancho y longitud. El colapso final del puente del Estrecho de Tacoma fue precedido por violentos movimientos de torsión de la superficie de rodamiento, alargando y aflojando alternadamente los cables a cada lado del camino (vea la cubierta de este libro). El análisis

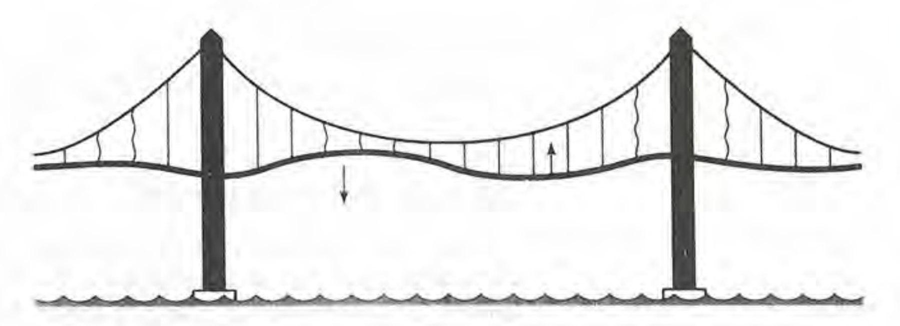


Figura 4.36
Formas más complicadas de oscilación de un puente colgante.

de un modelo que incluye el ancho da considerable información sobre los momentos finales anteriores al colapso del puente (vea el artículo por Lazer y McKenna citado antes).

El simple modelo analizado antes ayuda de manera significativa a entender el comportamiento del puente. Si este simple sistema puede caracterizar la sorprendente apariencia de las soluciones periódicas de gran amplitud, es razonable esperar que los modelos más complicados y más precisos exhiban también este comportamiento. Así entonces, este modelo nos dice qué observar al estudiar el comportamiento de un puente colgante flexible.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 4.5

Para los ejercicios 1-3, recuerde que nuestro modelo simple de un puente colgante es

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha\frac{dy}{dt} + \beta y + c(y) = -g,$$

donde α es el coeficiente de amortiguamiento, β es un parámetro que corresponde a la rigidez de la superficie de rodamiento, la función $c(y)$ toma en cuenta la tensión de los cables y g es la constante gravitatoria. Para cada una de las modificaciones siguientes en el diseño del puente,

(a) aclare qué parámetros cambian, y

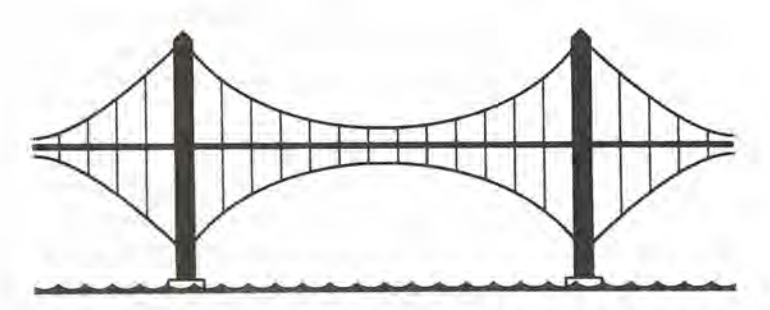
(b) explique cómo espera que un cambio en los valores de los parámetros afecte las soluciones. (Por ejemplo, ¿hace esta modificación que el sistema se parezca o no a un sistema lineal?)

1. La "rigidez" de la superficie de rodamiento se incrementa, por ejemplo, reforzando el concreto o agregando material adicional que hace más difícil que la superficie de rodamiento se flexione.

2. Aumenta el coeficiente de amortiguamiento.

3. Se incrementa la resistencia de los cables.

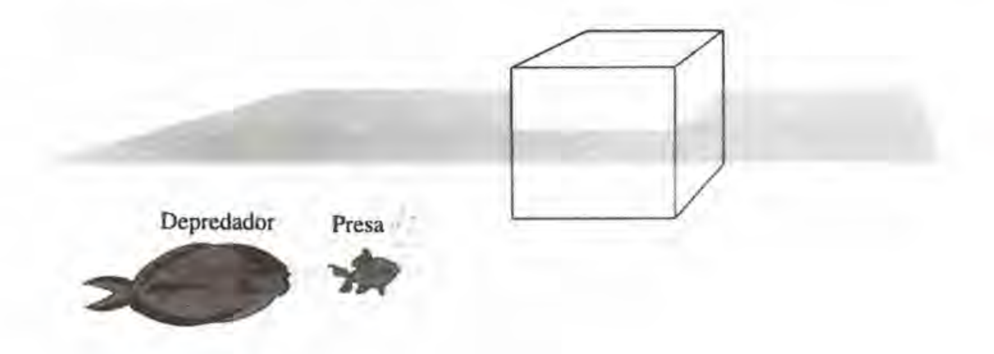
4. La figura siguiente es un esquema de un diseño de puente colgante alternativo llamado el puente colgante de gran claro, ligero y flexible de Lazer-McKenna. ¿Cómo evita este diseño los problemas del diseño estándar de los puentes colgantes? Analícelo en un párrafo y dé ecuaciones del modelo similar a las del texto para este diseño.



Esquema del puente colgante Lazer-McKenna de gran claro, ligero y flexible.

En los ejercicios 5-8, consideramos otra aplicación de las ideas de esta sección. Lazer y McKenna observaron que las ecuaciones que estudian también pueden usarse para modelar el movimiento ascendente y descendente de un objeto flotante en el agua, el cual puede elevarse completamente fuera del agua. Esto tiene serias implicaciones para el comportamiento de un barco en alta mar.

Supongamos que tenemos un cubo hecho de una sustancia ligera flotando en el agua. La gravedad siempre jala al cubo hacia abajo. El cubo flota en un nivel de equilibrio en el que la masa del agua desplazada es igual a la masa del cubo. Si el cubo es más alto o más bajo que el nivel de equilibrio, hay entonces una fuerza restauradora proporcional al tamaño del desplazamiento. Suponemos que el fondo y la parte superior del cubo permanecen paralelos a la superficie del agua en todo momento y que el sistema tiene una pequeña cantidad de amortiguamiento.



Cubo flotando en el agua

5. Escriba una ecuación diferencial que modele el movimiento hacia arriba y hacia abajo del cubo, suponiendo que éste siempre permanece en contacto con el agua y nunca está totalmente sumergido.

6. Escriba una ecuación diferencial para el movimiento hacia arriba y hacia abajo del cubo, suponiendo que siempre está en contacto con el agua, pero que puede encontrarse totalmente sumergido.

7. Escriba una ecuación diferencial que modele el movimiento hacia arriba y hacia abajo del cubo, considerando que nunca estará totalmente sumergido pero que puede elevarse una cierta distancia, por completo fuera del agua.

8. **(a)** Ajuste cada uno de los modelos en los ejercicios 5-7 para incluir el efecto de olas sobre el movimiento del cubo (tomando en cuenta que la parte superior y el fondo de éste permanecen paralelos al nivel promedio del agua).

(b) Analice las implicaciones del comportamiento de las soluciones de este sistema considerado en el texto para el movimiento del cubo.

LABORATORIO 4.1 Un circuito RLC periódicamente forzado

En este laboratorio continuamos el estudio de circuitos RLC simples que comenzamos en un laboratorio del capítulo 3. El circuito se muestra en la figura 4.37. Los parámetros son la resistencia R, la capacitancia C y la inductancia L. Las variables dependientes que usamos son el voltaje a través del capacitor v_C y la corriente i. (Seguimos la convención ingenieril de representar la corriente como i. Esta variable *no* representa la raíz cuadrada de -1.) En este laboratorio consideramos circuitos en los que la fuente de voltaje $v_T = v_T(t)$ es un término de forzamiento dependiente del tiempo.

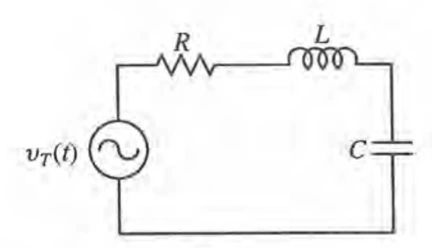


Figura 4.37
Un circuito RLC.

Del laboratorio en el capítulo 3 sabemos que el voltaje v_C y la corriente i satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{i}{C}$$
$$\frac{di}{dt} = -\frac{v_C}{L} - \frac{R}{L}i - \frac{v_T(t)}{L},$$

que es más conveniente escribir como la ecuación de segundo orden

$$LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = v_T(t).$$

En este laboratorio consideramos el posible comportamiento de soluciones para esta ecuación (o del sistema correspondiente) cuando $v_T(t) = a \operatorname{sen} \omega t$.

En su reporte, tome en cuenta las siguientes preguntas:

1. Suponiendo que R, C y L son no negativas, ¿qué tipos de comportamiento de largo plazo son posibles para soluciones de la ecuación

$$LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = a \operatorname{sen} \omega t?$$

Describa cómo depende el comportamiento de las soluciones de los parámetros a y ω.

2. En un circuito típico R es del orden de 1 000, C es del orden de 10^{-6} y L es aproximadamente 1. ¿Ayuda esta información a predecir los posibles comportamientos de las soluciones?

3. Describa las soluciones para varios valores de a y ω si $R = 2\,000$, $C = 2 \times 10^{-7}$ y $L = 1.5$.

Sobre su reporte: Incluya cada uno de los incisos anteriores, justificando todos los enunciados y mostrando todos los detalles. Grafique las soluciones según sea apropiado.

5 SISTEMAS NO LINEALES

En este capítulo estudiaremos los sistemas no lineales autónomos. En el capítulo 3 vimos que, usando una combinación de procedimientos analíticos y geométricos, podemos entender los sistemas lineales completamente. Aquí combinamos esos métodos lineales con algunas técnicas cualitativas adicionales para abordar los sistemas no lineales. Si bien esos procedimientos no nos permiten determinar los retratos fase de todos los sistemas no lineales, sí podremos tratar algunos sistemas no lineales importantes.

Primero mostraremos cómo puede aproximarse un sistema no lineal a un punto de equilibrio por medio de un sistema lineal. Este proceso, conocido como "linearización", es uno de los procedimientos que se aplican con mayor frecuencia. Estudiando la aproximación lineal, podemos predecir el comportamiento de las soluciones del sistema no lineal, por lo menos cerca del punto de equilibrio.

Luego expondremos un método cualitativo con el que se puede obtener más información de un campo de direcciones, solamente observando en qué punto de éste una componente es cero (es decir, dónde es vertical u horizontal el campo), obtenemos las curvas llamadas "nulclinales", que subdividen el espacio fase. Cuando estas curvas se combinan con la linearización de los puntos de equilibrio, en algunos casos pueden dar una descripción completa de los comportamientos posibles a largo plazo de las soluciones.

En el resto del capítulo estudiaremos algunos tipos especiales de modelos y sus sistemas no lineales. Estos últimos son importantes porque surgen de aplicaciones y porque los procedimientos implicados en sus análisis son muy entretenidos.

5.1 ANÁLISIS DEL PUNTO DE EQUILIBRIO

Como resultado de nuestro estudio en el capítulo 3, ahora podemos entender las soluciones de los sistemas lineales, tanto cualitativa como cuantitativamente. Sin embargo, por lo general los sistemas no lineales se prestan menos a los procedimientos analíticos y algebraicos que hemos desarrollado, pero podemos usar las matemáticas de los sistemas lineales para entender el comportamiento de las soluciones de los sistemas no lineales cerca de sus puntos de equilibrio.

La ecuación de Van der Pol

Para ilustrar cómo analizar el comportamiento de soluciones cerca de un punto de equilibrio, comenzamos con un sistema no lineal simple pero importante: el sistema Van der Pol, que estudiamos numéricamente en la sección 2.4 (p. 187). Recuerde que este sistema es

$$\frac{dx}{dt} = y$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + (1 - x^2)y.$$

Su campo de direcciones y plano fase se muestran en la figura 5.1.

El único punto de equilibrio de este sistema es el origen, por lo que examinaremos cómo se comportan las soluciones cerca del origen. El campo de direcciones muestra que las soluciones se mueven alrededor del origen, y si trazamos las aproximaciones numéricas de éstas cerca de ese punto vemos una gráfica que nos recuerda una fuente espiral (vea la figura 5.2).

Podemos entender por qué las soluciones se mueven alejándose en espiral desde el origen, aproximando el sistema Van der Pol con otro que sea mucho más fácil de analizar. Aunque el sistema no es lineal, contiene sólo un término no lineal, x^2y, en la ecuación para dy/dt. Si x y y son pequeñas, entonces este término es mucho más pequeño que cualquiera de los otros en la ecuación. Por ejemplo, si x y y son iguales a 0.1, entonces el término x^2y es igual a 0.001, que es considerablemente menor que x o y. Si x y y son iguales a 0.01,

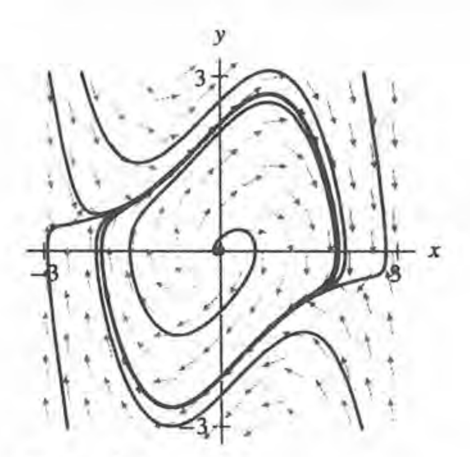


Figura 5.1
Campo de direcciones y plano fase para el sistema Van der Pol.

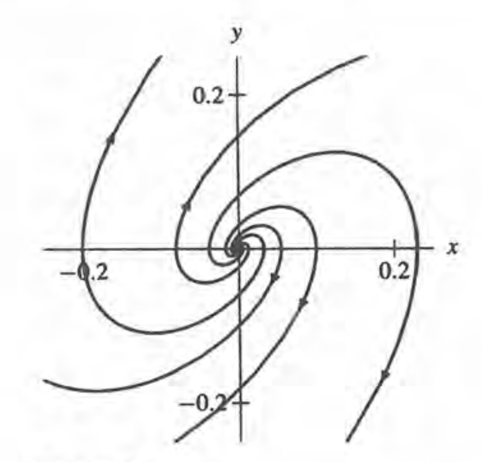


Figura 5.2
Plano fase para el sistema Van der Pol cerca del origen.

entonces $x^2y = 10^{-6}$, que de nuevo es mucho menor que x o y. Tal vez podemos aproximar el sistema Van der Pol por otro en el que simplemente despreciemos el término x^2y, por lo menos si x y y están cercanas a 0. Si cancelamos este término del sistema, nos queda

$$\frac{dx}{dt} = y$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + y,$$

que es un sistema lineal. En consecuencia, son aplicables los procedimientos del capítulo 3. Los eigenvalores del sistema lineal son $(1 \pm \sqrt{3}i)/2$, y como son complejos con una parte real que es positiva, sabemos que las soluciones del sistema lineal se mueven en espiral alejándose desde el origen.

El sistema lineal y el sistema Van der Pol tienen campos vectoriales que están muy cercanos entre sí cerca del punto de equilibrio en el origen. Como las soluciones del sistema lineal se mueven en espiral alejándose del origen, no debe sorprendernos que las soluciones del sistema Van der Pol que se inicien cerca del origen también se alejen en espiral.

El procedimiento que aplicamos arriba se llama **linearización**. Cerca del punto de equilibrio, aproximamos el sistema no lineal por medio de un sistema lineal apropiado. Para condiciones iniciales cerca del punto de equilibrio, las soluciones del sistema no lineal y de la aproximación lineal permanecen cercanas entre sí por lo menos en algún intervalo.

Un modelo de especies en competencia

Sean x y y las poblaciones de dos especies que compiten por recursos. Un incremento en cualquier especie tiene un efecto adverso sobre la razón de crecimiento de la otra. Un ejemplo de un modelo de este tipo de sistema es

$$\frac{dx}{dt} = 2x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 3y\left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy.$$

Aunque los términos contenidos en esas ecuaciones se basan en hipótesis razonables, escogemos coeficientes que simplifiquen nuestro análisis en vez de modelar alguna especie particular.

Observe que para un valor dado de x, si y se incrementa entonces el término $-xy$ ocasiona que dx/dt decrezca. De modo similar, para un valor dado de y, si x crece entonces $-2xy$ provoca que dy/dt disminuya. Un aumento en la población de cualquiera de las especies ocasiona una disminución en la razón de crecimiento de la otra.

Análisis cualitativo

Empezaremos nuestro análisis de este sistema tomando en cuenta que si $y = 0$, tenemos $dy/dt = 0$. En otras palabras, si las y están extintas, así permanecerán por un tiempo indefinido. Si $y = 0$,

$$\frac{dx}{dt} = 2x\left(1 - \frac{x}{2}\right),$$

que es un modelo logístico de población con una capacidad de soporte de 2. La línea fase de esta ecuación concuerda con el eje x del plano fase. En particular (0, 0) y (2, 0) son puntos de equilibrio del sistema. Del mismo modo, si $x = 0$, tenemos $dx/dt = 0$, por lo que la línea fase de

$$\frac{dy}{dt} = 3y\left(1 - \frac{y}{3}\right)$$

coincide con el eje y del plano fase del sistema y (0, 3) es otro punto de equilibrio.

Por el teorema de unicidad, las soluciones con condiciones iniciales en el primer cuadrante deben permanecer en esa región para siempre. Es decir, los ejes coinciden con curvas solución y el teorema de unicidad garantiza que las soluciones no pueden cruzarlos. Como este modelo se refiere a poblaciones, y si el crecimiento negativo para éstas no tiene sentido, limitaremos nuestra atención a soluciones contenidas sólo en el primer cuadrante.

Encontramos los puntos de equilibrio despejando x y y en el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy = 0 \\ 3y\left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy = 0, \end{cases}$$

que puede reescribirse en la forma

$$\begin{cases} x(2 - x - y) = 0 \\ y(3 - y - 2x) = 0. \end{cases}$$

La primera ecuación se satisface si $x = 0$ o si $2 - x - y = 0$, y la segunda se cumple si $y = 0$ o si $3 - y - 2x = 0$.

Supongamos primero que $x = 0$. Entonces la ecuación $y = 0$ da un punto de equilibrio en el origen y $3 - y - 2x = 0$ y lo proporciona en (0, 3).

Digamos ahora que $2 - x - y = 0$. Entonces la ecuación $y = 0$ da un punto de equilibrio en (2, 0) y $3 - y - 2x = 0$ lo da en (1, 1). (Resuelva las ecuaciones simultáneas $2 - x - y = 0$ y $3 - y - 2x = 0$.) Por tanto, los puntos de equilibrio son (0, 0), (0, 3), (2, 0) y (1, 1).

Linearización de este sistema alrededor de (1, 1)

El punto de equilibrio (1, 1) es de particular interés. Su existencia indica que es posible para esas dos especies coexistir en equilibrio. Si calculamos numéricamente el plano fase para este sistema (vea la figura 5.3), las soluciones parecen tener sólo tres tipos diferentes de comportamientos a largo plazo. Unas soluciones tienden a (2, 0), algunas más a (0, 3) y otras a (1, 1).

Quedan dos preguntas importantes. Primero, ¿qué soluciones tienden al punto de equilibrio (1, 1)? En particular, ¿es suficientemente grande el conjunto de esas soluciones para que esperemos encontrar el ejemplo de una solución como ésta en la naturaleza? Segundo, ¿qué es lo que divide a las condiciones iniciales que dan soluciones en las que x tiende a cero de aquellas donde y tiende a cero? Para responderlas, estudiamos el sistema cerca del punto de equilibrio (1, 1) usando la linearización.

Los sistemas lineales siempre tienen un punto de equilibrio en el origen. Por tanto, el primer paso al comparar el sistema no lineal cerca del punto de equilibrio (1, 1) con uno

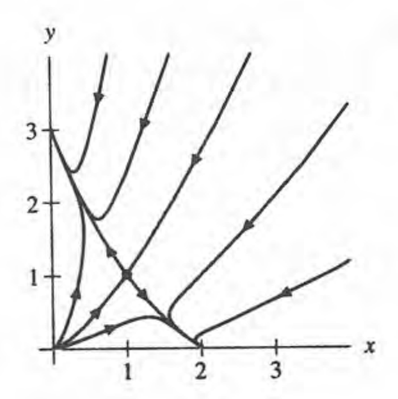


Figura 5.3
Plano fase para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = 2x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 3y\left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy.$$

lineal es mover ese punto al origen por medio de un cambio de variables. Una vez que lo hemos reubicado, podemos usar las mismas ideas que en el caso del ejemplo Van der Pol para identificar la aproximación lineal.

Para mover el punto de equilibrio al origen, introducimos dos nuevas variables, u y v, mediante las fórmulas $u = x - 1$ y $v = y - 1$. Note que u y v están cerca de 0 cuando (x, y) está cerca de $(1, 1)$. Para obtener el sistema en las nuevas variables, calculamos primero

$$\frac{du}{dt} = \frac{d(x-1)}{dt} = \frac{dx}{dt}$$
$$\frac{dv}{dt} = \frac{d(y-1)}{dt} = \frac{dy}{dt}.$$

Los lados derechos del sistema en las nuevas variables están dados por

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy \\ &= 2(u+1)\left(1 - \frac{u+1}{2}\right) - (u+1)(v+1) \\ &= -u - v - u^2 - uv,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= 3y\left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy \\ &= 3(v+1)\left(1 - \frac{v+1}{3}\right) - 2(u+1)(v+1) \\ &= -2u - v - 2uv - v^2.\end{aligned}$$

En términos de las nuevas variables, tenemos

$$\frac{du}{dt} = -u - v - u^2 - uv$$
$$\frac{dv}{dt} = -2u - v - 2uv - v^2.$$

Como esperábamos, el origen es un punto de equilibrio para este sistema. La expresión para du/dt contiene los términos $-u$ y $-v$ y los términos no lineales $-u^2$ y $-uv$. Para

dv/dt, los términos lineales son $-2u$ y $-v$, y los no lineales son $-2uv$ y $-v^2$. Cerca del origen, los términos no lineales son mucho más pequeños que los lineales y, por lo tanto podemos aproximar el sistema no lineal cerca de $(u, v) = (0, 0)$ con el lineal

$$\frac{du}{dt} = -u - v$$
$$\frac{dv}{dt} = -2u - v.$$

Los eigenvalores de este sistema son $-1 \pm \sqrt{2}$. Uno de esos números es positivo y el otro es negativo, por lo que $(u, v) = (0, 0)$ es un punto silla para el sistema lineal (vea la figura 5.4). Como los sistemas lineal y no lineal son aproximadamente iguales, esperamos que el plano fase para el sistema no lineal cerca del punto de equilibrio $(x, y) = (1, 1)$ se vea como el plano uv del sistema lineal.

Concluimos que sólo hay dos curvas de soluciones en el plano x-y que tienden hacia el punto de equilibrio $(1, 1)$ cuando t crece. Por consiguiente, las soluciones cercanas a $(1, 1)$ forman un conjunto muy pequeño. Aun si las condiciones iniciales se escogen exactamente sobre algunas de estas curvas, perturbaciones arbitrariamente pequeñas pueden empujar a dichas condiciones iniciales hacia uno u otro lado. Como nuestro modelo es sólo una versión muy simplificada de la dinámica de las poblaciones, que deja fuera innumerables fuentes de tales perturbaciones, no esperamos ver soluciones que conduzcan al punto de equilibrio $(1, 1)$ en la naturaleza.

Por otra parte, las curvas soluciones que tienden a $(1, 1)$ juegan un papel importante en el estudio de este sistema. Viendo el plano fase, notamos que una de estas curvas divide el primer cuadrante en dos regiones. En una región sobrevive una especie y en la otra sobrevive la otra población (vea la figura 5.3).

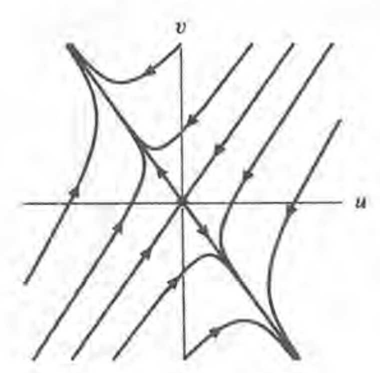


Figura 5.4
Plano fase para

$$\frac{du}{dt} = -u - v$$
$$\frac{dv}{dt} = -2u - v,$$

la aproximación lineal del sistema en competencia cerca de $(x, y) = (1, 1)$, que es el mismo punto que $(u, v) = (0, 0)$.

Un ejemplo no polinomial

Los dos ejemplos anteriores tienen campos vectoriales que son polinomios. Cuando el campo vectorial es un polinomio y el punto de equilibrio en consideración es el origen, es muy fácil identificar qué términos son lineales y cuáles no lo son. Pero no todos los campos vectoriales son dados por polinomios.

Considere el sistema

$$\frac{dx}{dt} = y$$
$$\frac{dy}{dt} = -y - \operatorname{sen} x.$$

Este sistema es un modelo para el movimiento de un péndulo amortiguado que estudiaremos extensamente en las secciones 5.3 y 5.4. Los puntos de equilibrio de este sistema ocurren en los puntos $(x, y) = (0, 0)$, $(\pm\pi, 0)$, $(\pm 2\pi, 0)$, etc. Supongamos que queremos estudiar las soluciones cercanas al punto de equilibrio en (0, 0). Como dy/dt contiene un término sen x, no se observa de inmediato cuáles son los términos lineales de este sistema. Sin embargo, del cálculo sabemos que el desarrollo en series de potencia de sen x es

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Por tanto, podemos escribir

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -y - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots\right).\end{aligned}$$

Cerca del origen cancelamos los términos no lineales y nos quedamos con el sistema lineal

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -y - x.\end{aligned}$$

Los eigenvalores de este sistema son $(-1 \pm \sqrt{3}i)/2$. Como éstos son números complejos con partes reales negativas, esperamos que el correspondiente punto de equilibrio para el sistema no lineal sea un sumidero espiral (vea las figuras 5.5 y 5.6).

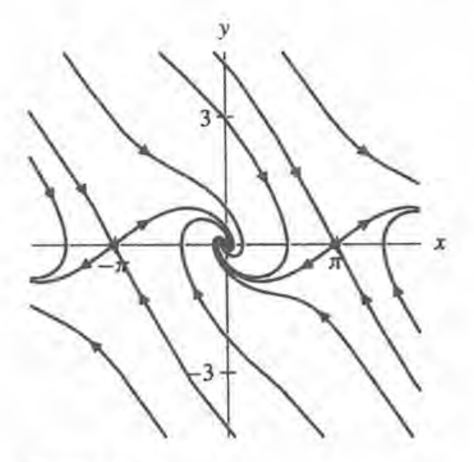


Figura 5.5
Plano fase para el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -y - \operatorname{sen} x.\end{aligned}$$

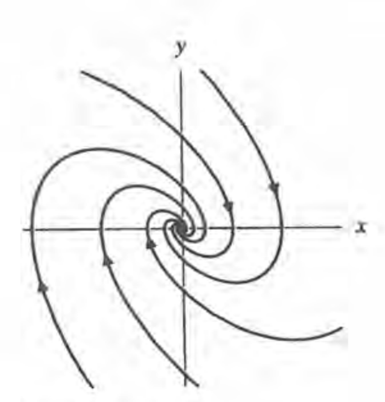


Figura 5.6
Plano fase para el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -y - x.\end{aligned}$$

Linearización

El siguiente paso es hacer el proceso de linearización más ordenado. En los ejemplos anteriores hicimos un cambio de variables para mover el punto de equilibrio al origen. Luego identificamos los términos lineales y no lineales usando cálculo (en caso necesario).

Considere la forma general de un sistema no lineal

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x, y).$$

Suponga que (x_0, y_0) es un punto de equilibrio para este sistema. Queremos entender qué sucede con las soluciones cerca de (x_0, y_0), es decir, linearizar el sistema cerca de (x_0, y_0). Introducimos nuevas variables

$$u = x - x_0$$
$$v = y - y_0$$

que mueven el punto de equilibrio al origen. Si x y y están cerca del punto de equilibrio (x_0, y_0), entonces u y v tienden a 0.

Como $x = u + x_0$ y $y = v + y_0$ y los números x_0 y y_0 son constantes, el sistema escrito en términos de u y v es

$$\frac{du}{dt} = \frac{d(x - x_0)}{dt} = \frac{dx}{dt} = f(x, y) = f(x_0 + u, y_0 + v)$$
$$\frac{dv}{dt} = \frac{d(y - y_0)}{dt} = \frac{dy}{dt} = g(x, y) = g(x_0 + u, y_0 + v).$$

Por tanto, tenemos

$$\frac{du}{dt} = f(x_0 + u, y_0 + v)$$
$$\frac{dv}{dt} = g(x_0 + u, y_0 + v).$$

Si $u = v = 0$, el lado derecho de este sistema desaparece, por lo que hemos movido el punto de equilibrio al origen en el plano u-v.

Ahora eliminaremos los términos "de orden superior" o no lineales en las expresiones para du/dt y dv/dt. Como esas expresiones pueden incluir funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, no siempre es claro cuáles son los términos lineales. En este caso es necesario estudiar f y g con más atención.

La idea básica del cálculo diferencial es que es posible estudiar una función analizando su "mejor aproximación lineal"; la cual está dada por el plano tangente para funciones de dos variables. Por tanto, tenemos

$$f(x_0 + u, y_0 + v) \approx f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right] u + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right] v,$$

cuyo lado derecho es la ecuación para el plano tangente a la gráfica de f en (x_0, y_0). (Esta expresión es también la aproximación polinomial de primer grado de Taylor para f.)

Podemos entonces reescribir el sistema para du/dt y dv/dt como

$$\frac{du}{dt} = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right]u + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right]v + \dots$$

y

$$\frac{dv}{dt} = g(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)\right]u + \left[\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\right]v + \dots,$$

donde "..." significa los términos que forman la diferencia entre el plano tangente y la función. Ésos son precisamente los términos que deseamos ignorar al formar la aproximación lineal del sistema. Como $f(x_0, y_0) = 0$ y $g(x_0, y_0) = 0$, podemos usar la notación matricial para escribir el sistema en forma breve, así:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{du}{dt} \\ \dfrac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \dots$$

La matriz de 2×2 de las derivadas parciales en esta expresión se llama **matriz jacobiana** del sistema en (x_0, y_0).

En consecuencia, el **sistema linearizado** en el punto de equilibrio (x_0, y_0) es

$$\begin{pmatrix} \dfrac{du}{dt} \\ \dfrac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Usamos este sistema de "linearización" para estudiar el comportamiento de soluciones del sistema no lineal cerca del punto de equilibrio (x_0, y_0). Observe que para crear el sistema linearizado sólo necesitamos conocer las derivadas parciales de las componentes del campo vectorial en el punto de equilibrio. No tenemos que calcular el cambio de variables moviendo el punto de equilibrio al origen.

Como siempre, la derivada de una función no lineal únicamente proporciona una aproximación local. Por consiguiente, las soluciones del sistema linearizado sólo están cercanas a las del sistema no lineal cerca del punto de equilibrio. La pregunta de qué tan próximos debemos estar del punto de equilibrio para que la aproximación lineal sea de valor depende del tamaño de los términos no lineales.

Más ejemplos de linearización

Considere el sistema no lineal

$$\frac{dx}{dt} = -2x + 2x^2$$
$$\frac{dy}{dt} = -3x + y + 3x^2.$$

Hay dos puntos de equilibrio para este sistema: (0, 0) y (1, 0). Para entender las soluciones que comienzan cerca de éstos, calculamos primero la matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 4x & 0 \\ -3 + 6x & 1 \end{pmatrix}$$

ya que $f(x, y) = -2x + 2x^2$ y $g(x, y) = -3x + y + 3x^2$. En los dos puntos de equilibrio, tenemos

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(1,0) & \frac{\partial g}{\partial y}(1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cerca de (0, 0), el plano fase para el sistema no lineal debe parecerse al del sistema linearizado

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{Y}.$$

Los eigenvalores de este sistema lineal son -2 y 1, por lo que el origen es un punto silla. Podemos calcular que (0, 1) es un eigenvector para el eigenvalor 1 y que (1, 1) es un eigenvector para el eigenvalor -2. Usando esta información, podemos esbozar el plano fase para el sistema lineal (vea la figura 5.7).

En (1, 0), el otro punto de equilibrio, el sistema linearizado es

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{Y}.$$

Los eigenvalores aquí son 2 y 1, por lo que para este sistema el origen es una fuente. Usando el hecho de que (0, 1) es un eigenvector para el eigenvalor 1, y (1, 3) lo es para el eigenvalor 2, podemos esbozar el plano fase (vea la figura 5.8).

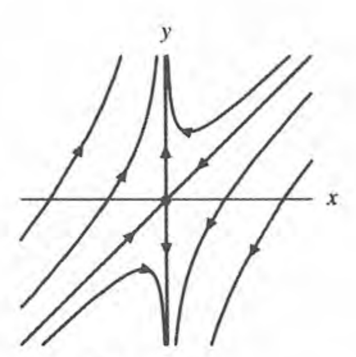


Figura 5.7
Plano fase para el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{Y}.$$

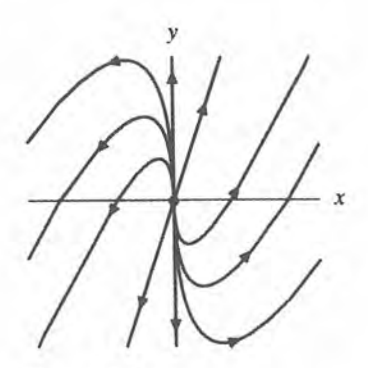


Figura 5.8
Plano fase para el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{Y}.$$

Cerca de los dos puntos de equilibrio, el plano fase para el sistema no lineal se parece al de los sistemas linearizados. Las curvas solución (numéricamente aproximadas por la computadora) se muestran en la figura 5.9. Si amplificamos el plano fase cerca de (0, 0) y (1, 0), vemos que las curvas solución efectivamente se parecen a las de los sistemas linearizados correspondientes (vea la figura 5.9).

Clasificación de los puntos de equilibrio

La idea fundamental en que se basa el procedimiento de linearización es usar un sistema lineal para predecir el comportamiento de las soluciones de un sistema no lineal cerca de un punto de equilibrio. En las inmediaciones de dicho punto, las soluciones de los sistemas lineales y no lineales están cercanas entre sí, por lo menos en un intervalo corto. Para la mayor parte de los sistemas, la información ganada al estudiar la linearización es suficiente para determinar el comportamiento a largo plazo de las soluciones del sistema no lineal cerca del punto de equilibrio.

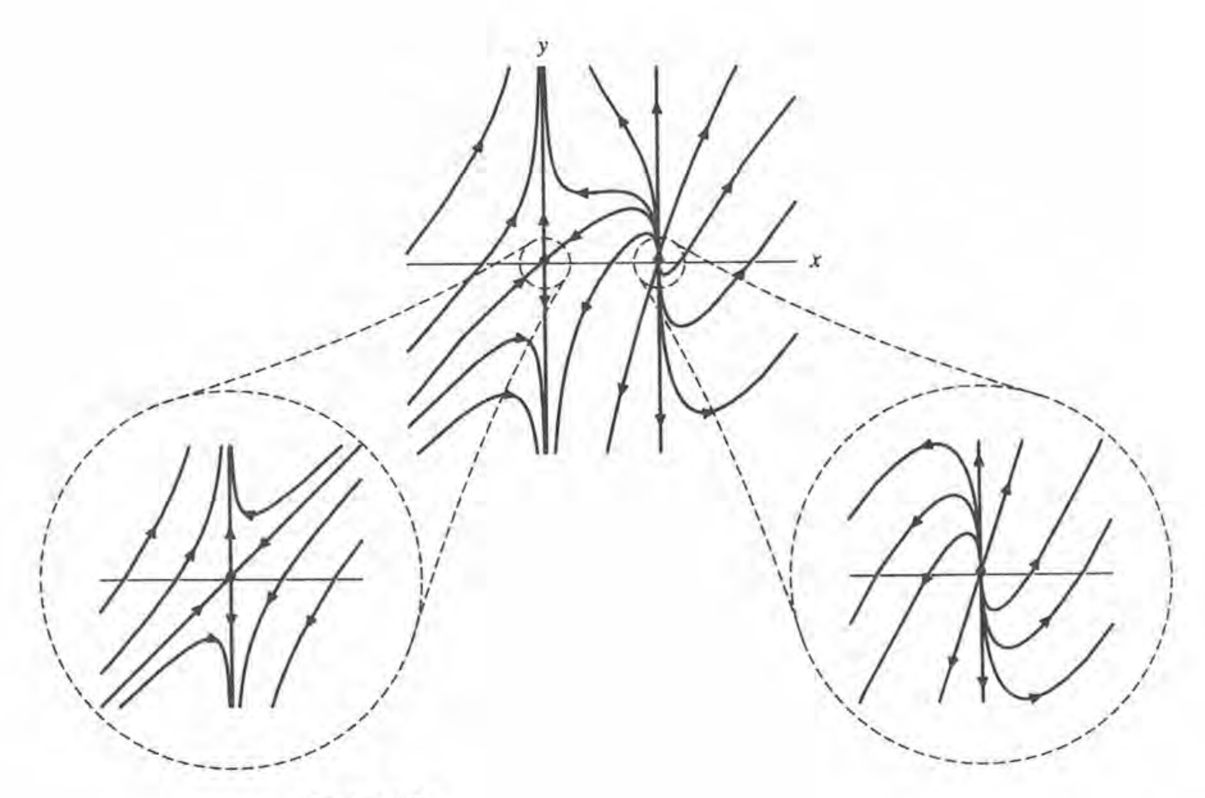


Figura 5.9
Curvas solución y amplificaciones cerca de los puntos fijos para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -2x + 2x^2$$
$$\frac{dy}{dt} = -3x + y + 3x^2.$$

Por ejemplo, considere el sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x, y).$$

Suponga que (x_0, y_0) es un punto de equilibrio y sea

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

la matriz jacobiana en (x_0, y_0). El sistema linearizado es

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Si todos los eigenvalores de la matriz jacobiana son números reales negativos o números complejos con parte real negativa, entonces $(u, v) = (0, 0)$ es un sumidero para el sistema lineal y todas las soluciones se acercan a $(u, v) = (0, 0)$ cuando $t \to \infty$. Para el sistema no lineal, las soluciones que empiezan cerca del punto de equilibrio $(x, y) = (x_0, y_0)$ se acercan a éste cuando $t \to \infty$. Por tanto, decimos que (x_0, y_0) es un **sumidero.** Si los eigenvalores son complejos, entonces (x_0, y_0) es un **sumidero espiral.**

De modo similar, si la matriz jacobiana sólo tiene eigenvalores positivos o eigenvalores complejos con una parte real positiva, entonces las soluciones con condiciones iniciales cerca del punto de equilibrio (x_0, y_0) tienden a alejarse de éste cuando t crece. Decimos entonces que para un sistema no lineal el punto (x_0, y_0) es una **fuente.** Si los eigenvalores son complejos, entonces (x_0, y_0) es una **fuente espiral.**

Si la matriz jacobiana tiene un eigenvalor positivo y uno negativo, entonces el punto de equilibrio (x_0, y_0) es un **punto silla.** Igual que para un sistema lineal con un punto silla en el origen, hay dos curvas de soluciones que se acercan al punto de equilibrio cuando t se incrementa y otras dos que también se aproximan a dicho punto conforme t decrece (vea las figuras 5.7 y 5.9). Para el sistema no lineal, esas curvas de soluciones no tienen que ser líneas rectas. Las demás soluciones, con posición inicial cerca de (x_0, y_0), se alejan cuando t crece y t decrece.

Un recordatorio

Es importante recordar que esta clasificación de los puntos de equilibrio para los sistemas no lineales no dice nada acerca del comportamiento de las soluciones con posiciones iniciales lejanas a (x_0, y_0).

Separatrices

Las cuatro curvas solución especiales que tienden hacia un punto silla cuando $t \to \infty$ o $t \to -\infty$ se denominan **separatrices.** (Una de esas curvas por sí misma se llama una *separatriz.*) Y tienen una importancia especial porque separan las soluciones con diferentes comportamientos. Las **separatrices estables** son aquellas donde las soluciones tienden

hacia el punto silla cuando $t \to \infty$, mientras que en las **separatrices inestables** las soluciones tienden hacia el punto silla cuando $t \to -\infty$.

En el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -2x + 2x^2$$
$$\frac{dy}{dt} = -3x + y + 3x^2$$

estudiado anteriormente, el origen es un punto silla (vea las figuras 5.7 y 5.9). La separatriz estable próxima al origen separa en dos partes la franja del plano fase limitada por las líneas $x = 0$ y $x = 1$. En esa región, las condiciones iniciales que están arriba de la separatriz dan soluciones en que $y(t) \to \infty$ cuando t se incrementa, mientras que las condiciones iniciales que están abajo de la separatriz dan soluciones en que $y(t) \to -\infty$ cuando t crece (vea la figura 5.10).

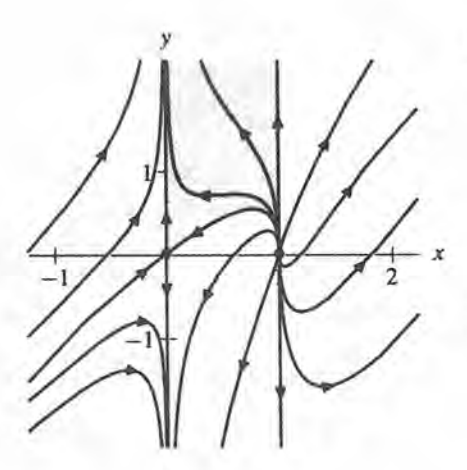


Figura 5.10
Separatrices de (0, 0) para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -2x + 2x^2$$
$$\frac{dy}{dt} = -3x + y + 3x^2,$$

y regiones de la franja entre $x = 0$ y $x = 1$ con diferentes comportamientos a largo plazo.

Cuando la linearización falla

Desafortunadamente, para algunos puntos de equilibrio de algunos sistemas la información que proporciona el sistema linearizado no es suficiente para determinar el comportamiento completo de las soluciones del sistema no lineal cerca del punto de equilibrio.

Por ejemplo, considere el sistema

$$\frac{dx}{dt} = y - (x^2 + y^2)x$$
$$\frac{dy}{dt} = -x - (x^2 + y^2)y.$$

El origen es un punto de equilibrio para este sistema y su sistema linearizado es

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Los eigenvalores de este sistema lineal son $\pm i$ y por tanto se trata de un centro. Todas las soluciones no cero del sistema linearizado son periódicas. De hecho, cada una de ellas es un círculo concéntrico al origen.

Sin embargo, no hay soluciones periódicas para el sistema no lineal. Para conocer la causa, consideremos el campo vectorial como una suma del campo vectorial lineal $\mathbf{V}_1(x, y) = (y, -x)$ y el campo vectorial no lineal $\mathbf{V}_2(x, y) = (-(x^2 + y^2)x, -(x^2 + y^2)y)$. $\mathbf{V}_1$ corresponde al sistema linearizado. Éste siempre es tangente a círculos con centro en el origen. Por otra parte, $\mathbf{V}_2(x, y) = (-(x^2 + y^2)x, -(x^2 + y^2)y)$ siempre señala directamente hacia (0, 0) ya que es un múltiplo escalar del campo $(-x, -y)$. (El número positivo es el escalar $x^2 + y^2$.) El resultado de sumar $\mathbf{V}_1(x, y)$ y $\mathbf{V}_2(x, y)$ es un campo vectorial que siempre tiene una componente radial negativa. Las soluciones del sistema no lineal se mueven entonces siempre en espiral hacia (0, 0) (vea la figura 5.11).

Note que si cambiamos los signos de los términos de orden superior en el sistema anterior, el resultado es

$$\frac{dx}{dt} = y + (x^2 + y^2)x$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + (x^2 + y^2)y$$

este sistema tiene la misma linearización cerca de (0, 0), pero ahora las soluciones se mueven en espiral alejándose del origen.

En este ejemplo, las soluciones del sistema no lineal y las del linearizado son aproximadamente las mismas cerca del origen, por lo menos durante un corto intervalo. Sin embargo, como el sistema linearizado es un centro, cualquier perturbación por mínima que sea puede cambiar el comportamiento a largo plazo de las soluciones. Aun aquella causada por la inclusión de los términos no lineales puede convertir al centro en un sumidero o una fuente espiral.

Afortunadamente, sólo existen dos situaciones en que el comportamiento a largo plazo de las soluciones cerca de un punto de equilibrio del sistema no lineal y su linearización pueden diferir. Una es cuando el sistema linearizado es un centro. La otra, cuando el sistema linearizado tiene cero como eigenvalor (vea los ejercicios). En cualquier otro caso, el comportamiento a largo plazo de las soluciones de un sistema no lineal cerca de un punto de equilibrio es el mismo que para las soluciones de su linearización.

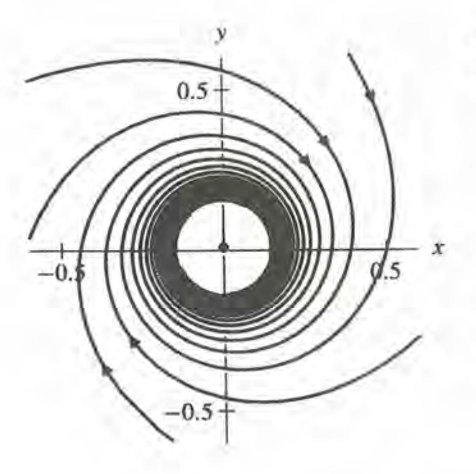


Figura 5.11
Las curvas solución para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = y - (x^2 + y^2)x$$
$$\frac{dy}{dt} = -x - (x^2 + y^2)y$$

se mueven en espiral lentamente hacia el punto de equilibrio en el origen, aun cuando la linearización ahí es un centro.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 5.1

1. Considere los tres sistemas

(i) $\dfrac{dx}{dt} = 2x + y$, $\dfrac{dy}{dt} = -y + x^2$ (ii) $\dfrac{dx}{dt} = 2x + y$, $\dfrac{dy}{dt} = y + x^2$ (iii) $\dfrac{dx}{dt} = 2x + y$, $\dfrac{dy}{dt} = -y - x^2$.

Los tres sistemas tienen un punto de equilibrio en (0, 0). ¿Cuáles dos sistemas tienen planos fase con el mismo "retrato local" cerca de (0, 0)? Justifique su respuesta. [*Sugerencia:* Se requieren muy pocos cálculos para este ejercicio, pero no deje de dar una justificación completa.]

2. Considere los tres sistemas siguientes:

(i) $\dfrac{dx}{dt} = 3\,\text{sen}\,x + y$, $\dfrac{dy}{dt} = 4x + \cos y - 1$ (ii) $\dfrac{dx}{dt} = -3\,\text{sen}\,x + y$, $\dfrac{dy}{dt} = 4x + \cos y - 1$ (iii) $\dfrac{dx}{dt} = -3\,\text{sen}\,x + y$, $\dfrac{dy}{dt} = 4x + 3\cos y - 3$.

Los tres sistemas tienen un punto de equilibrio en (0, 0). ¿Cuáles son los dos sistemas que tienen planos fase con el mismo "retrato local" cerca de (0, 0)? Justifique su respuesta. [*Sugerencia:* Se requieren muy pocos cálculos para este ejercicio, pero no deje de exponer sus argumentos.]

3. Para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -2x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = -y + x^2.$$

(a) Encuentre el sistema linearizado para el punto de equilibrio (0, 0).

(b) Clasifique (0, 0) (como fuente, sumidero, centro, . . .).

(c) Esboce el plano fase para el sistema no lineal cerca de (0, 0).

(d) Repita los incisos (a) a (c) para el punto de equilibrio en (2, 4).

4. En el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -x$$
$$\frac{dy}{dt} = -4x^3 + y.$$

(a) Demuestre que el origen es el único punto de equilibrio.

(b) Encuentre el sistema linearizado en el origen.

(c) Clasifíquelo y esboce su plano fase.

5. Considere el sistema en el ejercicio 4.

(a) Encuentre la solución general de la ecuación $dx/dt = -x$. [*Sugerencia:* La solución es tan fácil como parece ser.]

(b) Usando la solución del inciso (a) en vez de x, determine la solución general de la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = -4x^3 + y.$$

[*Sugerencia:* Esto proporciona un repaso de las ecuaciones lineales en la sección 1.8.]

(c) Use los resultados de los incisos (a) y (b) para obtener la solución general del sistema.

(d) Encuentre las curvas solución del sistema que tienden al origen cuando $t \to \infty$.

(e) Encuentre las curvas solución del sistema que se aproximan al origen cuando $t \to -\infty$.

(f) En el plano fase, esboce las curvas solución correspondientes a esas soluciones. Son las separatrices.

(g) Compare el esbozo del sistema linearizado que obtuvo en el ejercicio 4 contra un bosquejo de las soluciones separatrices para el punto de equilibrio en el origen para este sistema. ¿En qué se parecen las dos gráficas? ¿Cómo difieren?

6. Para el modelo de población de especies en competencia

$$\frac{dx}{dt} = 2x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 3y\left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy$$

estudiado en esta sección, mostramos que el punto de equilibrio (1, 1) es un punto silla.

(a) Encuentre el sistema linearizado cerca de cada uno de los otros puntos de equilibrio.

(b) Clasifique cada punto de equilibrio (como fuente, sumidero, punto silla, etcétera).

(c) Esboce el plano fase de cada sistema linearizado.

(d) Dé una breve descripción del plano fase cerca de cada punto de equilibrio del sistema no lineal.

En los ejercicios 7-16, restringimos la atención al primer cuadrante ($x, y \geq 0$). Para cada sistema,

(a) encuentre y clasifique todos los puntos de equilibrio (en el primer cuadrante),

(b) esboce el plano fase del sistema cerca de cada punto de equilibrio, y

(c) describa los comportamientos de las soluciones cerca de cada punto de equilibrio.

7.
$$\frac{dx}{dt} = x(-x - 3y + 150)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(-2x - y + 100)$$

8.
$$\frac{dx}{dt} = x(10 - x - y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(30 - 2x - y)$$

9.
$$\frac{dx}{dt} = x(100 - x - 2y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(150 - x - 6y)$$

10.
$$\frac{dx}{dt} = x(-x - y + 100)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(-x^2 - y^2 + 2500)$$

11. $\dfrac{dx}{dt} = x(-x - y + 40)$

$\dfrac{dy}{dt} = y(-x^2 - y^2 + 2500)$

12. $\dfrac{dx}{dt} = x(-4x - y + 160)$

$\dfrac{dy}{dt} = y(-x^2 - y^2 + 2500)$

13. $\dfrac{dx}{dt} = x(-8x - 6y + 480)$

$\dfrac{dy}{dt} = y(-x^2 - y^2 + 2500)$

14. $\dfrac{dx}{dt} = x(2 - x - y)$

$\dfrac{dy}{dt} = y(y - x^2)$

15. $\dfrac{dx}{dt} = x(2 - x - y)$

$\dfrac{dy}{dt} = y(y - x)$

16. $\dfrac{dx}{dt} = x(x - 1)$

$\dfrac{dy}{dt} = y(x^2 - y)$

17. Considere el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -x^3$$
$$\frac{dy}{dt} = -y + y^2.$$

El sistema tiene puntos de equilibrio en (0, 0) y (0, 1).

(a) Encuentre el sistema linearizado en (0, 0).

(b) Determine los eigenvalores y eigenvectores y dibuje el plano fase del sistema linearizado en (0, 0).

(c) Encuentre el sistema linearizado en (0, 1).

(d) Calcule los eigenvalores y eigenvectores y esboce el plano fase del sistema linearizado en (0, 1).

(e) Bosqueje el plano fase del sistema no lineal. [*Sugerencia:* El sistema se desacopla; dibuje entonces primero una línea fase para cada una de las ecuaciones individuales.]

(f) ¿Por qué se ven tan diferentes los planos fase para los sistemas lineales y no lineal cerca de los puntos de equilibrio?

18. Si un sistema no lineal depende de un parámetro, entonces los puntos de equilibrio pueden cambiar cuando varía el parámetro. En otras palabras, cuando éste se modifica puede ocurrir una bifurcación. Considere la familia paramétrica

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - a$$
$$\frac{dy}{dt} = -y(x^2 + 1),$$

donde a es el parámetro.

(a) Demuestre que el sistema no tiene puntos de equilibrio si $a < 0$.

(b) Compruebe que tiene dos puntos de equilibrio si $a > 0$.

(c) Demuestre que sólo posee un punto de equilibrio si $a = 0$.

(d) Encuentre la linearización del punto de equilibrio para $a = 0$ y calcule los eigenvalores de este sistema lineal.

Observación: Cuando el parámetro a crece desde $a = 0$, el sistema cambia de cero a dos puntos de equilibrio. Decimos que el sistema tiene una bifurcación en $a = 0$ y que $a = 0$ es un valor de bifurcación del parámetro.

19. Para continuar el estudio del sistema no lineal dado en el ejercicio 18,

(a) use el campo de direcciones para esbozar el plano fase para el sistema si $a = -1$,

(b) emplee el campo de direcciones y la linearización en el punto de equilibrio para bosquejar el plano fase para $a = 0$, y

(c) utilice el campo de direcciones y la linearización en los puntos de equilibrio para dibujar el plano fase para $a = 1$.

Observación: La transición de un sistema sin puntos de equilibrio a otro con un punto silla y un sumidero, a través de un punto de equilibrio con cero como eigenvalor, es típica de bifurcaciones que generan puntos de equilibrio.

En los ejercicios 20-25, cada sistema depende del parámetro a. En cada ejercicio,

(a) encuentre los puntos de equilibrio,

(b) determine todos los valores de a donde ocurre una bifurcación, y

(c) en un corto párrafo completo con figuras, describa el plano fase en, antes y después de cada valor de bifurcación.

20.
$$\frac{dx}{dt} = y - x^2$$
$$\frac{dy}{dt} = y - a$$

21.
$$\frac{dx}{dt} = y - x^2$$
$$\frac{dy}{dt} = a$$

22.
$$\frac{dx}{dt} = y - x^2$$
$$\frac{dy}{dt} = y - x - a$$

23.
$$\frac{dx}{dt} = y - ax^3$$
$$\frac{dy}{dt} = y - x$$

24.
$$\frac{dx}{dt} = y - x^2 + a$$
$$\frac{dy}{dt} = y + x^2 - a$$

25.
$$\frac{dx}{dt} = y - x^2 + a$$
$$\frac{dy}{dt} = y + x^2$$

26. El sistema

$$\frac{dx}{dt} = x(-x - y + 70)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(-2x - y + a)$$

es un modelo para un par de especies en competencia, en el cual dy/dt depende del parámetro a. Encuentre los dos valores de bifurcación de a. Describa el destino de las poblaciones x y y antes y después de cada bifurcación.

27. Suponga que dos especies X y Y se introducirán a una isla. Se sabe que ambas compiten entre sí, pero se desconoce la naturaleza precisa de su interacción. Suponemos que las poblaciones $x(t)$ y $y(t)$ de X y Y, respectivamente, son modeladas por un sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x, y).$$

(a) Suponga $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$; esto significa que $(0, 0)$ es un punto de equilibrio. ¿Cómo correlacionaría esto con la capacidad de X y Y para migrar a la isla?

(b) Si una pequeña población está formada por una sola especie que se reproduce rápidamente, ¿qué puede concluir acerca de los valores de $\partial f/\partial x$ y $\partial g/\partial y$ en $(0, 0)$?

(c) Como X y Y compiten por los recursos, la presencia de cualquiera de las especies disminuirá la razón de crecimiento de la otra población. ¿Nos dice algo lo anterior acerca de $\partial f/\partial y$ y $\partial g/\partial x$ en $(0, 0)$?

(d) Usando las hipótesis de los incisos (a) al (c), ¿qué tipo(s) de punto de equilibrio sería $(0, 0)$? [Podría haber más de una posibilidad. Especifíquelas todas.]

(e) Para cada una de las posibilidades del inciso (d), esboce un plano fase cerca de $(0, 0)$.

Justifique todas sus respuestas.

28. Para las dos especies X y Y del ejercicio 27, suponga que tanto X como Y se reproducen muy lentamente, y que la competencia entre ambas es muy intensa.

(a) ¿Qué puede usted concluir acerca de $\partial f/\partial x$ y $\partial g/\partial y$ en $(0, 0)$?

(b) ¿Cuál es su conclusión respecto de $\partial f/\partial y$ y $\partial g/\partial x$ en $(0, 0)$?

(c) ¿Qué tipo(s) de punto de equilibrio puede ser $(0, 0)$? [Puede haber más de una probabilidad. Si es así, especifíquelas todas.]

(d) Para cada una de las posibilidades anotadas en el inciso (c), esboce un plano fase cerca de $(0, 0)$.

Recuerde justificar todas sus respuestas.

29. Para las especies X y Y de los ejercicios 27 y 28, supongamos que X se reproduce muy rápidamente en la isla si no hay ninguna Y presente, y que la especie Y se reproduce lentamente si no hay ninguna X presente. También considere que la tasa de crecimiento de X disminuye significativamente por la presencia de Y, pero que Y es indiferente a la población de X.

(a) ¿Qué puede decir acerca de $\partial f/\partial x$ y $\partial g/\partial y$ en $(0, 0)$?

(b) ¿Y respecto de $\partial f/\partial y$ y $\partial g/\partial x$ en $(0, 0)$?

(c) ¿Cuáles son los posibles tipos del punto de equilibrio en $(0, 0)$? [Puede haber más de una probabilidad. Si es así, especifíquelas todas.]

(d) Para cada uno de los tipos anteriores, dibuje el plano fase cerca de $(0, 0)$.

Justifique todas sus respuestas.

30. Imagine que dos países similares Y y Z están comprometidos en una carrera armamentista. Sean $y(t)$ y $z(t)$ el tamaño de los acopios de armamentos de Y y Z, respectivamente. Modelamos la situación con el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy}{dt} = h(y, z)$$
$$\frac{dz}{dt} = k(y, z).$$

Suponga que todo lo que sabemos acerca de las funciones h y k son las dos hipótesis:

(i) Si el acopio de armas del país Z no está cambiando, entonces cualquier incremento en el acopio de Y da como resultado un decremento en la razón de aumento de producción de armas del país Y. Lo mismo es cierto para el país Z.

(ii) Si cualquier país aumenta su acopio, el otro responde incrementando su razón de producción de armas.

(a) ¿Qué implican las hipótesis respecto de $\partial h/\partial y$ y $\partial k/\partial z$?

(b) ¿Y qué implican acerca de $\partial h/\partial z$ y $\partial k/\partial y$?

(c) ¿Qué puntos de equilibrio son posibles para este sistema? Justifique su respuesta. [*Sugerencia:* Suponga que tiene un punto de equilibrio. ¿Qué implican sus resultados en los incisos(a) y (b) acerca de la matriz jacobiana en ese punto?]

5.2 ANÁLISIS CUALITATIVO

El proceso de linearización analizado en la sección 5.1 nos da un procedimiento bastante efectivo para entender el comportamiento de las soluciones de un sistema no lineal cerca de un punto de equilibrio. Desafortunadamente, la información "local" que proporciona sólo puede usarse cerca de puntos de equilibrio. (Hacer predicciones basadas en linearizaciones lejanas de los puntos de equilibrio puede acarrear consecuencias drásticas; vea la sección 4.5.)

Hasta ahora nuestros únicos procedimientos generales para el estudio del comportamiento de los sistemas no lineales lejos de los puntos de equilibrio son numéricos. Es cierto que el estudio numérico cuidadoso de un sistema puede dar considerable información acerca del comportamiento de sus soluciones. Sin embargo, es difícil saber si se han probado las condiciones iniciales suficientes para observar todos los posibles comportamientos de las soluciones. En esta sección desarrollaremos algunos procedimientos cualitativos que pueden combinarse con linearizaciones y métodos numéricos.

Especies en competencia

Recuerde el sistema

$$\frac{dx}{dt} = 2x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 3y\left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy,$$

donde x y y son poblaciones de dos especies que compiten por recursos (vea la sección 5.1).

En la sección 5.1 determinamos que los puntos de equilibrio son (0, 0), (0, 3), (2, 0) y (1, 1). Por linearización, encontramos que el punto (1, 1) es un punto silla. Hay una curva cuyas soluciones se acercan a (1, 1) cuando $t \to \infty$, y además separa el plano fase en

dos regiones. El uso de métodos numéricos sugiere que soluciones que no tienden a (1, 1), lo hacen hacia (0, 3) o a (2, 0) cuando t crece (vea la figura 5.12). Para verificar esta observación y entender mejor el comportamiento de las soluciones, veremos con más detalle el campo de direcciones.

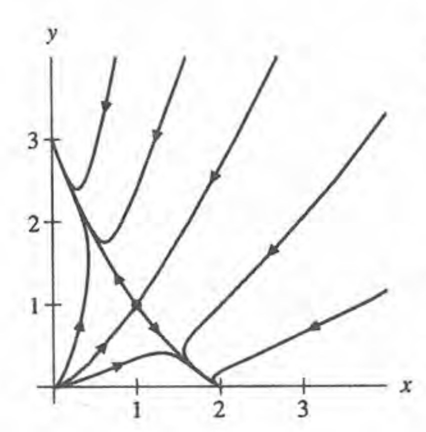


Figura 5.12
Retrato fase para el sistema de especies en competencia

$$\frac{dx}{dt} = 2x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 3y\left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy.$$

Este retrato fase generado por computadora sugiere que las soluciones que no tienden a (1, 1) lo hacen a (0, 3) o a (2, 0).

Nulclinales

El campo de direcciones para el sistema de las especies en competencia está esbozado en la figura 5.13. Podemos emplearla para hacer un bosquejo de las curvas solución, pero con un poco más de análisis cualitativo es posible dar una imagen mucho más completa del comportamiento de las soluciones. Una herramienta para este análisis es la **nulclinal.**

DEFINICIÓN Para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x, y),$$

la *nulclinal x* es el conjunto de puntos (x, y) donde $f(x, y)$ es cero, es decir, la curva de nivel donde $f(x, y)$ es cero. La *nulclinal y* es el conjunto de puntos donde $g(x, y)$ es cero.

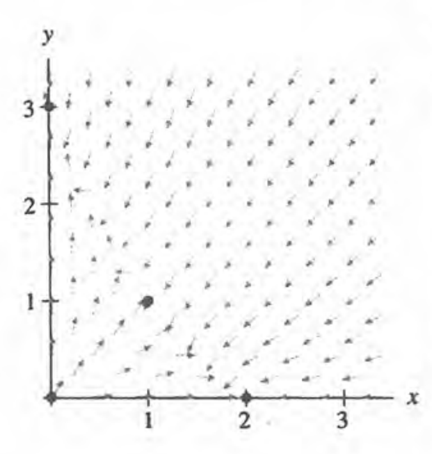


Figura 5.13
Campo de direcciones para el sistema de especies en competencia

$$\frac{dx}{dt} = 2x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 3y\left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy.$$

Es difícil juzgar el comportamiento a largo plazo de las soluciones sólo a partir del campo de direcciones.

A lo largo de la nulclinal x, la componente x es cero y en consecuencia el campo vectorial es vertical. Indica hacia arriba o hacia abajo. De modo similar, sobre la nulclinal y, la componente y es cero, por lo que el campo vectorial es horizontal. Señala hacia la izquierda o la derecha. Como $f(x, y)$ y $g(x, y)$ deben ser cero en un punto de equilibrio, las intersecciones de las nulclinales están en esos puntos.

Para mostrar cómo emplear las nulclinales en el análisis cualitativo de sistemas, consideremos nuestro ejemplo de especies en competencia

$$\frac{dx}{dt} = 2x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 3y\left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy.$$

Recuerde que sólo nos interesa saber qué sucede en el primer cuadrante ($x, y \geq 0$), ya que éste es un modelo de población. La nulclinal x es el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen

$$\frac{dx}{dt} = 2x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy = 0.$$

Como esta ecuación es equivalente a $x(2 - x - y) = 0$, la nulclinal x consiste en dos líneas, $x = 0$ y $y = -x + 2$. Sobre esas líneas la componente x del campo vectorial es cero. Entonces, el campo vectorial es vertical a lo largo de esas líneas. En el resto del plano fase, la componente x es o positiva o negativa. Si $dx/dt > 0$, las soluciones se mueven hacia la derecha; si $dx/dt < 0$, se desplazan a la izquierda. En la figura 5.14 marcamos parte de la nulclinal x con líneas verticales para no olvidar que a lo largo de ésta el campo vectorial es vertical. Podemos rotular las regiones fuera de la nulclinal x como "derecha" o "izquierda", dependiendo de que dx/dt sea positiva o negativa.

De manera semejante, la nulclinal y es la serie de puntos donde $dy/dt = 0$. Éste es el conjunto de puntos que satisfacen

$$3y\left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy = y(3 - y - 2x) = 0.$$

Esta serie también consiste en dos líneas, $y = 0$ y $y = -2x + 3$. Sobre éstas, la componente y del campo vectorial es cero, por lo que aquí el campo vectorial es horizontal. Sobre el resto del plano fase, si $dy/dt > 0$ las soluciones se mueven hacia arriba, o bien, si $dy/dt < 0$ las soluciones se mueven hacia abajo. En la figura 5.15 marcamos parte de la nulclinal y con segmentos horizontales, como recordatorio de que a lo largo de ésta el campo vectorial es horizontal. Resaltamos las regiones fuera de la nulclinal y como "arriba" o "abajo", dependiendo del signo de dy/dt.

Análisis usando nulclinales

En la figura 5.16 combinamos las nulclinales x y y. Los puntos de equilibrio ocurren en las intersecciones de éstas. Las nulclinales dividen el primer cuadrante en cuatro regiones designadas A, B, C y D. Podemos usar esta figura para hacer un análisis detallado del comportamiento de las soluciones de este sistema.

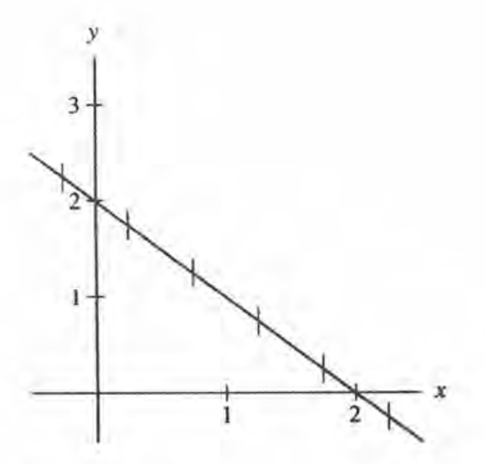


Figura 5.14
Las nulclinales x para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = 2x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 3y\left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy.$$

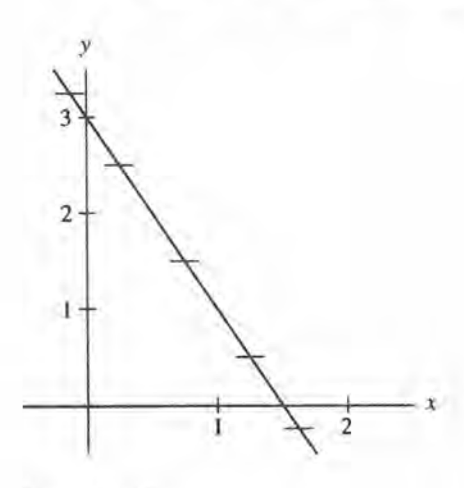


Figura 5.15
Las nulclinales y para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = 2x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 3y\left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy.$$

Primero consideremos la región triangular A (vea la figura 5.16). El segmento $0 < y < 3$ sobre el eje y es una curva solución, y el campo vectorial sobre los otros dos lados de A señalan hacia la región A. Por consiguiente, una solución que comience en esta región en el tiempo cero permanecerá ahí para todo tiempo positivo. No hay manera de que pueda salir. A se encuentra en las regiones "izquierda" ($dx/dt < 0$) y "superior" ($dy/dt > 0$) del plano fase, por lo que podemos marcarla "izquierda-superior". Es decir, cuando t se incrementa, las soluciones que se encuentran en A deben moverse hacia la esquina superior-izquierda de la región, hacia el punto de equilibrio (0, 3).

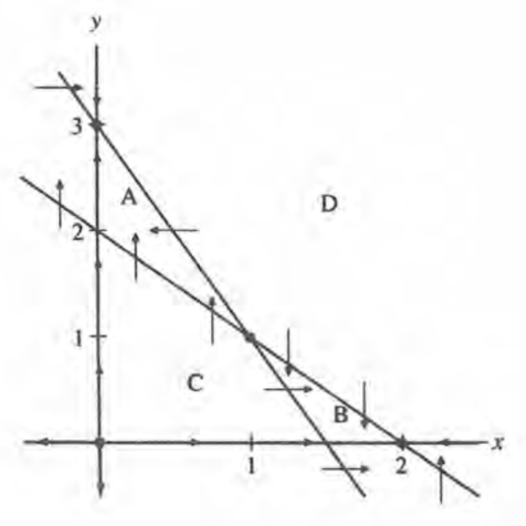


Figura 5.16
Las nulclinales x y y para

$$\frac{dx}{dt} = 2x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 3y\left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy.$$

Las nulclinales dividen el primer cuadrante en cuatro regiones marcadas como A, B, C y D.

De la misma manera, las soluciones tampoco pueden salir de la región B y se mueven "derecha-abajo" cuando t crece. Por tanto, todas las que se encuentran en dicha región tienden al punto de equilibrio (2, 0) cuando t se incrementa. En la figura 5.17 mostramos dos soluciones del modelo de las especies en competencia junto con sus gráficas $x(t)$ y $y(t)$.

Las soluciones en la región C se mueven "hacia arriba y hacia la derecha". Con esas soluciones pueden suceder tres cosas: o salen de la región C y entran a A, o salen de C y entran a B o se aproximan al punto de equilibrio (1, 1). Como este último es un punto silla, las soluciones que entran a A quedan divididas de las que entran a B por la separatriz estable de (1, 1).

Asimismo, las soluciones en la región D se mueven hacia la izquierda y hacia abajo, y tienden hacia las regiones A y B o al punto de equilibrio (1, 1). Nuevamente la separatriz estable de (1, 1) separa las soluciones que entran a A, y tienden a (0, 3) de aquellas que entran a B y se acercan a (2, 0).

Este análisis nos da un retrato cualitativo bastante completo del comportamiento de las soluciones del modelo de las especies en competencia. Sabemos que la mayor parte de las soluciones tienden a una población de equilibrio con una especie extinta y la otra en su capacidad de soporte (vea la figura 5.17). La separatriz estable del punto silla (1, 1) divide los dos comportamientos de largo plazo.

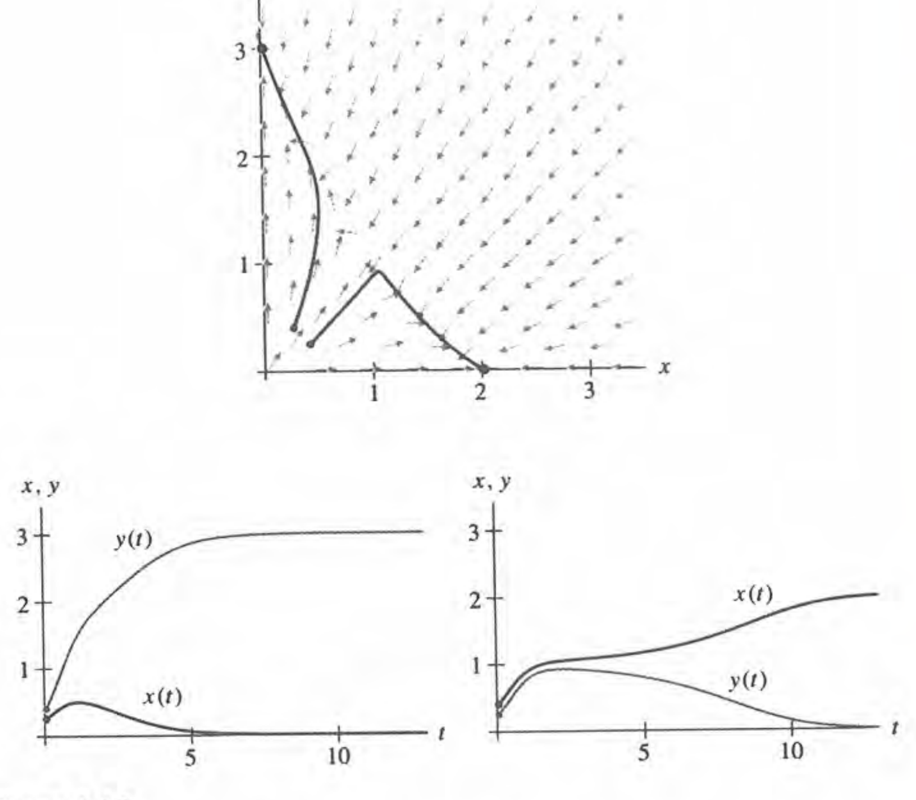


Figura 5.17
Dos soluciones en el plano fase para el sistema de especies en competencia anterior con sus correspondientes gráficas $x(t)$ y $y(t)$.

Observaciones importantes

En este ejemplo ambas nulclinales consisten en líneas rectas. Pero, por lo general, pueden ser cualquier tipo de curva, y pronto estudiaremos esos casos.

Observe también que en este ejemplo hay dos tipos muy diferentes de nulclinales. Para las que se encuentran a lo largo de los ejes x y y, el campo vectorial fue (por coincidencia) tangente a esas líneas. En consecuencia, las soluciones que comienzan sobre esas líneas permanecen en ellas para siempre. Podemos usar los procedimientos de la sección 1.6 para analizarlas completamente, ya que esas nulclinales son en realidad líneas fase para una ecuación unidimensional.

En este ejemplo, el campo vectorial no es tangente a las otras dos nulclinales, sino que traza la trayectoria de éstas; dichas líneas, a su vez, sólo nos dan información acerca de la dirección de las soluciones cuando cruzan la nulclinal.

En particular, es importante notar la diferencia entre una solución de línea recta (como se vio en el capítulo 3) y una nulclinal. La primera es una curva solución que corresponde a un eigenvector real para un sistema lineal. Una nulclinal es una curva a lo largo de la cual el campo vectorial es puramente horizontal o vertical. Es posible que una nulclinal y una solución de línea recta coincidan para algunos sistemas lineales, pero en general son diferentes.

Nulclinales que no son líneas

Como un ejemplo algo más complicado de cómo se usan las nulclinales, considere

$$\frac{dx}{dt} = 2x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy$$
$$\frac{dy}{dt} = y\left(\frac{9}{4} - y^2\right) - x^2 y.$$

Aún podemos interpretarlo como un modelo de especies en competencia, porque la razón de crecimiento de cada una de ellas decrece cuando la otra población se incrementa. En este modelo, las complicaciones adicionales en la ecuación dy/dt son con el fin de ilustrar nuestros procedimientos. Como es usual con los modelos de población, sólo consideramos las soluciones en el primer cuadrante.

La nulclinal x satisface la ecuación

$$x(2 - x - y) = 0,$$

que consta de las dos líneas $x = 0$ y $y = -x + 2$. La nulclinal y es el conjunto de puntos (x, y) que satisface

$$y\left(-x^2 - y^2 + \frac{9}{4}\right) = 0.$$

Esos puntos se encuentran sobre la línea $y = 0$ o sobre el círculo $x^2 + y^2 = 9/4 = (3/2)^2$. Los puntos de intersección de las nulclinales x y y dan los puntos de equilibrio $(0, 0)$, $(0, 3/2)$, $(1 + \sqrt{2}/4, 1 - \sqrt{2}/4) \approx (1.35, 0.65)$, $(1 - \sqrt{2}/4, 1 + \sqrt{2}/4) \approx (0.65, 1.35)$ y

(2, 0) (vea la figura 5.18). (El punto (0, −3/2) es también un punto de equilibrio, pero como se encuentra fuera del primer cuadrante, no es importante para nuestro análisis.)

Como en el ejemplo previo, los ejes x y y consisten en curvas solución. Si $y = 0$, entonces $dy/dt = 0$ y tenemos

$$\frac{dx}{dt} = 2x\left(1 - \frac{x}{2}\right),$$

que es la misma ecuación logística que en el ejemplo previo. Si $x = 0$, tenemos $dx/dt = 0$ y

$$\frac{dy}{dt} = y\left(-y^2 + \frac{9}{4}\right).$$

La línea fase para $dy/dt = y(-y^2 + 9/4)$ tiene puntos de equilibrio en $y = 0$, $y = 3/2$ (y $y = -3/2$ pero no estamos considerando $y < 0$). Sobre la línea fase, $y = 0$ es una fuente y $y = 3/2$ es un sumidero (vea la figura 5.19).

Las nulclinales x y y dividen el primer cuadrante en cinco regiones marcadas como A, B, C, D y E en la figura 5.18. Una solución que entra en A, B o C permanece ahí cuando t crece, ya que el campo vectorial sobre las fronteras de esas regiones nunca señala hacia afuera de ellas. Cuando marcamos las regiones con la dirección del campo vectorial (como "verticalmente hacia arriba" en la región D), vemos que las soluciones en A y B tienden hacia el punto de equilibrio (0.65, 1.35), mientras que aquellas en la región C tienden hacia (2, 0). En la figura 5.19 esbozamos el plano fase y las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ para dos de esas soluciones. Cuando éstas se encuentran en D y E, entran a una de las regiones A, B o C o tienden a uno de los puntos de equilibrio (0.65, 1.35) o (1.35, 0.65). De nueva cuenta, tenemos soluciones separatrices que dividen las soluciones que tienden a (0.65, 1.35) de las que se aproximan a (2, 0). Linearizando en (1.35, 0.65), podemos confirmar que se trata de un punto silla.

Usando análisis cualitativo que implique las nulclinales, podemos concluir que todas las soluciones en este modelo tienden hacia puntos de equilibrio conforme t aumenta, igual que en el modelo previo. La selección de hacia qué punto de equilibrio tiende la solución depende de la localización de la condición inicial. A diferencia del ejemplo previo, hay un conjunto grande de soluciones que se acercan al punto de equilibrio (0.65, 1.35), donde las poblaciones de ambas especies son positivas (coexistencia mutua). Las únicas soluciones que se aproximan al punto de equilibrio (0, 3/2), son aquellas sobre el eje y.

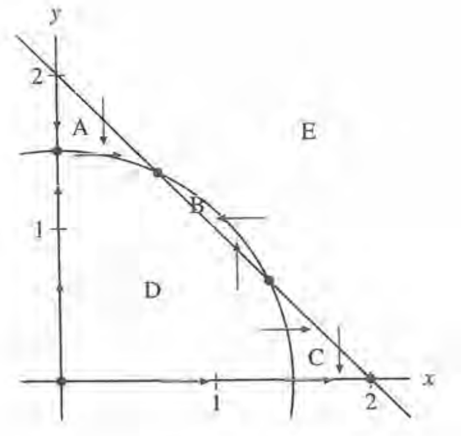


Figura 5.18
Nulclinales para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = 2x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy$$
$$\frac{dy}{dt} = y\left(\frac{9}{4} - y^2\right) - x^2 y.$$

Las nulclinales separan el primer cuadrante en cinco regiones.

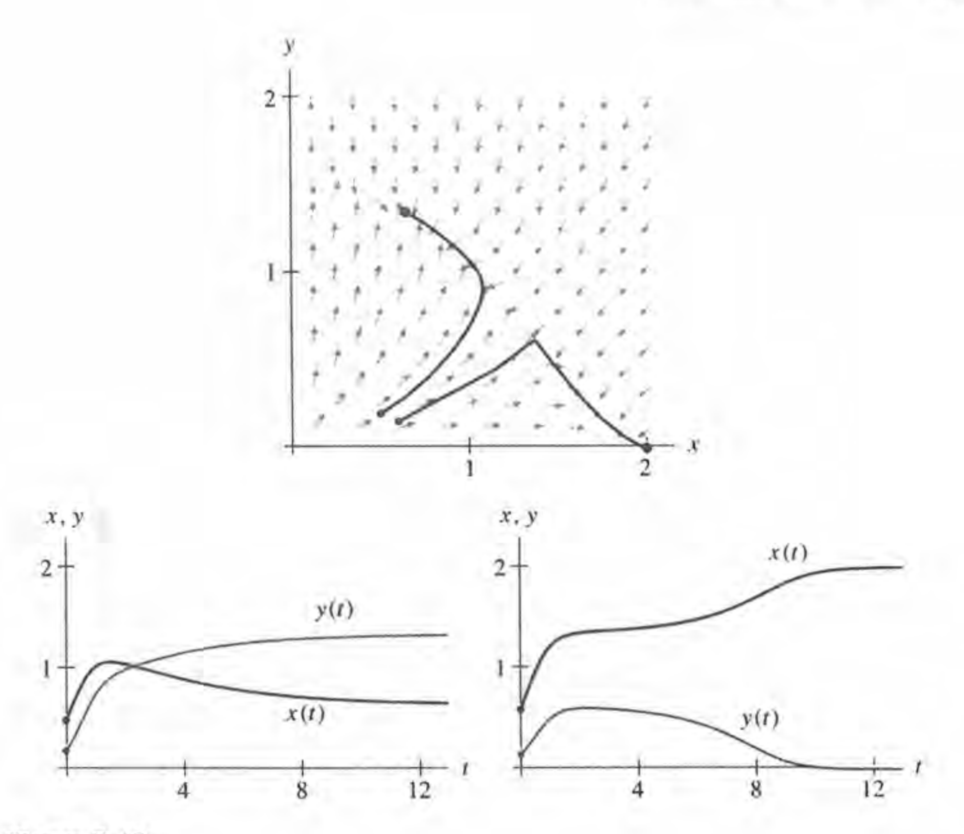


Figura 5.19
Plano fase para el sistema de especies en competencia con las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ para las soluciones indicadas.

Por otra parte, hay un conjunto grande de condiciones iniciales que dan soluciones cercanas al punto de equilibrio (2, 0), donde la especie y está extinta y la x está en su capacidad de soporte.

Cómo emplear todas nuestras herramientas

Considere el sistema

$$\frac{dx}{dt} = x + y - x^3$$
$$\frac{dy}{dt} = -0.5x.$$

En el estudio de las células nerviosas aparecen sistemas de esta forma. Haciendo una analogía, la variable $x(t)$ representa el voltaje a través de la frontera de una célula nerviosa en el tiempo t, y $y(t)$ simboliza la permeabilidad de la pared de la célula en el tiempo t. Un cambio rápido en x corresponde a la célula nerviosa "disparando".

Información obtenida a partir de las nulclinales

La nulclinal x para este sistema es $y = -x + x^3$. Arriba de esta curva, la componente x del campo vectorial es positiva y debajo es negativa. Por consiguiente, arriba de la nulclinal

x las soluciones se mueven hacia la derecha, y abajo se desplazan hacia la izquierda. La nulclinal y es la línea $x = 0$, es decir el eje y. A la derecha de ésta tenemos $dy/dt < 0$ y a la izquierda tenemos $dy/dt > 0$. Por consiguiente, en la mitad derecha del plano fase las soluciones se mueven hacia abajo, y en la mitad izquierda del plano las soluciones se recorren hacia arriba (vea la figura 5.20). Las nulclinales x y y dividen el plano fase en cuatro regiones. Usando el análisis cualitativo anterior, podemos concluir que todas las soluciones deben circular siguiendo el sentido de las manecillas del reloj alrededor del origen, que es el único punto de equilibrio del sistema (vea la figura 5.21).

Información obtenida a partir de la linearización

El sistema linearizado en el origen es

$$\frac{dx}{dt} = x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = -0.5x,$$

que tiene los eigenvalores $(1 \pm i)/2$. Por tanto, el origen es una fuente espiral.

Este análisis es aplicable sólo cerca del origen. Como el término que cancelamos para obtener la linearización es $-x^3$, la aproximación lineal ya no es válida una vez que este término tiene tamaño significativo. Cuando la magnitud de x^3 es comparable a x, no es seguro usar la linearización para estudiar el sistema no lineal.

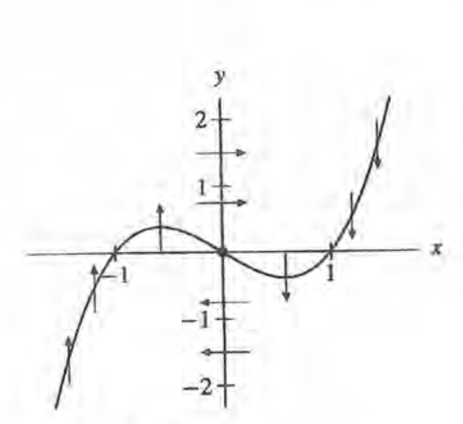


Figura 5.20
Las nulclinales x y y para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = x + y - x^3$$
$$\frac{dy}{dt} = -0.5x.$$

Las nulclinales para este sistema separan el plano en cuatro regiones.

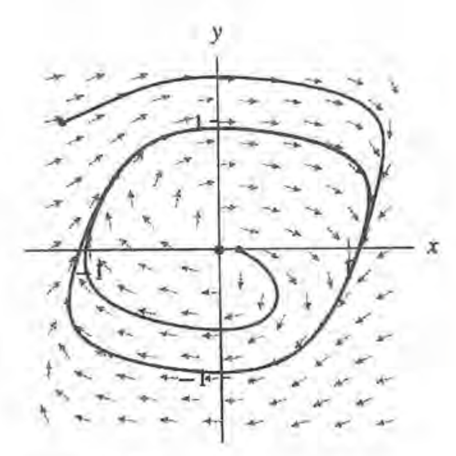


Figura 5.21
Soluciones del sistema

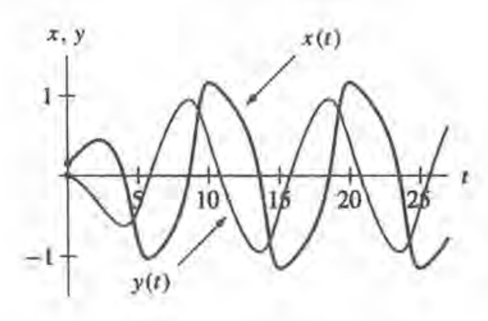
$$\frac{dx}{dt} = x + y - x^3$$
$$\frac{dy}{dt} = -0.5x.$$

Observe que las soluciones con condiciones iniciales cerca del origen se desplazan en espiral hacia afuera, mientras que aquellas con condiciones iniciales lejos del origen se mueven en espiral hacia adentro.

Información obtenida a partir de las aproximaciones numéricas de las soluciones

Para tener una idea más detallada del comportamiento de las soluciones de este sistema, usamos métodos numéricos para calcularlas. De la linearización sabemos que las condiciones iniciales cerca del origen dan soluciones que se mueven en espiral hacia afuera. Si tomamos una condición inicial lejos del origen, los métodos numéricos muestran que la solución se desplaza en espiral hacia adentro.

Del teorema de unicidad sabemos que las curvas solución nunca se cruzan. Por consiguiente, las soluciones que se inician cerca del origen al final cesan su movimiento en espiral hacia afuera; de otra manera, cruzarían a las soluciones que se mueven en espiral hacia adentro. Entre las soluciones con desplazamiento en espiral hacia afuera o hacia adentro, debe haber por lo menos una solución que no se mueva en espiral ni hacia adentro ni hacia afuera. Esta solución es periódica. La evidencia numérica indica que sólo una posee esta característica y que todas las otras soluciones (excepto la de equilibrio en el origen) se mueven en espiral hacia esta solución periódica. En la figura 5.22 se muestran las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ de dos soluciones. De este retrato vemos que ambas convergen hacia el mismo tipo de comportamiento periódico.



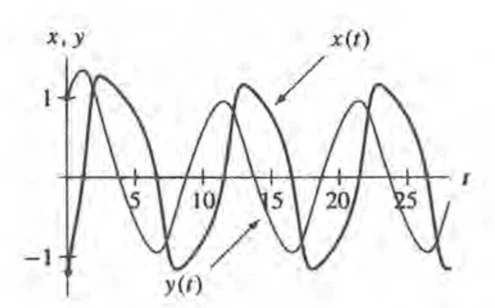


Figura 5.22
Las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ para dos soluciones del sistema

$$\frac{dx}{dt} = x + y - x^3$$
$$\frac{dy}{dt} = -0.5x.$$

La condición inicial para la primera solución está cerca del origen, mientras que para la segunda se encuentra fuera de la curva solución asociada a la solución periódica. Note que ambas gráficas indican que esas dos soluciones se comportan de la misma manera a largo plazo.

Caja de herramientas matemáticas

En esta sección hemos analizado tres sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden usando procedimientos analíticos, cualitativos y numéricos. Como hemos visto, este análisis es mucho más difícil que el análisis de ecuaciones diferenciales con una sola variable dependiente. Necesitamos muchos tipos diferentes de métodos para tratar sistemas, y debemos estar dispuestos a usar el que sea apropiado. Como en cualquier oficio, la habilidad para escoger la herramienta adecuada para determinado problema es una habilidad crucial.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 5.2

En los ejercicios 1-3, esboce las nulclinales x y y de los sistemas especificados. Usando la dirección del campo vectorial entre las nulclinales, describa el posible destino de las curvas solución correspondientes a las condiciones iniciales (a), (b) y (c).

1. $$\frac{dx}{dt} = 2 - x - y$$ $$\frac{dy}{dt} = y - x^2$$

(a) $x_0 = 2$, $y_0 = 1$

(b) $x_0 = 0$, $y_0 = -1$

(c) $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

2. $$\frac{dx}{dt} = 2 - x - y$$ $$\frac{dy}{dt} = y - |x|$$

(a) $x_0 = -1$, $y_0 = 1$

(b) $x_0 = 2$, $y_0 = 1$

(c) $x_0 = 2$, $y_0 = 2$

3. $$\frac{dx}{dt} = x(x-1)$$ $$\frac{dy}{dt} = x^2 - y$$

(a) $x_0 = -1$, $y_0 = 0$

(b) $x_0 = 0.8$, $y_0 = 0$

(c) $x_0 = 1$, $y_0 = 3$

4. Considere el sistema Volterra-Lotka, que es un modelo de dos especies en competencia,

$$\frac{dx}{dt} = x(-Ax - By + C)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(-Dx - Ey + F)$$

donde $x, y \geq 0$ y donde los parámetros $A - F$ son todos positivos.

(a) ¿Puede haber más de un punto de equilibrio para el cual $x > 0$ y $y > 0$ (es decir, donde las especies "coexistan en equilibrio")? Si es así, dé un ejemplo de tales valores de A a F. Si no, ¿por qué no?

(b) ¿Qué condición sobre los parámetros A a F garantiza que hay por lo menos un punto de equilibrio con $x > 0$ y $y > 0$?

En los ejercicios 5-14, restringimos la atención al primer cuadrante ($x, y \geq 0$). Para cada sistema,

(a) esboce las nulclinales,

(b) bosqueje el plano fase, y

(c) en un párrafo breve describa los posibles comportamientos de las soluciones. [*Sugerencia:* Use la información obtenida en los ejercicios 7-16 de la sección 5.1.]

5. $$\frac{dx}{dt} = x(-x - 3y + 150)$$ $$\frac{dy}{dt} = y(-2x - y + 100)$$

6. $$\frac{dx}{dt} = x(10 - x - y)$$ $$\frac{dy}{dt} = y(30 - 2x - y)$$

7. $$\frac{dx}{dt} = x(100 - x - 2y)$$ $$\frac{dy}{dt} = y(150 - x - 6y)$$

8. $$\frac{dx}{dt} = x(-x - y + 100)$$ $$\frac{dy}{dt} = y(-x^2 - y^2 + 2500)$$

9. $$\frac{dx}{dt} = x(-x - y + 40)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(-x^2 - y^2 + 2500)$$

10. $$\frac{dx}{dt} = x(-4x - y + 160)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(-x^2 - y^2 + 2500)$$

11. $$\frac{dx}{dt} = x(-8x - 6y + 480)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(-x^2 - y^2 + 2500)$$

12. $$\frac{dx}{dt} = x(2 - x - y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(y - x^2)$$

13. $$\frac{dx}{dt} = x(2 - x - y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(y - x)$$

14. $$\frac{dx}{dt} = x(x - 1)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(x^2 - y)$$

15. El **sistema Volterra-Lotka** de ecuaciones diferenciales para especies en competencia es

$$\frac{dx}{dt} = x(-Ax - By + C)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(-Dx - Ey + F),$$

donde x, $y \geq 0$ y ninguno de los parámetros A-F son negativos.

Algunas especies viven de manera "cooperativa", es decir, cada especie ayuda a la otra a sobrevivir y prosperar (por ejemplo, las flores y las abejas).

(a) ¿Cómo alteraría usted el sistema Volterra-Lotka descrito antes para dar una forma general a un conjunto de sistemas que modelen especies cooperativas?

(b) ¿Qué aspecto tienen las nulclinales para su sistema cooperativo? ¿Hay tres puntos de equilibrio? ¿Hay condiciones sobre los parámetros que garanticen que hay puntos de equilibrio con x y y positivas?

Los ejercicios 16-20 se refieren a los modelos de las reacciones químicas creadas en los ejercicios 25-30 de la sección 2.1. Aquí $a(t)$ es la cantidad de sustancia A en una solución y $b(t)$ es la cantidad de sustancia B en una solución en el tiempo t. Sólo tenemos que considerar $a(t)$ y $b(t)$ no negativas.

Para cada sistema,

(a) esboce las nulclinales y dibuje el campo vectorial a lo largo de éstas;

(b) en el plano fase, marque las regiones ab creadas por las nulclinales y determine en qué dirección general señala el campo vectorial en cada región (es decir, creciente o decreciente a, creciente o decreciente b), y

(c) identifique las regiones de las que las soluciones no pueden salir y determine el destino de las soluciones en esas regiones cuando pasa el tiempo.

16. $$\frac{da}{dt} = -\frac{ab}{2}$$
$$\frac{db}{dt} = -\frac{ab}{2}$$

17. $$\frac{da}{dt} = 2 - \frac{ab}{2}$$
$$\frac{db}{dt} = \frac{3}{2} - \frac{ab}{2}$$

18. $$\frac{da}{dt} = 2 - \frac{ab}{2} - \frac{a^2}{3}$$
$$\frac{db}{dt} = \frac{3}{2} - \frac{ab}{2}$$

19. $$\frac{da}{dt} = 2 - \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{3}$$
$$\frac{db}{dt} = \frac{3}{2} - \frac{ab}{2} - \frac{b^2}{3}$$

20. $$\frac{da}{dt} = 2 - \frac{ab}{2} - \frac{2ab^2}{3}$$
$$\frac{db}{dt} = \frac{3}{2} - \frac{ab}{2} - \frac{ab^2}{3}$$

Los ejercicios 21-23 se refieren al sistema

$$\frac{dx}{dt} = y$$
$$\frac{dy}{dt} = x - x^2.$$

21. Esboce las nulclinales y encuentre la dirección del campo vectorial a lo largo de éstas.

22. Demuestre que por lo menos existe una solución en cada uno de los cuadrantes segundo y cuarto que tienden al origen cuando $t \to \infty$. Compruebe lo mismo para los cuadrantes primero y tercero, pero la solución tiende al origen cuando $t \to -\infty$.

23. Encuentre el sistema linearizado cerca de los puntos de equilibrio (0, 0) y (1, 0). Use la información obtenida de los sistemas linearizados y de los ejercicios 21 y 22 para describir el plano fase. ¿Cuáles son sus dudas acerca del plano fase?

5.3 SISTEMAS HAMILTONIANOS

Como hemos recalcado varias veces, los sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales son casi imposible de resolver explícitamente. También hemos visto que las curvas solución de los sistemas pueden comportarse de muchas maneras diferentes y que no hay procedimientos cualitativos que funcionen en todos los casos. Afortunadamente, hay ciertos tipos de sistemas no lineales que aparecen a menudo en la práctica, y para los que existen procedimientos especiales que nos permiten entender en alguna medida el plano fase. En ésta y en la siguiente sección analizaremos dos de esos tipos especiales de sistemas no lineales. Pero primero haremos una pausa para oír una pequeña historia.

Cómo nació este libro

Pablo y Genaro han estado escribiendo un libro de texto sobre ecuaciones diferenciales durante los últimos diez años. Quieren que su libro esté lleno de ideas nuevas, ingeniosas y brillantes sobre las ecuaciones diferenciales, pero han encontrado que resulta muy difícil aportar nuevas ideas.

Más problemático para ellos es la siguiente observación que han hecho a lo largo de los años. Siempre que Pablo llega a la oficina en la mañana con una idea nueva e ingeniosa, ambos trabajan asiduamente en ella, pero por lo general no fructifica. Entonces su entusiasmo decrece, y con ello su creatividad. Por otra parte, siempre que Genaro llega en la mañana con una nueva idea, sin importar qué tan trivial sea ésta, sucede algo diferente. Ambos trabajan en la idea arduamente. Algunas veces el entusiasmo de Pablo decrece,

pero Genaro siempre está animado. Hay un buen intercambio y nunca cesan de trabajar. Algo resulta de la idea y el libro progresa. Esto es lo que molesta a Pablo y a Genaro. ¿Por qué debe depender tan críticamente su energía creativa de quién tuvo la primera idea? Ellos deciden modelar su aprieto con un sistema de ecuaciones diferenciales.

Sean $x(t)$ y $y(t)$ los niveles de entusiasmo de Genaro y Pablo en el tiempo t, respectivamente. Sin embargo, $x(t)$ y $y(t)$ son difíciles de medir debido a una falta de unidades estandarizadas de entusiasmo; pero es claro que $y(t) > 0$ indica que Pablo es entusiasta, mientras que $y(t) < 0$ significa que Pablo es apático. Cuando $y(t) = 0$, Pablo permanece sentado, ni feliz ni triste, y lo mismo ocurre para Genaro.

Ambos han observado que el ánimo de Genaro cambia a una razón directamente proporcional al nivel de entusiasmo de Pablo. Cuando Pablo está emocionado, Genaro se vuelve más entusiasta, pero cuando Pablo está apático, Genaro pierde su energía. Una simple ecuación que refleja este comportamiento es

$$\frac{dx}{dt} = y.$$

La situación de Pablo es un poco más difícil de categorizar. Cuando Genaro está medianamente entusiasta, Pablo se pone contento. Pero cuando Genaro está sumamente emocionado, Pablo empieza a perder entusiasmo. Aparentemente, cuando el torrente de ideas que emanan de Genaro se vuelve muy grande, a Pablo le da dolor de cabeza y se aísla de su amigo. Por otra parte, cuando Genaro está deprimido, Pablo se pone realmente apático. Entonces, para la razón de cambio del entusiasmo de Pablo usamos

$$\frac{dy}{dt} = x - x^2.$$

La gráfica de $dy/dt = x - x^2$ como función de x refleja de manera exacta el nivel de entusiasmo de Pablo (vea la figura 5.23). Podemos ver que $dy/dt > 0$ si $0 < x < 1$, pero se tendrá $dy/dt < 0$ de otro modo.

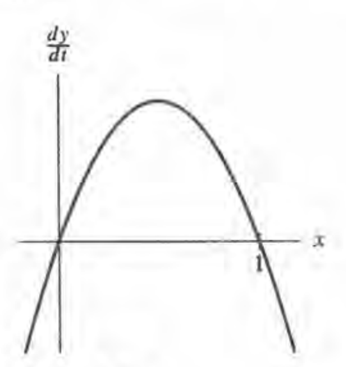


Figura 5.23
La gráfica de $dy/dt = x - x^2$ como función de x.

El sistema de ecuaciones diferenciales en el que concuerdan es

$$\frac{dx}{dt} = y$$
$$\frac{dy}{dt} = x - x^2.$$

El campo de direcciones para este sistema se muestra en la figura 5.24. Hay dos puntos de equilibrio, uno en el origen y otro en $x = 1$, $y = 0$. El procedimiento de linearización de la sección 5.1 puede usarse para estudiar las soluciones cerca de los puntos de equilibrio. En el origen, la matriz jacobiana es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que tiene los eigenvalores ± 1. Por tanto, el origen es un punto silla.

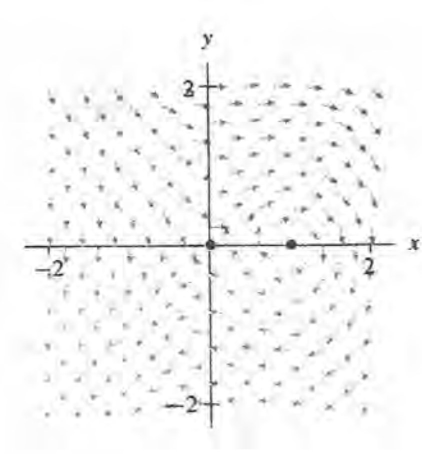


Figura 5.24
El campo de direcciones para

$$\frac{dx}{dt} = y$$
$$\frac{dy}{dt} = x - x^2.$$

El sistema tiene dos puntos de equilibrio y por linearización sabemos que el punto de equilibrio en el origen es un punto silla.

El punto de equilibrio en $(x, y) = (1, 0)$ tiene como matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

que tiene los eigenvalores $\pm i$. El sistema linearizado es un centro. Como vimos en la sección 5.1, éste es uno de los casos en que el comportamiento a largo plazo de las soluciones del sistema no lineal cerca del punto de equilibrio no queda completamente determinado por la linearización. El comportamiento del sistema no lineal cerca del punto de equilibrio $(1, 0)$ podría ser el de un sumidero espiral, el de una fuente espiral o el de un centro.

Las aproximaciones numéricas de las soluciones dan el plano fase mostrado en la figura 5.25, donde puede observarse un comportamiento muy regular. Las soluciones con condiciones iniciales cerca de $(1, 0)$ parecen formar lazos cerrados correspondientes a soluciones periódicas. También las separatrices inestables y estables que emergen del punto silla en el origen y se dirigen a los cuadrantes primero y cuarto parecen formar un solo lazo.

Los procedimientos cualitativos que hemos estudiado hasta ahora no nos permiten predecir que este sistema tendrá tales curvas soluciones regulares. Además, ya que las aproximaciones numéricas de las soluciones sólo son eso, debemos ser cautos. Distinguir las curvas solución que forman lazos cerrados de aquellas que se mueven en espiral muy lentamente puede ser muy difícil. Nos gustaría tener procedimientos que pudieran usarse para verificar el comportamiento especial de este sistema.

Cantidades que se conservan

Pablo y Genaro estaban tan intrigados por el comportamiento de su sistema que decidieron mostrarlo a Roberto. Él exclamó que antes había visto este sistema y que tenía una cantidad que se conservaba. Notando la confusión manifiesta en Pablo y Genaro, explicó:

DEFINICIÓN Una función de valor real $H(x, y)$ de dos variables x y y es una **cantidad conservada** para un sistema de ecuaciones diferenciales, si H es constante a lo largo de todas las curvas solución del sistema. Es decir, si $(x(t), y(t))$ es una solución del sistema, entonces $H(x(t), y(t))$ es constante. En otras palabras,

$$\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = 0. \quad \blacksquare$$

Roberto recordó que

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

es una cantidad conservada para el sistema en consideración. Para comprobarlo, suponga que $(x(t), y(t))$ es una solución del sistema. Calculamos entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) &= \frac{\partial H}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\\ &= (-x + x^2)\cdot y + y\cdot(x - x^2)\\ &= 0,\end{aligned}$$

donde la primera igualdad proviene de la regla de la cadena, y la segunda parte del hecho de que $(x(t), y(t))$ es una solución para reemplazar dx/dt por y y dy/dt por $x - x^2$.

Esto significa que las curvas solución siempre se encuentran a lo largo de las curvas de nivel de H, las cuales se muestran en la figura 5.26. Ahí podemos observar que alrededor del punto de equilibrio $(1, 0)$, las curvas de nivel de H forman círculos cerrados y que

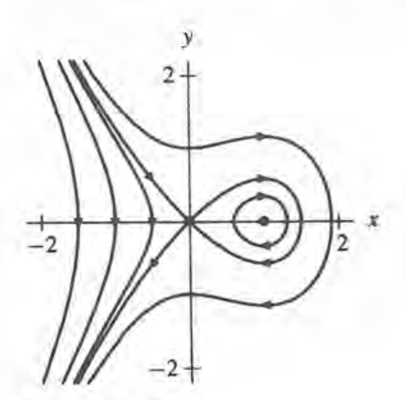


Figura 5.25
El plano fase del sistema

$$\frac{dx}{dt} = y$$
$$\frac{dy}{dt} = x - x^2.$$

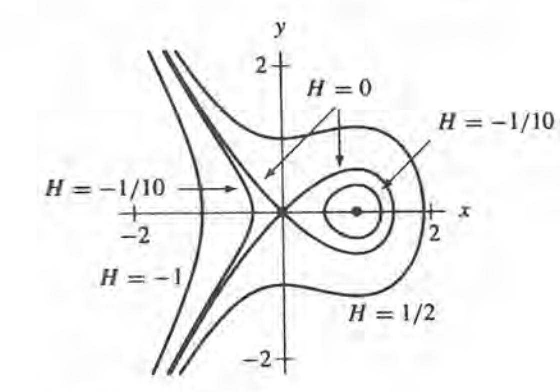


Figura 5.26
Las curvas de nivel de H. Compare las curvas solución mostradas en la figura 5.25 contra éstas.

las ramas de la curva de nivel, que sale del origen hacia la derecha, se conectan en un lazo. Esto concuerda con nuestro análisis del plano fase para el sistema (vea la figura 5.25).

Es muy especial el hecho de que las ramas derechas de las separatrices estable e inestable del origen formen un solo lazo. Este tipo de curvas solución es una **conexión de punto silla**. Dentro de la conexión del punto silla, todas las curvas solución son periódicas; pero fuera de ella, todas las soluciones tienen la propiedad de que tanto $x(t)$ como $y(t)$ tienden a $-\infty$ cuando $t \to \infty$. Esto explica, para gran alivio de Pablo y Genaro, por qué su productividad diaria depende tan crucialmente de quién tiene la primera idea. Si $y(0) > 0$ pero $x(0) = 0$, la curva solución tiende al final a $x = y = -\infty$. Pero si $x(0) > 0$, $y(0) = 0$ [con $x(0)$ no muy grande], entonces $x(t)$ y $y(t)$ son periódicas, con $x(t) > 0$ para toda t. En la figura 5.27 están esbozadas las gráficas de $x(t)$ y $y(t)$ para condiciones iniciales cercanas a (0, 0).

Ésta fue una causa de satisfacción tan grande para Pablo y Genaro que invitaron a Roberto a ser coautor de su libro. Roberto aceptó a regañadientes, pero sólo después de que Genaro y Pablo prometieron escuchar la ópera *Las bodas de Fígaro* completa.

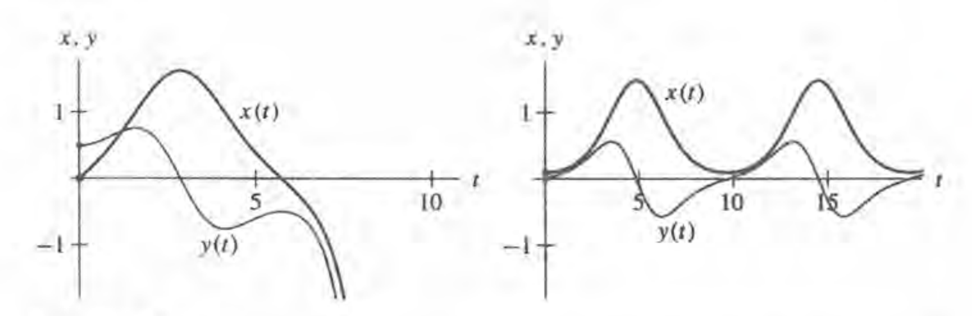


Figura 5.27
Gráficas de $x(t)$ y $y(t)$ para soluciones con condiciones iniciales $y(0) > 0$, $x(0) = 0$ y $y(0) = 0$, $0 < x(0) < 1$.

Sistemas hamiltonianos

Lo que hace funcionar el análisis precedente es el hecho de que el sistema de ecuaciones diferenciales que modela los niveles de entusiasmo de Genaro y Pablo es un tipo especial llamado sistema hamiltoniano (en honor del matemático irlandés William Rowan Hamilton [1805-1865]).

DEFINICIÓN Un sistema de ecuaciones diferenciales se llama **sistema hamiltoniano** si existe una función real $H(x, y)$ tal que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}$$
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

para toda x y y. La función H se llama la *función hamiltoniana* para el sistema. ■

Note que H es una cantidad que siempre se conserva para un sistema como éste. Podemos verificar lo anterior si consideramos que $(x(t), y(t))$ es cualquier solución del sistema. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) &= \frac{\partial H}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\\ &= \frac{\partial H}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right) + \frac{\partial H}{\partial y}\left(-\frac{\partial H}{\partial x}\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

La primera igualdad es la regla de la cadena y la segunda aplica el hecho de que el sistema es hamiltoniano y que $(x(t), y(t))$ es una solución para reemplazar dx/dt por $\partial H/\partial y$ y dy/dt por $-\partial H/\partial x$.

Entonces, igual que antes, las curvas solución del sistema se encuentran a lo largo de las curvas de nivel de H. Esbozar el plano fase para un sistema hamiltoniano es lo mismo que dibujar los conjuntos de nivel de la función hamiltoniana.

Ejemplos de sistemas hamiltonianos: el oscilador armónico

Recuerde que el sistema del oscilador armónico no amortiguado es

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v\\ \frac{dv}{dt} &= -qy,\end{aligned}$$

donde q es un constante positiva. Si hacemos

$$H(y, v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{q}{2}y^2,$$

entonces

$$\frac{dy}{dt} = v = \frac{\partial H}{\partial v}$$

y

$$\frac{dv}{dt} = -qy = -\frac{\partial H}{\partial y}.$$

Por tanto el sistema del oscilador armónico no amortiguado es un sistema hamiltoniano. Los conjuntos de nivel de la función H son elipses en el plano y-v que corresponden al retrato del plano fase de las soluciones del oscilador armónico no amortiguado (vea la sección 3.4). Esta función hamiltoniana también se denomina la **función de energía** para el oscilador.

El péndulo no lineal

Consideremos un péndulo hecho de una barra rígida ligera, cuya longitud es l con una bola en un extremo de masa m. La bola se llama *lentejuela* y la barra rígida se llama el *brazo* del péndulo. Suponemos que toda la masa del péndulo está en la lentejuela, despreciándose la masa de la barra. El otro extremo de la barra rígida está unida a la pared, de manera que ésta puede girar un círculo entero en un plano perpendicular al suelo. La posición de

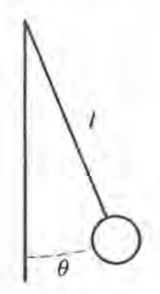


Figura 5.28
Un péndulo con longitud de barra l y ángulo θ.

la lentejuela en el tiempo t está dada por un ángulo $\theta(t)$, que escogemos medir en sentido contrario al de las manecillas del reloj con $\theta = 0$ correspondiente al eje vertical dirigido hacia abajo (vea la figura 5.28).

Suponemos que sólo hay dos fuerzas actuando sobre el péndulo: la gravedad y la fricción. La fuerza gravitatoria constante, igual a mg, actúa hacia abajo, donde g es la aceleración de la gravedad cerca de la Tierra ($g \approx 9.8$ m/s^2). Sólo la componente de esta fuerza, $-mg$ *sen* θ, tangente al círculo de movimiento, afecta el movimiento del péndulo (vea la figura 5.29). También hay una fuerza debido a la fricción, que suponemos proporcional a la velocidad de la lentejuela.

La posición de la lentejuela en el tiempo t está dada por el punto (l sen $\theta(t)$, $-l$ cos $\theta(t)$) sobre el círculo de radio l (recuerde que $\theta = 0$ corresponde a la vertical hacia abajo). La rapidez de la lentejuela es la longitud del vector velocidad, que es $l d\theta/dt$. La componente de la aceleración que señala la dirección del movimiento de la lentejuela tiene longitud $l d^2\theta/dt^2$. La fuerza debida a la fricción es proporcional a la velocidad, y está representada por $-b(l d\theta/dt)$, donde $b > 0$ es un parámetro que corresponde al *coeficiente de amortiguamiento*.

Si combinamos lo anterior con la ley de Newton: "la fuerza es igual a la masa multiplicada por la aceleración", encontramos la ecuación del movimiento,

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -bl\frac{d\theta}{dt} - mg\operatorname{sen}\theta$$

o

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0.$$

Podemos escribirla como un sistema no lineal en la manera usual haciendo la velocidad $v = d\theta/dt$. La ecuación se convierte entonces en

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= v\\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{b}{m}v - \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta.\end{aligned}$$

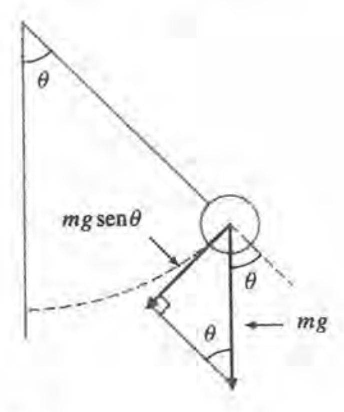


Figura 5.29
Descomposición de la fuerza de gravedad en componentes a lo largo del brazo del péndulo y tangente al círculo de movimiento de la lentejuela del péndulo.

Recuerde que θ es una variable angular, por lo que $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$, $\theta = 4\pi$, etc., miden la misma posición del péndulo cuando éste pasa por su posición más baja. Los valores $\theta = \pi, 3\pi, 5\pi$, etc., se presentan cuando el péndulo está en el punto más alto de su movimiento circular.

El péndulo ideal

En la práctica siempre hay una fuerza debido a la fricción actuando sobre un péndulo. Sin embargo, de momento supongamos que en este modelo no hay fricción. Es un caso "ideal" que no ocurre en el mundo real. Pero se trata de un modelo bastante razonable para un péndulo bien construido y bien lubricado.

Cuando no hay fricción presente, el coeficiente b desaparece. Por conveniencia, digamos que la longitud del brazo del péndulo es unitaria; es decir, suponemos $l = 1$. (En los ejercicios consideramos el efecto de ajustar dicha longitud.) Las ecuaciones de movimiento del péndulo ideal con brazo de longitud unitaria son

$$\frac{d\theta}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -g \operatorname{sen}\theta.$$

El primer paso es encontrar los puntos de equilibrio. De la primera ecuación debemos tener $v = 0$ y de la segunda sen $\theta = 0$, de modo que $v = 0$, $\theta = n\pi$, donde n es cualquier entero, todos dan puntos de equilibrio. Cuando θ es un múltiplo par de π y $v = 0$, la lentejuela cuelga sin movimiento en posición vertical, que corresponde al equilibrio para el péndulo. Cuando θ es un múltiplo impar de π y $v = 0$, se tiene también una posición de reposo en la que la lentejuela está perfectamente equilibrada en una posición vertical. Este tipo de equilibrio es difícil de ver en la práctica: justo cuando se ha logrado equilibrar al péndulo, algo se mueve y la corriente de aire resultante perturba la posición de equilibrio del péndulo, poniéndolo en movimiento en una u otra dirección.

Ahora expondremos un método para determinar cuándo tratamos con un sistema hamiltoniano, y en cualquier caso mostramos cómo calcularlo. De momento usaremos el método del prestidigitador y afirmamos que las ecuaciones diferenciales para el péndulo ideal forman un sistema hamiltoniano, con la función hamiltoniana dada por

$$H(\theta, v) = \frac{1}{2}v^2 - g\cos\theta.$$

Esto proviene del cálculo de las derivadas parciales de H,

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = g \operatorname{sen}\theta = -\frac{dv}{dt}, \quad \frac{\partial H}{\partial v} = v = \frac{d\theta}{dt}.$$

Podemos describir la gráfica de la función H como sigue: para cada θ fija, el término $v^2/2$ implica que la gráfica de H es una parábola en la dirección de v. Los puntos críticos ocurren en $v = 0$, g sen $\theta = 0$ o $\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$, etc. Los puntos $v = 0$, $\theta = 0, \pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, etc., son mínimos locales, y $v = 0$, $\theta = \pm\pi, \pm 3\pi$, etc., son puntos silla de la gráfica.

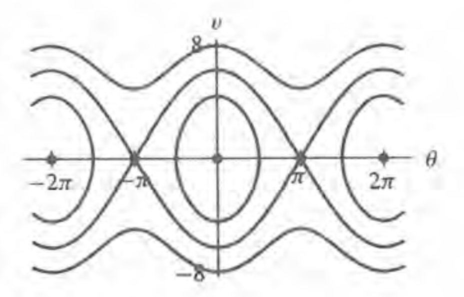


Figura 5.30
Curvas de nivel para el péndulo ideal.

Las curvas de nivel de H están graficadas en la figura 5.30. Sabemos que el campo vectorial siempre es tangente a esas curvas. La componente θ es igual a v, por lo que el campo vectorial señala hacia la derecha cuando $v > 0$, y hacia la izquierda cuando $v < 0$. Si aplicamos esto, podemos asignar direcciones a lo largo de esas curvas y con ello determinar el retrato de fase. Éste se muestra en la figura 5.31.

Hay tres tipos diferentes de curvas solución presentes en el retrato del plano fase. Se muestran esquemáticamente en la figura 5.32 y están marcados como A, B y C. Alrededor de los puntos de equilibrio en $v = 0$, $\theta = 0$, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, etc., encontramos soluciones periódicas que se mueven en el mismo sentido que las manecillas del reloj. Ésas son las soluciones tipo A en la figura 5.32. Como el valor θ a lo largo de esas curvas solución nunca alcanza los valores π, 3π, etc., se infiere que el péndulo nunca pasa por la posición vertical. En consecuencia, lo único que hace es oscilar de ida y vuelta periódicamente con los valores máximo y mínimo de θ, determinados por el punto donde la curva solución cruza el eje θ. Éste es el movimiento usual que asociamos con un péndulo. La gráfica de $\theta(t)$ para tal solución como ésta se muestra en la figura 5.33.

Por otra parte, una curva solución como la B en la figura 5.32 corresponde al péndulo girando para siempre en sentido contrario a las manecillas. Note que $v \neq 0$ a lo largo de dicha curva solución, por lo que el péndulo nunca alcanza un punto donde su velocidad sea 0. La gráfica de $\theta(t)$ para tal solución se incrementa para toda t si $v > 0$, y decrece para toda t si $v < 0$ (vea la figura 5.33).

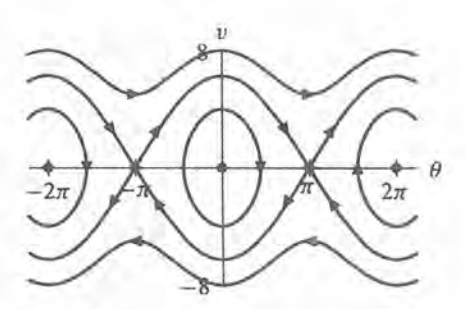


Figura 5.31
Plano fase para el péndulo ideal.



Figura 5.32
Soluciones especiales para las ecuaciones del péndulo.

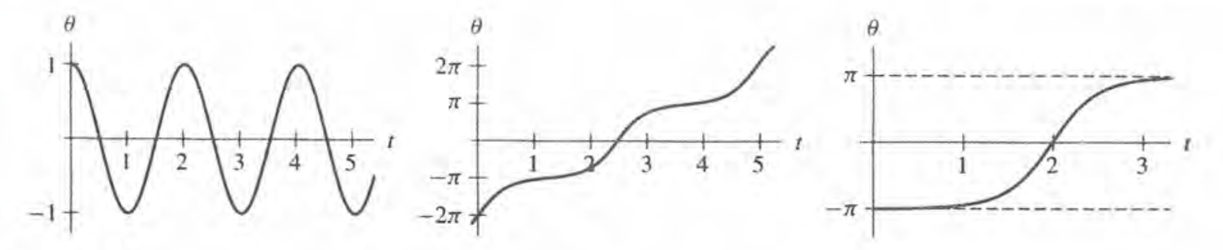


Figura 5.33
Gráficas de $\theta(t)$ para los tres tipos diferentes de soluciones representadas en la figura 5.32.

Los tipos intermedios de soluciones (vea el punto C en la figura 5.32) son separatrices de puntos silla que forman conexiones de punto silla. Esas soluciones provienen de y se aproximan a la posición vertical de equilibrio cuando el tiempo tiende a $\pm\infty$. La gráfica $\theta(t)$ de este tipo de solución se muestra en la figura 5.33. Para encontrarla, debemos escoger con cuidado el ángulo y velocidad iniciales. Con una velocidad inicial levemente alta, el péndulo oscila más allá de la posición vertical; cuando es ligeramente baja, el péndulo cae de regreso. Las separatrices de los puntos de equilibrio de punto silla separan las soluciones "oscilantes", de ida y vuelta, de las soluciones "rotatorias", que giran una y otra vez.

El valor de la función hamiltoniana para el péndulo ideal en un punto particular (y, v) se llama la **energía.** El principio físico de la conservación de la energía es aplicable al péndulo ideal, como lo es para el oscilador armónico sin amortiguamiento. Ésta es una manera de predecir que el oscilador armónico sin amortiguamiento y el péndulo ideal son sistemas hamiltonianos. A continuación damos un enfoque más matemático.

Determinación de los sistemas hamiltonianos

Los sistemas hamiltonianos son tipos especiales de ecuaciones diferenciales en varios sentidos. Como hemos visto, podemos "resolver" este tipo de sistema en el plano desde un punto de vista cualitativo, una vez que conocemos la función hamiltoniana. Sólo tenemos que trazar las curvas de nivel de H y esbozar las direcciones para determinar el retrato fase. Desafortunadamente, estos sistemas son bastante raros. Nos gustaría determinar si el sistema de ecuaciones siguiente es o no hamiltoniano y, si lo es, calcular la función hamiltoniana.

Suponga que tenemos

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

y queremos ver si es hamiltoniano. Nos preguntamos si existe una función $H(x, y)$ que para todo (x, y),

$$f(x, y) = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y)$$

y

$$g(x, y) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y).$$

Si existe la función H (y tiene segundas derivadas continuas), entonces

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}.$$

Por tanto, si el sistema es hamiltoniano,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Es decir, para comprobarlo, calculamos $\partial f/\partial x$ y $\partial g/\partial y$ y revisamos si $\partial f/\partial x = -\partial g/\partial y$. Si esta ecuación no se cumple para todo (x, y), entonces el sistema no es hamiltoniano.

Por ejemplo, consideremos el sistema no lineal

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) = x + y^2$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x, y) = y^2 - x.$$

Calculamos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \neq -2y = -\frac{\partial g}{\partial y}.$$

En consecuencia, este sistema no es hamiltoniano.

Construcción de funciones hamiltonianas

Para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x, y),$$

si

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y},$$

el sistema es hamiltoniano. Podemos verificarlo construyendo la función hamiltoniana como sigue: si vamos a tener

$$f(x, y) = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y),$$

entonces al integrar ambos lados de esta ecuación con respecto a y, nos debe quedar

$$H(x, y) = \int f(x, y)\, dy$$

hasta una "constante de integración" que puede depender de x. Es decir, podemos escribir

$$H(x, y) = \int f(x, y)\, dy + \phi(x).$$

donde ϕ es alguna función de x que debe determinarse. Para encontrar ϕ, simplemente diferenciamos $H(x, y)$ con respecto a x e igualamos el resultado con $-g(x, y)$. Encontramos

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int f(x, y)\, dy + \phi'(x) = -g(x, y).$$

Es decir,

$$\phi'(x) = -g(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \int f(x, y)\, dy.$$

La integración del lado derecho con respecto a x determina entonces a ϕ y en consecuencia al hamiltoniano H.

Dos ejemplos

Recuerde el sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna el dilema de la escritura del libro de Genaro y Pablo:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) = y \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) = x - x^2.\end{aligned}$$

Como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 = -\frac{\partial g}{\partial y},$$

sabemos que este sistema es hamiltoniano. Para encontrar H, integramos f con respecto a y y encontramos

$$H(x, y) = \int y\, dy = \frac{1}{2}y^2 + \phi(x).$$

A continuación debemos tener

$$\begin{aligned}x - x^2 &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}y^2 + \phi(x)\right) \\ &= -\phi'(x).\end{aligned}$$

Integrando $\phi'(x) = -x + x^2$ con respecto a la variable x, encontramos

$$\phi(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3,$$

por lo que

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

Ésta es exactamente la función que encontramos antes. Por supuesto, podríamos agregar una constante arbitraria a H, pero esto no cambiaría la forma de las curvas de nivel de H.

Como otro ejemplo, considere el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) = -x \operatorname{sen} y + 2y \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) = -\cos y.\end{aligned}$$

Éste es hamiltoniano ya que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\operatorname{sen} y = -\frac{\partial g}{\partial y}$$

para todo (x, y). Integramos entonces primero f con respecto a y, y encontramos

$$H(x, y) = x \cos y + y^2 + \phi(x).$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}-\cos y &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(x \cos y + y^2 + \phi(x)\right) \\ &= -\cos y - \phi'(x).\end{aligned}$$

Por consiguiente, podemos escoger que ϕ sea cualquier constante, digamos 0, y nuestra función hamiltoniana es

$$H(x, y) = x \cos y + y^2.$$

Estudiaremos este sistema más detenidamente en los ejercicios.

Puntos de equilibrio de sistemas hamiltonianos

Los sistemas hamiltonianos tienen varias propiedades especiales no compartidas por los sistemas generales de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, suponga que (x_0, y_0) es nuestro punto de equilibrio para el sistema hamiltoniano

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y).\end{aligned}$$

La matriz jacobiana en este punto de equilibrio está dada por

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2} \\ -\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2} & -\dfrac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} \end{pmatrix},$$

donde cada una de las derivadas parciales está evaluada en (x_0, y_0). Como

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x},$$



Zhihong Xia (1962-) recibió su grado de licenciatura en astronomía en la Nanjing University, en China, y su doctorado en matemáticas en la Northwestern University. En su tesis doctoral combinó sus habilidades matemáticas y conocimientos de astronomía para solucionar un problema de mecánica celeste no resuelto desde hace 100 años. Usando una variedad de procedimientos analíticos y cualitativos que implicaban sistemas hamiltonianos, Xia demostró que ciertas soluciones del sistema no lineal de las ecuaciones diferenciales, conocido como el problema de los *n* cuerpos, podía escapar al infinito en un tiempo finito.

En 1993, Xia recibió el prestigiado premio Blumenthal por la investigación en su tesis doctoral. Ha impartido cátedra en la Universidad de Harvard y en el Instituto Tecnológico de Georgia. Actualmente es profesor de matemáticas en la Northwestern University.

la matriz jacobiana toma la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix},$$

donde $\alpha = \partial^2 H/\partial x \partial y$, $\beta = \partial^2 H/\partial y^2$ y $\gamma = -\partial^2 H/\partial x^2$.

El polinomio característico de esta matriz es

$$(\alpha - \lambda)(-\alpha - \lambda) - \beta\gamma = \lambda^2 - \alpha^2 - \beta\gamma.$$

Esto significa que los eigenvalores están dados por las raíces de

$$\lambda^2 = \alpha^2 + \beta\gamma,$$

que son

$$\lambda = \pm\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}.$$

Vemos entonces que sólo hay tres posibilidades para los eigenvalores:

1. Si $\alpha^2 + \beta\gamma > 0$, ambos eigenvalores son reales y tienen signos opuestos.
2. Si $\alpha^2 + \beta\gamma < 0$, ambos eigenvalores son imaginarios con parte real igual a cero.
3. Si $\alpha^2 + \beta\gamma = 0$, entonces 0 es el único eigenvalor.

En particular, no es posible tener eigenvalores que sean complejos y tengan partes reales no nulas para un sistema hamiltoniano en el plano. Las soluciones entonces no pueden moverse en espiral desde o hacia un punto de equilibrio. Del mismo modo, tampoco podemos tener dos eigenvalores positivos o dos negativos. Por ello, los sistemas hamiltonianos no pueden tener puntos de equilibrio que sean sumideros o fuentes. Esto nos da otra indicación preliminar de si un sistema dado es hamiltoniano: si el campo de direcciones indica la presencia de sumideros o fuentes, no es hamiltoniano. En la figura 5.34 se

muestran dos planos fase. Podemos decir con seguridad que el plano fase a la izquierda no proviene de un sistema hamiltoniano, porque tiene un punto de equilibrio que es un sumidero. El plano fase a la derecha sí podría corresponder a un sistema hamiltoniano. La única manera de corroborarlo es estudiar las fórmulas para el sistema como lo hemos hecho antes.

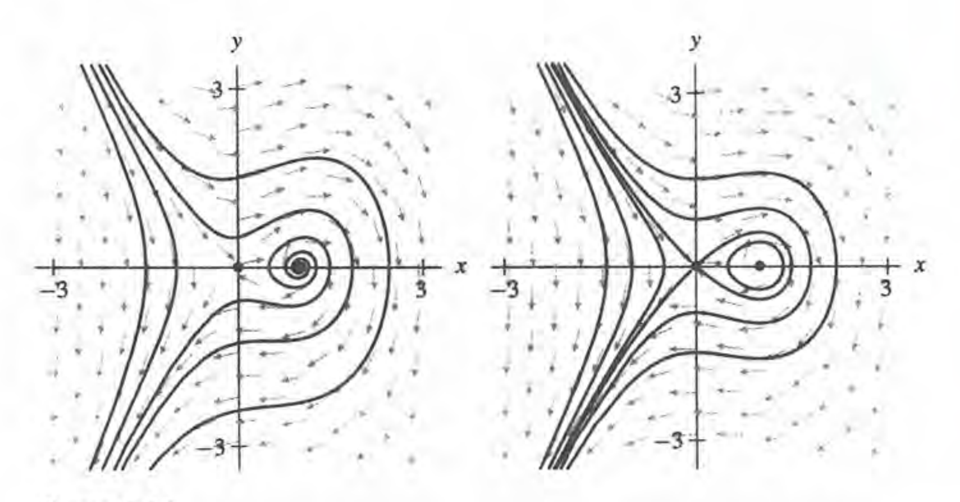


Figura 5.34
El plano fase a la izquierda no puede ser un sistema hamiltoniano, mientras que el de la derecha sí podría serlo.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 5.3

1. Para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = y$$
$$\frac{dy}{dt} = x^3 - x,$$

(a) demuestre que el sistema y su función son hamiltonianos

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4},$$

(b) esboce los conjuntos de nivel de H, y

(c) bosqueje el plano fase para el sistema. Incluya una descripción de todos los puntos de equilibrio y cualesquiera conexiones de punto silla que existan.

2. Para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = x\cos(xy)$$
$$\frac{dy}{dt} = -y\cos(xy),$$

(a) demuestre que el sistema y su función son hamiltonianos

$$H(x, y) = \operatorname{sen}(xy),$$

(b) esboce los conjuntos de nivel de H, y
(c) dibuje el plano fase para el sistema. Incluya una descripción de todos los puntos de equilibrio y cualesquiera conexiones de ensilladuras que existan.

3. Para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -x \operatorname{sen} y + 2y$$
$$\frac{dy}{dt} = -\cos y,$$

(a) demuestre que la función y el sistema son hamiltonianos

$$H(x, y) = x \cos y + y^2,$$

(b) bosqueje los conjuntos de nivel de H, y
(c) también el plano fase para el sistema. Incluya una descripción de todos los puntos de equilibrio y cualesquiera conexiones de punto silla que existan.

[*Sugerencia:* Aproveche cualquier dispositivo disponible para dibujar los conjuntos de nivel y los planos fase. Luego interprete las gráficas que obtenga.]

En los ejercicios 4-8, continúe el estudio del sistema del péndulo ideal con masa m en la lentejuela y longitud l en su brazo, dado por

$$\frac{d\theta}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta.$$

4. **(a)** ¿Cuál es la linearización del sistema del péndulo ideal anterior en el punto de equilibrio (0, 0)?
(b) Usando $g = 9.8$ m/s^2, ¿cómo deben escogerse l y m para que las oscilaciones pequeñas del péndulo tengan un periodo de 1 segundo?

5. Para la linearización del péndulo ideal anterior en (0, 0), el periodo de la oscilación es independiente de la amplitud. ¿Esto aplica para el péndulo ideal? ¿El periodo de oscilación es siempre el mismo, independientemente de qué tan alto oscile el péndulo? Si no es así, ¿el periodo será más corto o más largo para oscilaciones altas?

6. Un reloj de péndulo ideal (que hace "tick" una vez en cada oscilación del péndulo) marca el tiempo de manera perfecta cuando el péndulo realiza oscilaciones muy altas. ¿Se atrasa o se adelanta el reloj si la amplitud de las oscilaciones es muy pequeña?

7. **(a)** Si la longitud del brazo del péndulo ideal se duplica de l a $2l$, ¿cuál es el efecto sobre el periodo de las soluciones de pequeñas amplitudes de oscilación?
(b) ¿Cuál es la razón de cambio del periodo de oscilaciones de pequeña amplitud cuando l varía?

8. ¿Se atrasará o adelantará en la Luna un reloj de péndulo ideal que marca tiempo perfectamente sobre la Tierra?

En los ejercicios 9-12, determine si el sistema dado es hamiltoniano. Si lo es, encuentre una función hamiltoniana.

9. $\dfrac{dx}{dt} = x - 3y^2$

$\dfrac{dy}{dt} = -y$

10. $\dfrac{dx}{dt} = \operatorname{sen} x \cos y$

$\dfrac{dy}{dt} = -\cos x \operatorname{sen} y$

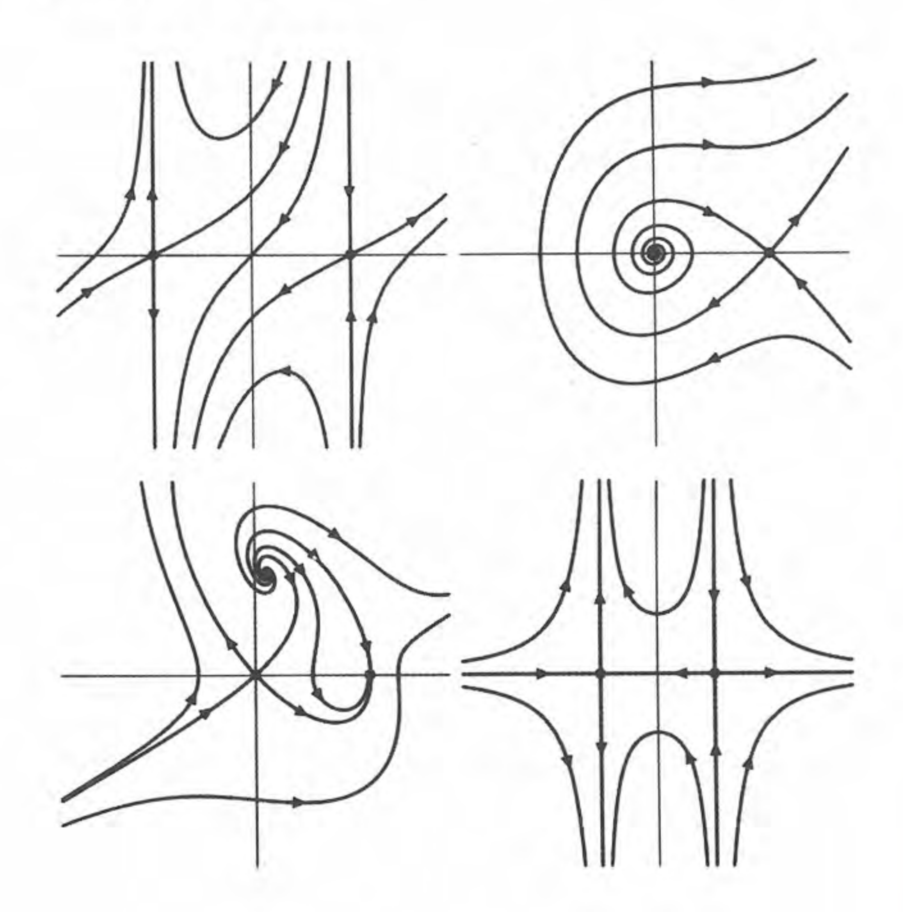
11. $\dfrac{dx}{dt} = x \cos y$

$\dfrac{dy}{dt} = -y \cos x$

12. $\dfrac{dx}{dt} = 1$

$\dfrac{dy}{dt} = y$

13. ¿Cuál de los siguientes planos fase correspondería a un sistema hamiltoniano? Si no es así, explique por qué.



14. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dx}{dt} = F(y)$$
$$\frac{dy}{dt} = G(x).$$

Es decir, dx/dt depende sólo de y, y dy/dt sólo de x. Demuestre que este sistema es hamiltoniano. ¿Cuál es la función hamiltoniana?

15. Considere el sistema no lineal

$$\frac{dx}{dt} = 1 - y^2$$
$$\frac{dy}{dt} = x(1 + y^2).$$

(a) ¿Se trata de un sistema hamiltoniano?
(b) Use una computadora para trazar el retrato fase de este sistema. ¿Piensa usted que hay una cantidad conservada en este sistema? ¿Puede encontrar una?
(c) Suponga que multiplicamos este campo vectorial por la función

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + y^2}.$$

El nuevo campo vectorial es

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}$$
$$\frac{dy}{dt} = x.$$

¿Es éste un sistema hamiltoniano?
(d) ¿Puede encontrar ahora una cantidad conservada para el sistema original?
(e) ¿Por qué funciona este método?

16. Considere el sistema no lineal

$$\frac{dx}{dt} = -yx^2$$
$$\frac{dy}{dt} = x + 1.$$

(a) ¿Se trata de un sistema hamiltoniano?
(b) ¿Puede usted encontrar una cantidad conservada? [*Sugerencia:* Use el procedimiento del ejercicio anterior, multiplicando este sistema por una función que le dé al nuevo sistema la forma

$$\frac{dx}{dt} = F(y)$$
$$\frac{dy}{dt} = G(x).]$$

17. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = 1 - y^2$$
$$\frac{dy}{dt} = x(2 - y).$$

Encuentre una cantidad conservada para este sistema.

En los ejercicios 18-20, estudiamos bifurcaciones de familias paramétricas de sistemas hamiltonianos. Como los puntos de equilibrio de estos últimos sistemas toman una forma especial, sus bifurcaciones también lo hacen.

18. Considere el sistema

$$\frac{dx}{dt} = y$$
$$\frac{dy}{dt} = x^2 - a,$$

donde a es un parámetro.

(a) Verifique que es un sistema hamiltoniano y que

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^3}{3} + ax$$

es una función hamiltoniana.

(b) Demuestre que el sistema tiene puntos de equilibrio en $(x, y) = (\pm\sqrt{a}, 0)$ si $a \geq 0$ y ningún punto de equilibrio si $a < 0$. Así entonces, $a = 0$ es un valor de bifurcación del parámetro.

(c) Linearice el sistema en cada uno de los puntos de equilibrio y determine el comportamiento de las soluciones cerca de los puntos de equilibrio.

(d) Esboce las curvas de nivel de H (y por consiguiente el plano fase del sistema) para $a = -1$, $a = -0.5$, $a = 0$, $a = 0.5$ y $a = 1$. [*Sugerencia:* Piense sobre el efecto de cambiar a sobre la gráfica de H. Vale la pena emplear cualquier dispositivo graficador disponible.]

(e) En un breve párrafo describa la bifurcación que tiene lugar en $a = 0$.

19. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + 2xy$$
$$\frac{dy}{dt} = a - 2xy - y^2,$$

que depende del parámetro a. Describa en detalle la bifurcación que ocurre en $a = 0$.

20. Suponga que Genaro y Pablo deciden modificar el modelo de sus niveles de entusiasmo, porque Pablo nota que su nivel también disminuye a una razón constante con el

tiempo. Por tanto, las nuevas ecuaciones son

$$\frac{dx}{dt} = y$$
$$\frac{dy}{dt} = x - x^2 - a.$$

(a) Describa con detalle cualquier bifurcación mayor que ocurra en esta familia.
(b) Suponga $a = 1$. ¿Qué sucede con el libro de Genaro y Pablo sin importar el entusiasmo con que comiencen ambos autores?

5.4 SISTEMAS DISIPATIVOS

Es obvio que los sistemas hamiltonianos analizados en el capítulo anterior son sistemas idealizados. En el mundo real, los péndulos no oscilan para siempre en un movimiento periódico. Al final se detienen; la energía se disipa. En esta sección examinaremos esos tipos de sistemas disipativos. Comenzaremos por modificar el péndulo ideal considerando un término de amortiguamiento mínimo.

El péndulo no lineal con fricción

Recuerde que la ecuación de segundo orden que gobierna el movimiento del péndulo es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0,$$

donde b es el coeficiente de amortiguamiento, m es la masa de la lentejuela del péndulo, l es la longitud del brazo del péndulo y g es la aceleración de la gravedad ($g \approx 9.8$ m/s^2). Todos los parámetros son positivos. El término

$$\frac{b}{m}\frac{d\theta}{dt}$$

resulta del amortiguamiento debido, por ejemplo, a la resistencia del aire o a la fricción en el pivote del brazo del péndulo. Consideramos que en nuestro sistema idealizado $b = 0$. En esta sección, supondremos que $b \neq 0$.

Introduciendo la velocidad $v = d\theta/dt$, esta ecuación diferencial de segundo orden puede escribirse como un sistema no lineal de la manera usual,

$$\frac{d\theta}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}v - \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta.$$

Este sistema ya no es hamiltoniano, ya que nuestra prueba de existencia para una función hamiltoniana falla (véase p. 144) porque

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(v) = 0$$

pero

$$-\frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{b}{m}v - \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta\right) = \frac{b}{m} \neq 0.$$

Los puntos de equilibrio y las nulclinales

Empezaremos el estudio del sistema del péndulo amortiguado

$$\frac{d\theta}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}v - \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta$$

encontrando los puntos de equilibrio. Igual que para el péndulo ideal, los puntos de equilibrio ocurren en $(\theta, v) = (0, 0)$, $(\pm\pi, 0)$, $(\pm 2\pi, 0)$, etcétera.

La matriz jacobiana del campo vectorial en (θ, v) es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos\theta & -\frac{b}{m} \end{pmatrix}.$$

Si $(\theta, v) = (0, 0)$, $(\pm 2\pi, 0)$, $(\pm 4\pi, 0)$, etc. (los puntos de equilibrio donde el péndulo cuelga verticalmente), esta matriz es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix}.$$

El sistema linearizado en esos puntos de equilibrio tiene a ésta como su matriz de coeficientes. Los eigenvalores de esta matriz son las raíces de la ecuación característica

$$-\lambda\left(-\frac{b}{m} - \lambda\right) + \frac{g}{l} = 0,$$

o

$$\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{g}{l} = 0.$$

Por tanto, los eigenvalores son

$$-\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{g}{l}}.$$

Hay tres casos diferentes, dependiendo del signo de $(b/(2m))^2 - g/l$. Si esta cantidad es negativa, entonces los eigenvalores de la matriz jacobiana son complejos. La parte real es $-b/(2m)$, que es negativa, por lo que en este caso el equilibrio es un sumidero espiral. Si $(b/(2m))^2 - g/l > 0$, encontramos dos eigenvalores distintos reales. Como

$$0 < \left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{g}{l} < \left(\frac{b}{2m}\right)^2,$$

tenemos que

$$\frac{b}{2m} > \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{g}{l}},$$

y ambos eigenvalores son negativos. Finalmente, si $(b/(2m))^2 - g/l = 0$, tenemos un eigenvalor repetido $-b/(2m)$, que es de nuevo negativo.

Encontramos así que en cada caso los puntos de equilibrio en $(\theta, v) = (0, 0)$, $(\pm 2\pi, 0)$, $(\pm 4\pi, 0)$, etc., son sumideros. Si centramos nuestra atención en el caso de un péndulo con una cantidad mínima de fricción, entonces b es muy pequeña. Para b, tenemos que $(b/(2m))^2 - g/l$ es negativa y los puntos $(\theta, v) = (0, 0)$, $(\pm 2\pi, 0)$, $(\pm 4\pi, 0)$, etc., son sumideros espirales. Aquí trataremos sólo este caso (vea los ejercicios para las demás situaciones).

En los otros puntos de equilibrio que corresponden al péndulo en posición vertical $(\theta, v) = (\pm\pi, 0)$, $(\pm 3\pi, 0)$, etc., la matriz jacobiana es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{g}{l} & -\dfrac{b}{m} \end{pmatrix},$$

y ésta es la matriz de coeficientes para el sistema linearizado en esos puntos. Los eigenvalores son

$$-\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 + \frac{g}{l}}.$$

Esos eigenvalores son siempre reales porque b, m, l y g son positivos. El eigenvalor

$$-\frac{b}{2m} + \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 + \frac{g}{l}}$$

es positivo, mientras que

$$-\frac{b}{2m} - \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 + \frac{g}{l}},$$

es negativo. Por tanto, los puntos de equilibrio $(\theta, v) = (\pm\pi, 0)$, $(\pm 3\pi, 0)$, etc., son puntos silla.

Para encontrar las nulclinales θ y v, note que $d\theta/dt = 0$ si $v = 0$, por lo que el campo vectorial señala hacia arriba o hacia abajo a lo largo del eje θ. La nulclinal v es donde $dv/dt = 0$, que ocurre sobre la curva

$$v = -\frac{mg}{bl}\operatorname{sen}\theta;$$

por lo que el campo vectorial señala en una dirección horizontal a lo largo de esta curva. Podemos determinar la dirección del campo vectorial en una región entre dos nulclinales, si verificamos la dirección en un solo punto (vea la figura 5.35).

Junto con nuestro análisis en los puntos de equilibrio, ahora podemos describir el comportamiento de las curvas solución cuando están cerca de éstos como se muestra en la figura 5.36. Observe que las curvas solución circulan alrededor de los puntos de equilibrio en $(\theta, v) = (0, 0)$, $(\pm 2\pi, 0)$, $(\pm 4\pi, 0)$, etc., en el mismo sentido que las manecillas del reloj. Podemos verificar que las separatrices estables e inestables en $(\theta, v) = (\pm\pi, 0)$, $(\pm 3\pi, 0)$, etc., señalan en las direcciones indicadas en la figura 5.36, ya sea mediante la linearización en esos puntos o usando el campo de direcciones (vea la figura 5.35).

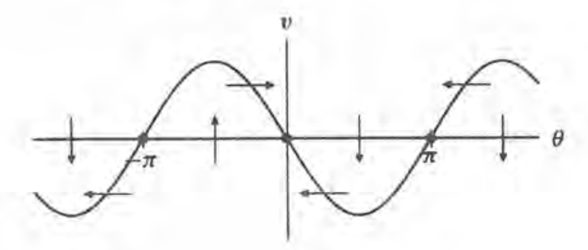


Figura 5.35
Nulclinales para el sistema

$$\frac{d\theta}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}v - \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta.$$

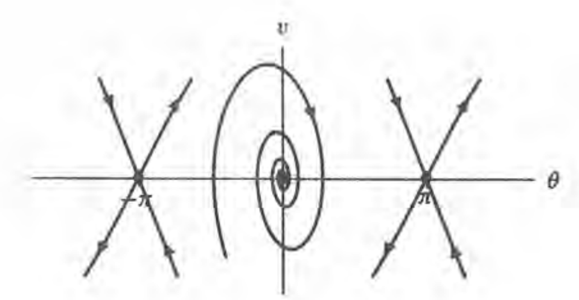


Figura 5.36
Plano fase cerca de los puntos de equilibrio para el sistema

$$\frac{d\theta}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}v - \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta.$$

Los efectos de la disipación

En este punto, la figura 5.36 contiene toda la información acerca del plano fase del péndulo con amortiguamiento pequeño, que podemos obtener mediante los procedimientos cualitativos que tenemos a nuestra disposición. No tenemos el beneficio de una cantidad conservada como lo tuvimos en el caso sin fricción, por lo que no podemos determinar todo el plano fase. Sin embargo, usando la función hamiltoniana

$$H(\theta, v) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{g}{l}\cos\theta$$

que desarrollamos en la última sección para el péndulo ideal, podemos completar el retrato. Si $(\theta(t), v(t))$ es una solución del sistema del péndulo ideal (con $b = 0$), entonces

$$\frac{d}{dt}H(\theta(t), v(t)) = 0.$$

Si $b \neq 0$, esto ya no aplica. Sin embargo, si $(\theta(t), v(t))$ es una solución del sistema del péndulo con $b \neq 0$, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial H}{\partial v}\frac{dv}{dt} \\ &= \left(\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta\right)v + v\left(-\frac{b}{m}v - \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta\right) \\ &= -\frac{b}{m}v^2 \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Es decir, la función H ya no es constante a lo largo de las curvas solución del sistema, s no más bien $H(\theta(t), v(t))$ decrece siempre que $v(t) \neq 0$. Por tanto, las curvas solución el plano fase θ-v cortan los conjuntos de nivel de H moviéndose de mayores a menc valores de H.

Esto nos da una estrategia para determinar el plano fase. Primero, dibujamos las curvas de nivel de H como lo hicimos antes (vea la figura 5.37). Si el valor de b/m y la velocidad v son pequeños, el valor de H disminuye lentamente a lo largo de las soluciones. Podemos esbozar el plano fase dibujando las curvas que fluyen en la misma dirección general que las curvas solución del péndulo ideal, pero que se mueven desde curvas de nivel de mayor valor de H hacia valores menores de H (vea la figura 5.38).

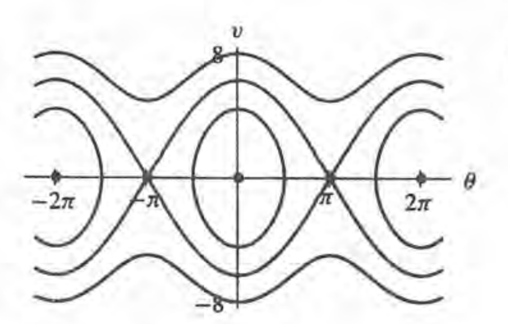


Figura 5.37
Curvas de nivel de

$$H = \frac{1}{2}v^2 - \frac{g}{l}\cos\theta.$$

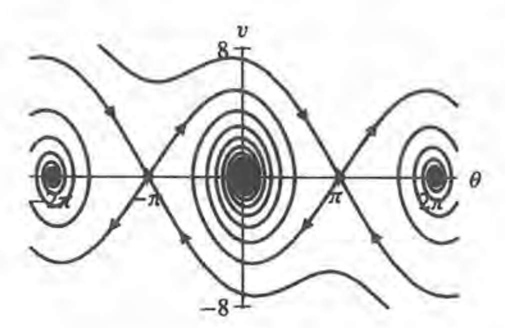


Figura 5.38
Plano fase para el sistema

$$\frac{d\theta}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = \frac{b}{m}v - \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta.$$

El hecho de que H disminuye a lo largo de las curvas solución nos permite determinar el destino de las separatrices estables e inestables que emanan de los puntos silla: las inestables deben caer hacia sumideros adyacentes, mientras que las estables llegan desde el "infinito" (vea la figura 5.38). Además, el análisis de puntos de equilibrio que llevamos a cabo concuerda con lo que acabamos de hacer. El retrato completo comienza a configurar un paquete agradable, con el análisis local cerca de los puntos de equilibrio, complementando la estructura global proporcionada por todas las curvas de nivel de H. Por último, si graficamos $\theta(t)$ para una curva solución típica, vemos que el péndulo al final oscila alrededor de una posición de reposo que señala hacia abajo, tal como debe ser (vea la figura 5.39).

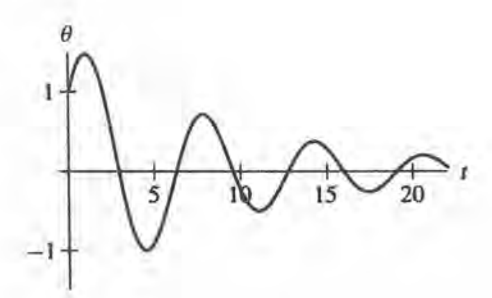


Figura 5.39
Una gráfica $\theta(t)$ para una solución típica del sistema

$$\frac{d\theta}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = \frac{b}{m}v - \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta.$$

Funciones de Lyapunov

La función H anterior juega un papel muy diferente para el péndulo amortiguado que para el péndulo ideal. Las soluciones del sistema del péndulo amortiguado se mueven a través de los conjuntos de nivel de H de valores mayores a menores. La función H se llama **función de Lyapunov,** en honor del matemático ruso Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918). Esta idea puede generalizarse como:

DEFINICIÓN Se dice que $L(x, y)$ es una **función de Lyapunov** para un sistema de ecuaciones diferenciales si, para cada solución $(x(t), y(t))$ que no es una solución de equilibrio del sistema,

$$\frac{d}{dt}L(x(t), y(t)) \leq 0$$

para toda t con desigualdad estricta excepto para un conjunto discreto de *tes*. ■

Así entonces, el valor de una función de Lyapunov nunca crece, pero sí disminuye a lo largo de una solución de no equilibrio. Una función de Lyapunov puede ser de gran ayuda para dibujar el plano fase de un sistema. Las curvas solución deben cruzar los conjuntos de nivel de la función de Lyapunov de valores mayores a menores.

El oscilador armónico amortiguado

Considere el sistema del oscilador armónico amortiguado

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v\\ \frac{dv}{dt} &= -qy - pv,\end{aligned}$$

donde q y p son constantes positivas. En la sección 5.3, p. 439 vimos que si $p = 0$, el sistema es hamiltoniano, con función hamiltoniana

$$H(y, v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{q}{2}y^2.$$

Si $p > 0$ y $(y(t), v(t))$ es una solución del sistema, entonces podemos calcular la razón de cambio de H a lo largo de la solución por

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(y(t), v(t)) &= \frac{\partial H}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial H}{\partial v}\frac{dv}{dt}\\ &= qy \cdot v + v(-qy - pv)\\ &= -pv^2\\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Por tanto, $H(y(t),v(t))$ decrece a una razón no nula (excepto cuando $v = 0$). Esto implica que H es una función Lyapunov para el sistema del oscilador armónico amortiguado. Los conjuntos de nivel de H son elipses en el plano y-v, por lo que las soluciones del sistema del oscilador armónico amortiguado (con $p > 0$) cruzan esos conjuntos de nivel con va-

lores de H que van de mayores a menores. Como H tiene un mínimo global en el origen y ningún otro punto crítico, todas las soluciones se aproximan al origen conforme pasa el tiempo (vea las figuras 5.40 y 5.41). Desde el punto de vista de los sistemas lineales, esto concuerda con nuestro análisis del oscilador armónico amortiguado y será de utilidad en la sección 6.2.

Como mencionamos antes (ver ejemplos de sistemas hamiltonianos, sección 5.3), el valor de H en un punto (y, v) se llama la energía del oscilador armónico en la posición y con velocidad v. Afirmar que H decrece a lo largo de las soluciones del sistema del oscilador armónico amortiguado es una manera precisa de decir que el amortiguamiento disipa energía. Lo mismo es cierto para el péndulo con fricción.

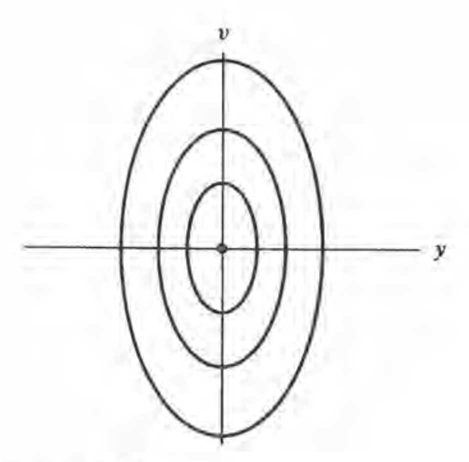


Figura 5.40
Conjuntos de nivel para

$$H(y, v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{q}{2}y^2.$$

Con la excepción del punto en el origen, cada conjunto de nivel es una elipse.

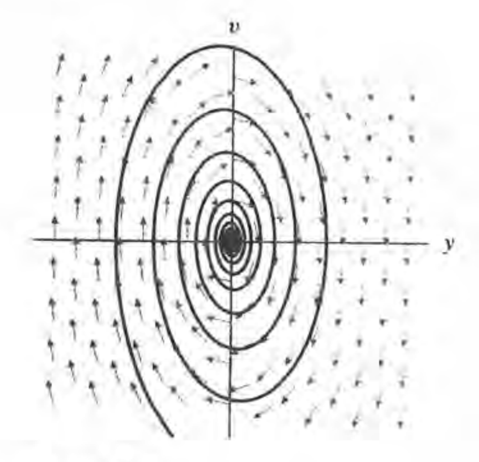


Figura 5.41
Plano fase para el oscilador armónico amortiguado

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -qy - pv$$

con p pequeña.

Sistemas de gradiente

No todos los sistemas tienen funciones de Lyapunov. Encontrar una función de Lyapunov para un sistema, aunque de alguna manera sepamos que éste contiene tal función, puede ser extremadamente difícil. Sin embargo, para algunos problemas de modelado el sistema físico en estudio proporciona una motivación para hacer una "conjetura afortunada" respecto a una función de Lyapunov. Éste es el caso para el péndulo y para el oscilador armónico amortiguados. La función hamiltoniana de un sistema no amortiguado se vuelve una función de Lyapunov si se agrega amortiguamiento.

En algunos casos, la función de Lyapunov es una parte integral de la construcción del sistema. A éstos se les denomina **sistemas de gradiente.** Comenzaremos con un ejemplo.

Navegación por olfato

Muchas especies de animales emplean el olfato para navegar en su ambiente. Por ejemplo, una langosta puede usar sus antenas para detectar concentraciones muy pequeñas de productos químicos en el agua donde habita (es decir, "huele" el agua). Con esta habilidad, puede determinar de dónde procede un olor y así encontrar su alimento en el fondo lodoso. Aunque no es claro cómo lo logran estos crustáceos, es posible que perciban las variaciones locales en la concentración y se muevan en dirección hacia donde el olor aumenta más rápidamente.*

Para describir cómo podemos diseñar una langosta mecánica que navegue por olfato, comenzamos suponiendo que nuestro prospecto sólo puede moverse sobre un plano dimensional. Sea $S(x, y)$ igual a la concentración en (x, y) de los productos químicos que conforman el olor de un pez muerto. Por cálculo vectorial sabemos que en (x, y), la dirección en que S crece más rápidamente está dada por el vector gradiente

$$\nabla S(x, y) = \left(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}\right).$$

Esto define un campo vectorial sobre el plano x-y. Suponemos que nuestra langosta modelo siempre se desplazará en la dirección en que el olor se incrementa más rápido. Por tanto, la velocidad del movimiento de la langosta señala en la misma dirección que el gradiente de S. Si $(x(t), y(t))$ denota la localización de la langosta en el tiempo t, entonces el vector velocidad está dado por

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \nabla S(x(t), y(t)).$$

Escrito en términos de ecuaciones escalares, tenemos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial S}{\partial y}.$$

Usamos este sistema de ecuaciones para determinar el movimiento de la langosta. Si la posición inicial es (x_0, y_0) en el tiempo $t = 0$, entonces la curva solución en el plano fase que satisface esta condición inicial es nuestra predicción de la trayectoria de la langosta.

Dos peces muertos

Suponga que $S(x, y)$ está definido por $-2 \le x \le 2$ y $-2 \le y \le 2$, y está dado por la fórmula

$$S(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{y^2}{2} + 8.$$

La gráfica de S se muestra en la figura 5.42. Restringimos nuestra atención a la región del plano x-y con x y y entre 2 y –2, porque esta función S toma valores negativos cuando x o

* La habilidad de las langostas para efectuar este "cálculo" en fluidos turbulentos sólo está comenzando a ser duplicado por la tecnología. Vea Lipkin, R., "Tracking Undersea Scent", *Science News*, *147*, 5 (1994): p. 78, para el análisis de una "robo-langosta".



Figura 5.42
Gráfica de la función
$S(x, y) = x^2/2 - x^4/4 - y^2/2 + 8$.

y es grande, y las concentraciones negativas no tienen sentido físico. En los ejercicios se consideran opciones más reales pero más complicadas algebraicamente para S.

Podemos ver (o calcular con los procedimientos del cálculo vectorial) que S tiene un máximo local en cada uno de los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ y un punto silla en $(0, 0)$. Una función de este tipo podría presentarse si hubiese un pez muerto oloroso en cada uno de los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

El gradiente de S da lugar a un campo vectorial y, como antes, esto especifica un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x} = x - x^3$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial S}{\partial y} = -y.$$

Por construcción, el vector velocidad de una solución de este sistema es igual al gradiente de S, y por consiguiente señala en la dirección donde S crece más rápido. Si $(x(t), y(t))$ es una solución, calculamos la razón de cambio de S a lo largo de la solución con

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}S(x(t), y(t)) &= \frac{\partial S}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial S}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= (x - x^3)(x - x^3) + (-y)(-y) \\ &= (x - x^3)^2 + y^2 \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Por consiguiente, S crece en todo punto en que $\nabla S \neq 0$. Ésos son precisamente los puntos en que el campo vectorial del sistema es cero, es decir, los puntos de equilibrio del sistema.

Para esbozar el plano fase del sistema

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x} = x - x^3$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial S}{\partial y} = -y,$$

empezaremos por bosquejar los conjuntos de nivel de S (vea la figura 5.43). El campo de direcciones señala hacia el gradiente de S, que es perpendicular a los conjuntos de nivel. Dibujamos las curvas solución siempre perpendiculares a los conjuntos de nivel de S, moviéndose en la dirección de una S creciente (vea la figura 5.44).

Mediante linearización, podemos verificar que los puntos de equilibrio $(\pm 1, 0)$ son sumideros, mientras que el punto $(0, 0)$ es un punto silla (vea los ejercicios). Las langostas que comienzan en $x(0) < 0$ se aproximan hacia el punto de equilibrio $(-1, 0)$, mientras que aquellas que lo hacen en $x(0) > 0$ tienden hacia $(1, 0)$. Si una langosta inicia precisamente sobre el eje y ($x(0) = 0$), entonces se aproximará al punto silla en el origen, incapaz de decidirse entre los dos peces.

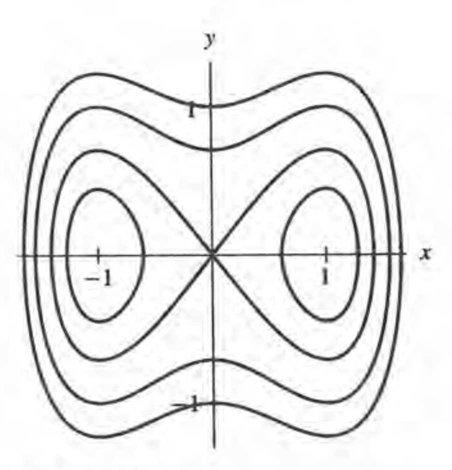


Figura 5.43
Conjuntos de nivel de

$$S(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{y^2}{2} + 8.$$

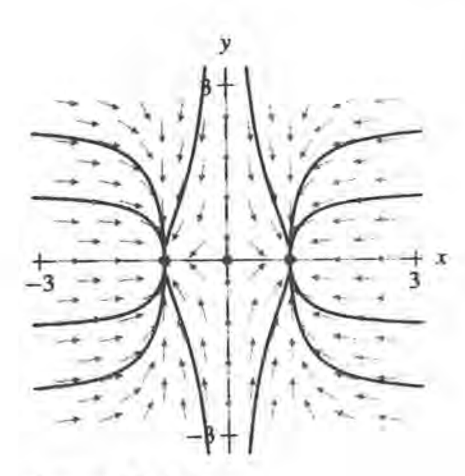


Figura 5.44
Plano fase para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x} = x - x^3$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial S}{\partial y} = -y.$$

Forma general de los sistemas de gradiente

El campo vectorial para el sistema del ejemplo anterior es el gradiente de la función S, por lo que es natural llamarlo un sistema de gradiente.

DEFINICIÓN Un sistema de ecuaciones diferenciales se llama un **sistema de gradiente** si existe una función G tal que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial G}{\partial x}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial G}{\partial y}$$

para todo (x, y). ■

Igual que en el ejemplo, si $(x(t), y(t))$ es una solución para un sistema de gradiente con campo vectorial dado por el gradiente de $G(x, y)$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}G(x(t), y(t)) &= \frac{\partial G}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Es decir, el valor de G crece a lo largo de toda la órbita excepto en puntos críticos de G. La función $-G$ disminuye a lo largo de las órbitas, y por tanto es una función de Lyapunov para este sistema.

Propiedades de los sistemas de gradiente

Igual que en el caso de los sistemas hamiltonianos, los sistemas de gradiente gozan de varias propiedades especiales que hacen que sus planos fase sean relativamente simples. Por una parte, no pueden tener soluciones periódicas. Además, como la función gradiente crece a lo largo de todas las soluciones de no equilibrio, una curva solución nunca puede retornar a su lugar de origen.

También hay restricciones sobre los tipos de puntos de equilibrio que ocurren en un sistema de gradiente. Supongamos que

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial G}{\partial x} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial G}{\partial y}\end{aligned}$$

es un sistema de gradiente. Entonces la matriz jacobiana asociada con este campo vectorial es

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 G}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Como las derivadas parciales mixtas de G son iguales, esta matriz asume la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix},$$

donde $\alpha = \partial^2 G/\partial x^2$, $\beta = \partial^2 G/\partial y \partial x$ y $\gamma = \partial^2 G/\partial y^2$. Los eigenvalores son raíces de la ecuación

$$\lambda^2 - (\alpha + \gamma)\lambda + \alpha\gamma - \beta^2 = 0,$$

que son

$$\frac{\alpha + \gamma \pm \sqrt{(\alpha + \gamma)^2 - 4\alpha\gamma + 4\beta^2}}{2}.$$

Simplificando, vemos que los eigenvalores son iguales a

$$\frac{1}{2}(\alpha + \gamma) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha - \gamma)^2 + 4\beta^2}.$$

Como el término $(\alpha - \gamma)^2 + 4\beta^2 \geq 0$, se infiere que esos eigenvalores nunca tienen una parte imaginaria; es decir, los eigenvalores son siempre reales. Los sistemas de gradiente no tienen sumideros espirales, fuentes espirales, ni centros.

Es importante observar que no todos los sistemas de ecuaciones diferenciales que poseen funciones de Lyapunov son sistemas de gradiente. Por ejemplo, el sistema lineal

$$\frac{dx}{dt} = -x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = -x - y$$

tiene una función de Lyapunov dada por $L(x, y) = x^2 + y^2$. Para verificarlo, calculamos la derivada de L a lo largo de una solución $(x(t), y(t))$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L(x(t), y(t)) &= 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \\ &= 2x(-x + y) + 2y(-x - y) \\ &= -2(x^2 + y^2) \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Puesto que $dL/dt = 0$ sólo en el origen, esta función decrece a lo largo de todas las curvas solución de no equilibrio. Pero L no puede ser un sistema gradiente, ya que los eigenvalores en $(0, 0)$ son complejos $(-1 \pm i)$; por tanto, el origen es un sumidero espiral, que no puede ocurrir en sistemas gradientes.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 5.4

1. Considere el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -x^3$$
$$\frac{dy}{dt} = -y^3.$$

(a) Verifique que

$$L(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

es una función de Lyapunov para el sistema.

(b) Esboce los conjuntos de nivel de L.

(c) ¿Qué puede concluir sobre el plano fase del sistema, a partir de la información en los incisos anteriores (a) y (b)? (Esboce el plano fase y en un ensayo breve describa todo lo que sepa acerca de dicho plano y cómo obtuvo la información.)

2. Considere el sistema

$$\frac{dx}{dt} = y$$
$$\frac{dy}{dt} = -x - \frac{y}{4} + x^2.$$

(a) Verifique que

$$L(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

es una función de Lyapunov para el sistema.

(b) Esboce los conjuntos de nivel de L.

(c) ¿Qué puede concluir sobre el plano fase del sistema, a partir de la información de los incisos anteriores (a) y (b)? (Dibuje el plano fase y escriba en un ensayo corto todo lo que sepa acerca del plano fase y cómo obtuvo la información.)

3. Considere el sistema

$$\frac{dx}{dt} = y$$
$$\frac{dy}{dt} = -4x - 0.1y.$$

(a) Verifique que todas las soluciones tienden hacia el origen cuando t se incrementa, y esboce el plano fase. [*Sugerencia:* El sistema es lineal.]

(b) Demuestre que

$$L(x, y) = x^2 + y^2$$

no es una función de Lyapunov para el sistema.

(c) Compruebe que

$$K(x, y) = 2x^2 + \frac{y^2}{2}$$

es una función de Lyapunov para el sistema.

En los ejercicios 4-11, consideramos el sistema del péndulo amortiguado

$$\frac{d\theta}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta - \frac{b}{m}v,$$

donde b es el coeficiente de amortiguamiento, m es la masa de la lentejuela, l es la longitud del brazo y g es la aceleración de la gravedad ($g \approx 9.8$ m/s^2).

4. ¿Qué relación debe haber entre los parámetros b, m y l para que el periodo de una pequeña oscilación del péndulo amortiguado sea de un segundo?

5. Suponga que tenemos un reloj que usa un péndulo ligeramente amortiguado para dar el tiempo (es decir, b es positivo pero $b \approx 0$). El reloj hace "tic" cada vez que el brazo del péndulo cruza $\theta = 0$. Si la masa de la lentejuela del péndulo se aumenta, ¿el reloj se adelanta o se retrasa?

6. Suponga que tenemos un reloj que usa un péndulo ligeramente amortiguado para dar el tiempo. El reloj hace "tic" cada vez que el brazo del péndulo cruza $\theta = 0$.

(a) Cuando al reloj le "falta cuerda" (la amplitud de las oscilaciones decrece), ¿se atrasa o se adelanta?

(b) Si el empuje inicial al péndulo es grande, de manera que el péndulo oscila muy cerca de la vertical, el reloj ¿se adelantará o se atrasará mucho?

7. Para valores fijos de b y l, ¿qué valores de la masa m deberán emplearse para que el péndulo funcione en un reloj?

8. Suponga que $l = 9.8$ m (de modo que $g/l = 1$), $m = 1$ y b grande, es decir $b = 4$. Para el sistema del péndulo amortiguado visto antes y con estos parámetros, haga lo siguiente:

(a) Encuentre los eigenvalores y eigenvectores del sistema linearizado en el punto de equilibrio $(0, 0)$.

(b) Determine los eigenvalores y eigenvectores del sistema linearizado en el punto de equilibrio $(\pi, 0)$.

(c) Esboce el plano fase cerca de los puntos de equilibrio.

(d) Bosqueje todo el plano fase. [*Sugerencia:* Comience por dibujar los conjuntos de nivel de H como en el texto.]

9. Imaginemos que tenemos un reloj de péndulo que usa un oscilador ligeramente amortiguado para marcar el tiempo, y que hace "tic" cada vez que el brazo del péndulo cruza $\theta = 0$, pero este último debe alcanzar una altura de $\theta = \pm 0.1$ para que se registre la oscilación (es decir, si la oscilación completa tiene lugar con $-0.1 < \theta < 0.1$, entonces el reloj no hace tic). Supongamos que un tic es un segundo. En términos de los parámetros b, m y l, haga una estimación de durante cuánto tiempo daría el reloj la hora exacta. Comente por qué a los relojes de péndulo hay que darles cuerda.

10. **(a)** Para el péndulo ligeramente amortiguado ($b > 0$ pero b cercano a cero) encuentre el conjunto de todas las condiciones iniciales $(\theta(0), v(0))$ para soluciones que ejecutan exactamente dos revoluciones completas para $t > 0$ (es decir, que pasan por la posición vertical exactamente dos veces) antes de caer en un movimiento oscilatorio de ida y vuelta. Esboce el plano fase para el péndulo ligeramente amortiguado y sombree esas condiciones iniciales.

(b) Repita el inciso (a) para las soluciones que realizan exactamente cinco revoluciones completas para $t > 0$ antes de caer en un movimiento oscilatorio de ida y vuelta.

11. Suponga que en vez de agregar amortiguamiento al péndulo ideal, añadimos una pequeña cantidad de "antiamortiguamiento"; es decir, consideramos b ligeramente negativa en el sistema del péndulo amortiguado. Físicamente esto significa que siempre que la velocidad sea diferente de cero, el péndulo estará acelerado en la dirección del movimiento.

(a) Linearice y clasifique los puntos de equilibrio en esta situación.

(b) Esboce el plano fase para este sistema.

(c) Describa en un párrafo breve el comportamiento de una solución con condición inicial cerca de $\theta = v = 0$.

12. Sea $G(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

(a) ¿Cuál es el sistema de gradiente con campo vectorial dado por el gradiente de G?

(b) Esboce la gráfica y los conjuntos de nivel de G.

(c) Bosqueje el plano fase del sistema de gradiente en el inciso (a).

13. Sea $G(x, y) = x^2 - y^2$.

(a) ¿Cuál es el sistema de gradiente con el campo vectorial dado por el gradiente de G?

(b) Clasifique el punto de equilibrio en el origen. [*Sugerencia:* Este sistema es lineal.]

(c) Esboce la gráfica de G y los conjuntos de nivel de G.

(d) Dibuje el plano fase del sistema de gradiente en el inciso (a).

14. Sea $G(x, y) = x^2 + y^2$.

(a) ¿Cuál es el sistema de gradiente con el campo vectorial dado por el gradiente de G?

(b) Clasifique el punto de equilibrio en el origen. [*Sugerencia:* Este sistema es lineal.]

(c) Esboce la gráfica de G y los conjuntos de nivel de G.

(d) Dibuje el plano fase del sistema de gradiente en el inciso (a).

15. Para el ejemplo de los dos peces muertos dado por el sistema

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3$$
$$\frac{dy}{dt} = -y,$$

(a) encuentre el sistema linearizado para el punto de equilibrio en el origen y verifique que éste es un punto silla.

(b) determine el sistema linearizado para el punto de equilibrio en $(1, 0)$ y demuestre que éste es un sumidero.

(c) de los eigenvalores y eigenvectores del sistema en el inciso (b), calcule la dirección desde donde se acercará la langosta modelo al punto de equilibrio $(1, 0)$, y

(d) revise que el sistema linearizado en el punto de equilibrio $(-1, 0)$ es el mismo que en $(1, 0)$.

16. El sistema para el ejemplo de los dos peces muertos

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3$$
$$\frac{dy}{dt} = y,$$

tiene la propiedad especial de que las ecuaciones "se desacoplan", es decir, la ecuación para dx/dt depende sólo de x y la que corresponde a dy/dt depende sólo de y.

(a) Esboce las líneas fase para las ecuaciones dx/dt y dy/dt.

(b) Usando las líneas fase, esboce el plano fase del sistema.

17. Suponga que el olor de un montón de peces muertos en la región $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$ está dado por la función

$$S(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{x^4 + y^4}{4} - 3x^2y^2 + 100.$$

(a) ¿Cuál es el sistema de gradiente cuyo campo vectorial es el gradiente de S?

(b) Usando una calculadora, esboce el plano fase para este sistema.
(c) ¿Cuántos peces muertos hay y dónde se encuentran?
(d) Con los resultados del inciso (b), haga un bosquejo de los conjuntos de nivel de S.
(e) ¿Por qué no es veraz el sistema para valores grandes de x o y?

18. Un modelo razonable para el olor en (x, y) de un pez muerto situado en (x_1, y_1) está dado por

$$S_1(x, y) = \frac{1}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + 1}.$$

Es decir, S_1 está dado por 1 sobre la distancia al cuadrado del pez muerto más 1.

(a) Formule la función S que dé el olor total de los tres peces muertos situados en $(1, 0)$, $(-1, 0)$ y $(0, 2)$.
(b) Bosqueje los conjuntos de nivel de S.
(c) Esboce el plano fase del sistema de gradiente

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial S}{\partial y}.$$

(d) Escriba explícitamente las fórmulas para los lados derechos de las ecuaciones del inciso (c).
(e) En la definición de S_1, ¿por qué usamos distancia al cuadrado más 1, en vez de sólo distancia al cuadrado? ¿Por qué usamos distancia al cuadrado más 1 en vez de sólo distancia más 1 en la definición de S_1?

19. Suponga que

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

es un sistema de gradiente. Es decir, existe una función $G(x, y)$ tal que $f = \partial G/\partial x$ y $g = \partial G/\partial y$.

(a) Verifique que si f y g tienen derivadas parciales continuas, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

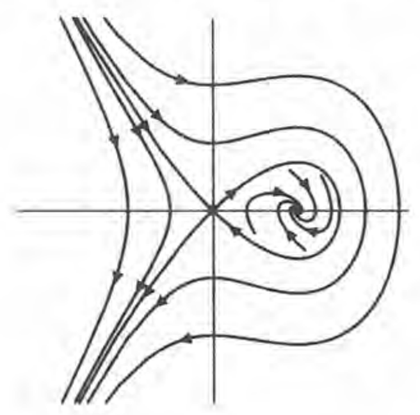
para todo (x, y).

(b) Use lo anterior para demostrar que el sistema

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + 3xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x + y^3$$

no es un sistema de gradiente.

20. El siguiente retrato de fase no puede ocurrir para un sistema de gradiente. Explique por qué.



21. Sea

$$H(y, v) = \frac{1}{2}v^2 + V(y)$$

para alguna función V y considere el sistema hamiltoniano asociado

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial v} = v \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{dV}{dy}. \end{aligned}$$

Sea k una constante positiva. Dé una interpretación física de la relación entre el sistema hamiltoniano y

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{dV}{dy} - kv. \end{aligned}$$

Demuestre que H es una función Lyapunov para este sistema.

22. Considere el sistema hamiltoniano

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned}$$

y el sistema de gradiente

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y}, \end{aligned}$$

donde H es la misma función en cada caso. ¿Qué puede usted decir acerca de la relación entre los dos retratos fase de ambos sistemas?

5.5 SISTEMAS NO LINEALES EN TRES DIMENSIONES

En la sección 2.5 vimos que las soluciones de las ecuaciones diferenciales con tres variables dependientes son curvas en el espacio tridimensional, las cuales pueden moverse en lazos una alrededor de otra en formas muy complicadas. En la sección 3.8 estudiamos el comportamiento de los sistemas lineales con tres variables dependientes, y podemos determinarlo con los eigenvalores y los eigenvectores. Sin embargo, la lista de los posibles comportamientos es mucho más larga que para los sistemas planos.

En esta sección consideraremos dos ejemplos de sistemas no lineales en tres dimensiones. El primero es un modelo de población con tres especies formando una cadena de alimentos. Para el segundo ejemplo, volvemos a las ecuaciones de Lorenz estudiadas en la sección 2.5. Podemos usar el procedimiento de linearización de los puntos de equilibrio y aproximaciones numéricas (método de Euler) para obtener algo de información acerca de esos sistemas. Como ya recalcamos en secciones previas, hay muy pocas herramientas de propósito general para ecuaciones diferenciales en tres y más dimensiones. Esos sistemas son un área de investigación activa dentro de las matemáticas.

Un modelo de cadena alimenticia

Hemos estudiado el comportamiento de poblaciones que viven aisladas y de pares de especies interactuando en sistemas depredador-presa en cooperación y en competencia. Esos sistemas apenas tocan la superficie de los tipos de complicadas interacciones encontradas en la naturaleza. Una posibilidad es la formación de una cadena alimenticia de tres o más especies. Una misma especie puede ser depredador y presa. Un ejemplo que se ha estudiado recientemente incluye el abeto balsámico, el alce y el lobo. Los abetos son comidos por los alces y los alces (en particular los individuos jóvenes y enfermos) son comidos por los lobos. Una pregunta natural es si los cambios en la población de lobos afecta o no a la población de árboles. Los estudios más recientes de la población árbol/alce/lobo en el parque de la isla Royal National* indican que los cambios en la población de los lobos puede afectar a la población de los árboles.

Formaremos un modelo de un sistema con tres especies, cada una devorada por la siguiente. Por conveniencia, llamamos a esas especies árboles, alces y lobos como analogía del ejemplo anterior. Si

$x(t)$ = población de árboles en el tiempo t,

$y(t)$ = población de alces en el tiempo t, y

$z(t)$ = población de lobos en el tiempo t.

Suponemos que cada una de las poblaciones aisladas puede ser modelada por una ecuación logística y que el efecto de la interacción entre aquéllas es proporcional al producto de las poblaciones. El comportamiento de las soluciones dependerá de los parámetros escogidos para la razón de crecimiento, la capacidad de soporte y el efecto de la interacción. Para obtener una idea de cómo se comportan las soluciones de sistemas de esta forma, comenzamos por considerar que todos los parámetros son iguales a 1. (Esto no

* Vea McLaren, B. E. y Peterson, R. O., "Wolves, Moose and Tree Rings on Isle Royale", *Science*, *266* (1994): p. 1555.

es ciertamente el caso para árboles, alces y lobos, pero hace mucho más sencilla la aritmética.) Nuestro modelo es

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - xy$$
$$\frac{dy}{dt} = y(1-y) + xy - yz$$
$$\frac{dz}{dt} = z(1-z) + yz.$$

Note que el crecimiento de la población de árboles disminuye por la presencia de alces (el término $-xy$), también que el crecimiento de esta última especie se incrementa por los árboles (la notación $+xy$) pero disminuye por los lobos (el término $-yz$), y que el aumento en la población de lobos se ve favorecido por la presencia de los alces (el término $+yz$).

Podemos encontrar los puntos de equilibrio de este sistema haciendo cero los lados derechos de las ecuaciones y despejando x, y y z. Los puntos de equilibrio son (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1) y (2/3, 1/3, 4/3). De éstos, sólo el punto (2/3, 1/3, 4/3) tiene las tres coordenadas diferentes de cero, por lo que las tres especies pueden coexistir en equilibrio bajo esas poblaciones. La matriz jacobiana para este sistema en (x, y, z) es

$$\begin{pmatrix} 1-2x-y & -x & 0 \\ y & 1-2y+x-z & -y \\ 0 & z & 1-2z+y \end{pmatrix}$$

En el punto de equilibrio (2/3, 1/3, 4/3), el jacobiano es

$$\begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 4/3 & -4/3 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de la matriz es

$$-\left(\lambda^3 + \frac{7}{3}\lambda^2 + \frac{20}{9}\lambda + \frac{8}{9}\right),$$

y los eigenvalores son

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{y} \quad \lambda_2, \lambda_3 = -\frac{2}{3} \pm \frac{2}{3}i.$$

Como λ_1 es negativo y λ_2 y λ_3 tienen parte real negativa, este punto de equilibrio es un sumidero y todas las soluciones con condiciones iniciales suficientemente cercanas tenderán hacia él cuando t aumente. De hecho, las simulaciones numéricas muestran que toda solución con condiciones iniciales en el primer octante (donde x, y y z son positivas) tienden a este punto de equilibrio. Por tanto, esperamos que a largo plazo las poblaciones se estabilicen bajo esos valores y que las especies coexistan en equilibrio.

Este modelo no incluye muchos factores del medio ambiente que pueden tener un efecto importante sobre las poblaciones. Por ejemplo, en 1981, una enfermedad disminuyó la población de lobos en forma considerable. Más recientemente, el crudo invierno de

1996-1997 ocasionó una declinación en la población de alces.* Construir un modelo que incluya tales factores es por lo menos tan difícil como predecir el estado del tiempo a largo plazo. Sin embargo, abajo veremos que podemos estudiar el efecto de tales eventos ajustando los parámetros en el modelo simple.

Supongamos que una enfermedad afecta la población de lobos, que es el depredador en la parte superior de la cadena de alimentos. Cada año esta enfermedad mata una cierta pequeña fracción de la población. Podemos ajustar nuestro modelo para incluir este elemento agregando el término $-\gamma z$ a la ecuación dz/dt, donde γ es un parámetro que indica la fracción de la población que muere por la enfermedad por tiempo unitario. El nuevo modelo es

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1-x) - xy \\ \frac{dy}{dt} &= y(1-y) + xy - yz \\ \frac{dz}{dt} &= z(1-z) - \gamma z + yz.\end{aligned}$$

Podemos calcular de nuevo los puntos de equilibrio para este sistema, que dependerán ahora del valor de γ. El único punto de equilibrio con las tres coordenadas diferentes de 0 es $((2-\gamma)/3, (1+\gamma)/3, (4-2\gamma)/3))$. Suponiendo que γ es pequeña, este punto será aún un sumidero. Podemos preguntar qué efecto tendrá sobre las poblaciones ajustar el valor de γ. Para verlo, calculamos la derivada de γ de cada una de las coordenadas del punto de equilibrio. Para $z = (4-2\gamma)/3$, la derivada respecto a γ es

$$\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{4-2\gamma}{3}\right) = -\frac{2}{3},$$

que es negativa. Esto es como lo esperábamos, ya que un incremento en el efecto de la enfermedad debe disminuir el número de lobos. Para $y = (1+\gamma)/3$, la derivada con respecto a γ es

$$\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{1+\gamma}{3}\right) = \frac{1}{3},$$

que es positiva. Entonces, un incremento en γ es bueno para la población de alces, como era de esperarse. Finalmente, para $x = (2-\gamma)/3$, la derivada con respecto a γ es

$$\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{2-\gamma}{3}\right) = -\frac{1}{3},$$

que es negativa. Un incremento en γ disminuye la población de equilibrio de los árboles.

Hay dos observaciones importantes que hacer. Primero, aunque resulta sencillo hacer modelos simples de sistemas que representan largas cadenas alimenticias, no es tan fácil encontrarlas en la naturaleza. La mayor parte de los depredadores tienen varias especies de dónde escoger su alimento. Cuando una presa escasea, aquéllos cambian su dieta.

En segundo lugar, al modificar un sistema deben tomarse en cuenta las situaciones cambiantes. Aunque el análisis anterior puede parecer obvio, si hubiéramos escogido cam-

* Vea "Winter Devastates Island's Moose", por Les Line en el *New York Times* Science Section, 1 de abril de 1997.

biar las ecuaciones para considerar la enfermedad de los lobos reduciendo el parámetro de la razón de crecimiento de su población, en ese caso habríamos obtenido resultados diferentes (vea los ejercicios).

Ecuaciones de Lorenz

Las ecuaciones de Lorenz son

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = \rho x - y - xz$$
$$\frac{dz}{dt} = -\beta z + xy,$$

donde σ, ρ y β son parámetros. En la sección 2.5 fijamos los valores de los parámetros a $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ y $\rho = 28$ para obtener el sistema estudiado por Lorenz:

$$\frac{dx}{dt} = 10(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = 28x - y - xz$$
$$\frac{dz}{dt} = -\frac{8}{3}z + xy.$$

Las aproximaciones numéricas que estudiamos en esa sección mostraron que las soluciones se mueven en lazos alrededor del espacio fase en una manera muy complicada (vea la figura 5.45). Con ayuda del procedimiento de linearización cerca de los puntos de equilibrio, podemos obtener algo más de información acerca del comportamiento de esas órbitas. (Sin embargo, la trama completa tendrá que esperar hasta el capítulo 8.)

Los puntos de equilibrio son $(0, 0, 0)$, $(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$ y $(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$. Alrededor de cada uno de esos puntos efectuaremos linearizaciones para determinar el retrato local del espacio fase.

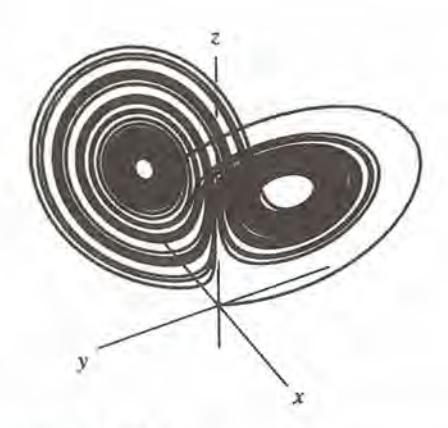


Figura 5.45
Una curva solución del sistema de Lorenz en el espacio fase x-y-z.

La matriz jacobiana en (x, y, z) es

$$\begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 - z & -1 & -x \\ y & x & -8/3 \end{pmatrix}.$$

En el origen, la jacobiana es

$$\begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{pmatrix},$$

por lo que el sistema lineal que aproxima al sistema de Lorenz cerca del origen es

$$\frac{dx}{dt} = -10x + 10y$$
$$\frac{dy}{dt} = 28x - y$$
$$\frac{dz}{dt} = -\frac{8}{3}z.$$

Este sistema se desacopla porque las ecuaciones para dx/dt y dy/dt no dependen de z, y la ecuación para dz/dt no depende ni de x ni de y. En la sección 3.8 estudiamos este sistema y encontramos que el origen es un sumidero en la dirección z y un punto silla en el plano x-y. En la gráfica tridimensional, el origen es un punto silla con un plano de condiciones iniciales tendiendo hacia el origen cuando t crece y una línea de condiciones iniciales próxima al origen cuando t decrece. El retrato del espacio fase se reproduce en la figura 5.46.

A continuación consideramos el punto de equilibrio $(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$. El jacobiano en este punto es

$$\begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} & -8/3 \end{pmatrix}.$$

Los eigenvalores son $\lambda_1 \approx -13.8$, $\lambda_2 \approx 0.094 + 10.2i$ y $\lambda_3 \approx 0.094 - 10.2i$, por lo que este punto es un punto silla espiral que tiene una línea de soluciones cercanas al punto de equilibrio conforme t crece, y un plano de soluciones que se mueven en espiral hacia el punto de equilibrio conforme t decrece, las cuales se aproximan a dicho punto muy rápido a lo largo de la dirección del eigenvector del eigenvalor negativo, y luego se alejan en espiral lentamente a lo largo del plano correspondiente a los eigenvalores complejos. Al calcular los eigenvectores, podemos obtener la orientación de la línea recta de las soluciones y del plano de soluciones en espiral. Esto da una buena representación del espacio fase cerca del punto de equilibrio, que está esbozado en la figura 5.46.

Podemos determinar la linearización para el punto de equilibrio $(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$ de la misma manera y encontramos que es también un punto silla espiral. Esos cálculos nos dan el retrato "local" del espacio fase cerca de los puntos de equilibrio (vea la figura 5.46). Colocando esto cerca de una solución del sistema completo no lineal de Lorenz, empezamos a ver algún orden en la manera en que se comporta la solución (vea

la figura 5.47), pues tiende a uno de los puntos de equilibrio $(\pm 6\sqrt{2}, \pm 6\sqrt{2}, 27)$ a lo largo de la línea recta correspondiente al eigenvalor negativo. Al llegar cerca al punto de equilibrio, comienza a alejarse moviéndose en espiral. Cuando la espiral es suficientemente grande, la solución queda involucrada con el punto silla en el origen y regresa a repetir su patrón previo o bien va al punto de equilibrio "del otro lado".

Verificación de la realidad

El estudio del comportamiento local cerca de los puntos de equilibrio nos ha dado un poco más de información acerca del complicado comportamiento de las soluciones del sistema de Lorenz. Sin embargo, los retratos locales no nos dicen toda la historia. Esto es lo que hace tan difícil el estudio de éste y otros sistemas tridimensionales. El cálculo y los procedimientos de linearización nos dicen mucho sobre las partes pequeñas del espacio fase, pero el comportamiento de las soluciones también depende de qué está sucediendo "globalmente". El desarrollo de las herramientas necesarias para estudiar esos sistemas, así como para entender los modelos individuales, es un área activa de la investigación matemática.

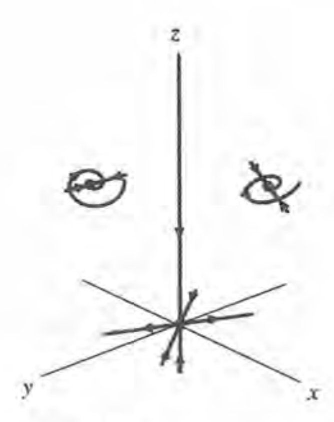


Figura 5.46
Retratos de espacios fase locales alrededor de tres puntos de equilibrio.

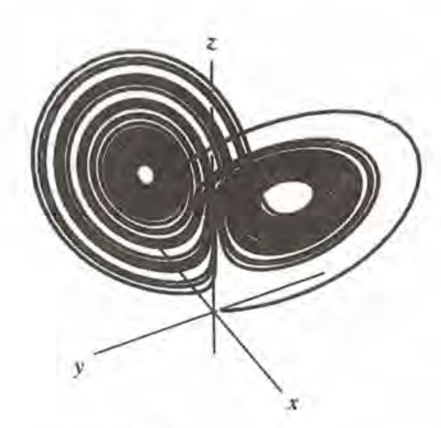


Figura 5.47
Una curva solución del sistema no lineal de Lorenz.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 5.5

Los ejercicios 1-4 se refieren al modelo de la cadena alimenticia de tres especies

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - xy$$
$$\frac{dy}{dt} = y(1-y) + xy - yz$$
$$\frac{dz}{dt} = z(1-z) + yz.$$

del texto. En la sección estudiamos la linearización para el punto de equilibrio donde las tres especies coexisten. Los otros puntos están dados abajo. Para cada uno,

(a) encuentre el jacobiano en el punto,

(b) encuentre los eigenvalores y eigenvectores,

(c) clasifique el punto de equilibrio,

(d) esboce el espacio fase del sistema linearizado, y

(e) analice en unas pocas frases qué sucede a una solución con valor inicial cerca del punto de equilibrio. Habrá varios casos, dependiendo de qué poblaciones no son nulas. No necesita considerar las poblaciones negativas, pero sí todas las combinaciones de cero y poblaciones positivas que estén cerca del punto de equilibrio.

1. (1, 0, 0) **2.** (0, 1, 0) **3.** (0, 0, 1) **4.** (1, 0, 1)

5. Explique por qué hay un punto de equilibrio en (1, 0, 1) con árboles y lobos coexistiendo bajo sus capacidades de soporte, pero no hay puntos de equilibrio ni en (0, 1, 1) ni en (1, 1, 0).

(a) Dé primero la razón "matemática" para estudiar las ecuaciones diferenciales.

(b) Relacione esto con el modelo para comprobar si sus conclusiones son "físicamente razonables".

6. Suponga que una enfermedad de los alces entra a la región de estudio y que βy alces por unidad de tiempo son abatidos por la enfermedad (donde β es pequeño).

(a) Modifique el modelo para incluir la enfermedad de los alces.

(b) ¿Cuáles son los puntos de equilibrio para el nuevo modelo (recuerde que β es pequeño)?

(c) ¿Cómo afecta un incremento en β las poblaciones de equilibrio de árboles, alces y lobos cuando las tres especies coexisten?

7. En esta sección modificamos el modelo original árbol-alce-lobo para incluir el efecto de una enfermedad en los lobos, sustrayendo un término ζy de la población de lobos. Es tentador considerar que el efecto de una enfermedad sobre esa especie modifica el parámetro de su razón de crecimiento. Es decir, cambiar la ecuación de dz/dt a

$$\frac{dz}{dt} = \zeta z(1 - z) + yz,$$

donde ζ es una constante cercana a 1. Las ecuaciones para dx/dt y dy/dt permanecen sin cambio.

(a) Encuentre los puntos de equilibrio de este nuevo sistema. [*Sugerencia:* Los puntos dependerán del parámetro ζ. Recuerde, ζ es cercano a 1.]

(b) ¿Qué efecto tiene un decremento de ζ sobre la población de equilibrio donde las tres especies coexisten?

(c) ¿Es el cambio en el punto de equilibrio lo que usted esperaba?

8. Además del mal tiempo durante el invierno de 1996-1997, la población de alces en la isla Royale fue también atacada por las garrapatas de la madera.* Podemos considerar a las garrapatas como otro depredador de los alces.

(a) Suponga que las garrapatas comen sólo sangre de alce. Incorpore el efecto de las garrapatas en el modelo. [*Sugerencia:* Introduzca una nueva variable dependiente.]

(b) Analice los puntos de equilibrio de su nuevo modelo.

---

* Vea "Winter Devastates Island's Moose", por Les Line, en el *New York Times* Science Section, 1 de abril de 1997.

5.6 FORZAMIENTO PERIÓDICO DE SISTEMAS NO LINEALES Y CAOS

Hasta ahora en este capítulo hemos analizado sólo sistemas autónomos no lineales. Por otra parte, en el capítulo 4 encontramos muchas importantes ecuaciones de segundo orden no autónomas. En particular, las ecuaciones del oscilador armónico periódicamente forzado sólo dependían del tiempo y exhibían comportamientos muy interesantes. Por ejemplo, en la sección 4.2 encontramos que el forzamiento periódico afecta la amplitud de las soluciones oscilantes y puede incluso ocasionar que el sistema "explote" en el caso del forzamiento resonante. En la sección 4.5 estudiamos también un sistema no lineal particular con forzamiento periódico (el puente del estrecho de Tacoma) y vimos que éste tenía un comportamiento sorprendente. En esta sección continuamos con el estudio de sistemas no lineales excitados periódicamente.

Como en el de Lorenz, esos sistemas son ejemplos que a menudo exhiben un comportamiento *caótico*. En este contexto, la palabra caótico significa que las soluciones exhiben un número infinito de comportamientos cualitativamente diferentes. Además, esas soluciones diferentes están empacadas de forma muy estrecha entre sí, de modo que cualquier cambio en las condiciones iniciales tiene un efecto radical a largo plazo en la solución. Por esas razones, es imposible encontrar soluciones analíticas para un sistema caótico debido a que existe una gran diversidad de soluciones. También es imposible un análisis cualitativo completo de las soluciones por la misma razón. A continuación estudiaremos algunos aspectos del comportamiento sorprendente de esos sistemas, y que nos servirán de herramientas para reconocer el "caos" cuando lo encontremos en otros sistemas. Dichos sistemas son el tema de activas investigaciones en matemáticas. Si nuestra presentación parece incompleta, se debe a que una parte de la historia aún debe ser descubierta.

Una ecuación de Duffing forzada periódicamente

Comenzamos con un ejemplo de un sistema no lineal que hemos "entendido completamente", es decir, que podemos dibujar su plano fase y describir el comportamiento de todas las soluciones generadas. Luego agregamos un término de forzamiento periódico y desarrollamos los procedimientos para obtener información del sistema resultante no autónomo.

El sistema no lineal que consideramos es una ecuación de Duffing de la forma

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = y - y^3.$$

Éste es un sistema hamiltoniano con energía $H(y, v) = v^2/2 - y^2/2 + y^4/4$. Podemos dibujar entonces el plano fase para este sistema dibujando las curvas de nivel de H (vea la figura 5.48).

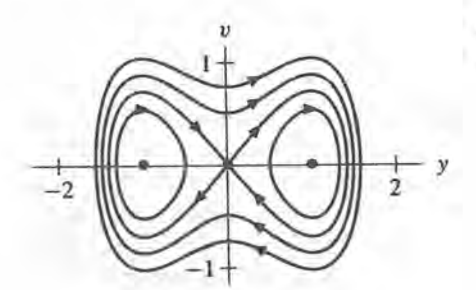


Figura 5.48
Plano fase para el sistema

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = y - y^3.$$

El sistema tiene dos puntos de equilibrio centros en $(\pm 1, 0)$ y uno de punto silla en $(0, 0)$. Las soluciones que tienden al punto silla cuando $t \to -\infty$ también se acercan a ese punto cuando $t \to +\infty$. Todas las demás soluciones son periódicas, y se mueven alrededor de uno de los centros o de los tres puntos de equilibrio.

Modificamos este sistema agregando un término de forzamiento senoidal para obtener

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = y - y^3 + \epsilon \operatorname{sen} t.$$

Note que la amplitud del forzamiento está dado por ϵ y el periodo es 2π (vea los ejercicios para la interpretación de este sistema como ecuación de segundo orden).

El mapa de retorno

Como señalamos en la sección 4.1, las herramientas usuales para tratar con sistemas (el campo vectorial, el campo de direcciones y el plano fase) no son importantes en sistemas no autónomos porque el campo vectorial cambia con el tiempo. En realidad, necesitamos un retrato tridimensional con ejes y, v y t. En ese caso, podríamos imaginar que las soluciones se mueven a lo largo de curvas en el espacio tridimensional y-v-t. En la figura 5.49 se ha intentado representar este tipo de retrato. Esta figura contiene sólo tres soluciones y, sin embargo, es bastante difícil visualizarlas; además, para entender su comportamiento a largo plazo, tendríamos que extender el eje t bastante lejos. Necesitamos encontrar una mejor manera de representar las soluciones.

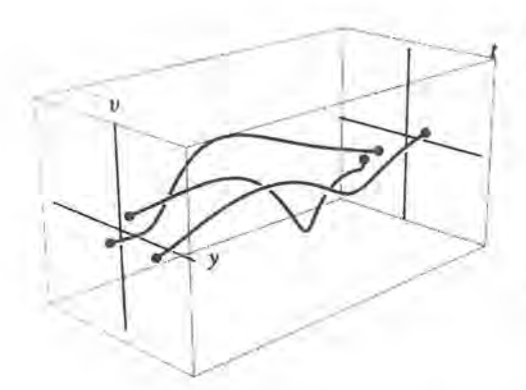


Figura 5.49
Tres soluciones del sistema

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = y - y^3 + \epsilon \operatorname{sen} t$$

en el espacio y-v-t.

Para representar las soluciones de este sistema usamos una idea de la primera persona que vio y entendió las ramificaciones de los sistemas caóticos, el matemático Henri Poincaré. El objetivo es reemplazar el retrato tridimensional en la figura 5.49 por otro bidimensional. Fijemos un punto inicial $y(0) = y_0$, $v(0) = v_0$. En la figura 5.50 está representado por un punto en el plano $t = 0$. Si dibujamos el plano $t = T$ para algún tiempo posterior T en el espacio y-v-t, podemos preguntar en qué punto se tocan la solución que empieza en (y_0, v_0) en el tiempo $t = 0$ y el plano. Siguiendo la curva solución hasta el tiempo $t = T$, podemos determinar dónde se localiza este punto de reunión (vea la figura 5.50).

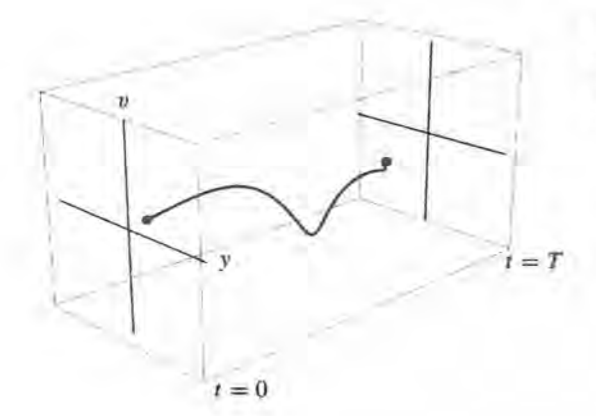


Figura 5.50
Punto inicial sobre el plano $t = 0$ e intersección de la solución sobre el plano $t = T$.

Ahora aprovechamos el hecho de que el término de forzamiento es periódico. Tomamos $T = 2\pi$. La solución que se inicia en $t = 0$ interseca el plano $t = 2\pi$ en algún punto $(y_1, v_1) = (y(2\pi), v(2\pi))$. Una manera de seguir esta solución más adelante es prolongar el eje t. Sin embargo, como el forzamiento es periódico, las ecuaciones diferenciales también lo son, y su periodo es 2π. Por consiguiente, la curva que se inicia en (y_1, v_1) cuando $t = 2\pi$ es una traslación en 2π unidades de tiempo de la curva que se inicia en (y_1, v_1) sobre el plano $t = 0$. En ese caso podemos seguir la solución por otras 2π unidades de tiempo sin prolongar el eje t. Cuando transcurren 2π unidades más, la solución vuelve a encontrar de nuevo el plano $t = 2\pi$, esta vez en un punto (y_2, v_2), que es igual a $(y(4\pi), v(4\pi))$. Podemos repetir el proceso moviendo el punto (y_2, v_2) al plano $t = 0$ y luego seguir la solución otras 2π unidades de tiempo (vea la figura 5.51).

Este retrato aún es muy complicado cuando t es grande ya que hay muchas ramas de la solución que van de $t = 0$ a $t = 2\pi$. Sin embargo, el comportamiento de la solución puede recuperarse de un retrato más simple. Supongamos que lo giramos de manera que el eje t entra directamente hacia el papel. Sólo veremos los puntos en que la solución penetra al plano $t = 0$, es decir, los puntos $(y_0, v_0) = (y(0), v(0))$, $(y_1, v_1) = (y(2\pi), v(2\pi))$, $(y_2, v_2) = (y(4\pi), v(4\pi))$, etc. Esta secuencia de puntos es suficiente para dar una buena idea del comportamiento a largo plazo de la solución.

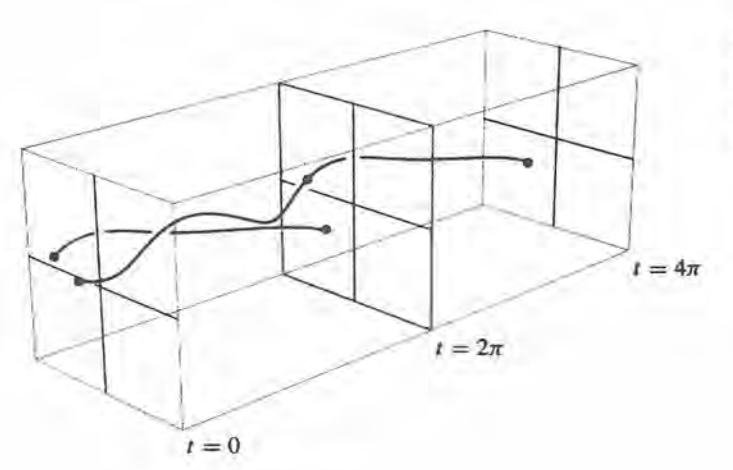


Figura 5.51
El espacio fase de $0 \leq t \leq 4\pi$. Note que la sección de 2π a 4π es justamente una traslación de la sección de 0 a 2π.

Reemplazamos entonces el retrato de las curvas solución en el espacio de fase tridimensional por una función que lleva un valor inicial dado (y_0, v_0) en el plano $t = 0$ a su punto de "primer retorno" (y_1, v_1), también en el plano $t = 0$. Esta función se llama el **mapa de retorno** o **mapa de retorno de Poincaré;** imaginamos los puntos en el plano $t = 0$ llevados o "mapeados" al siguiente punto de intersección con este plano por el mapa de retorno. Aplicando repetidamente esta función, vemos los puntos en que la solución penetra el plano en sucesión.

Mapa de retorno para el sistema no forzado

Para ilustrar este procedimiento, consideremos primero un caso simple. Sea $\epsilon = 0$, por lo que tenemos un sistema no forzado

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = y - y^3.$$

Éste es un sistema autónomo, pero usamos las ideas anteriores para dar un retrato del mapa de retorno en este caso especial. Si comenzamos con una condición inicial cerca del punto de equilibrio en $(1, 0)$, entonces la solución en el espacio y-v-t se mueve en espiral alrededor de este punto de equilibrio (vea la figura 5.52). El mapa de retorno para esta solución toma puntos sobre esta curva a intervalos de tiempo de 2π, y proporciona una secuencia de puntos sobre un lazo alrededor de $(1, 0)$. Si tomamos una condición inicial distinta más alejada de $(1, 0)$, la solución se mueve en espiral a una razón diferente alrededor de $(1, 0)$, y el mapa de retorno resultante da una secuencia de puntos que se desplazan más lento alrededor de $(1, 0)$. Los puntos de equilibrio del sistema dan soluciones que siempre regresan al mismo lugar sobre el plano. Dichos puntos se denominan **puntos fijos** del mapa de retorno de Poincaré. Finalmente, las soluciones que tienden desde el punto de equilibrio del punto silla y retornan a sí mismas, dan una secuencia de puntos que parten del origen y regresan a él a través del mapa de retorno de Poincaré (vea la figura 5.53).

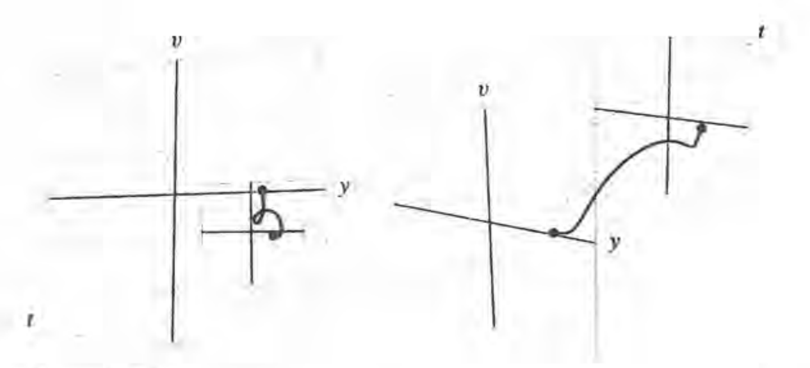


Figura 5.52
En el espacio y-v-t, dos vistas de una solución con punto inicial cerca de $(1, 0)$ para el sistema no forzado.

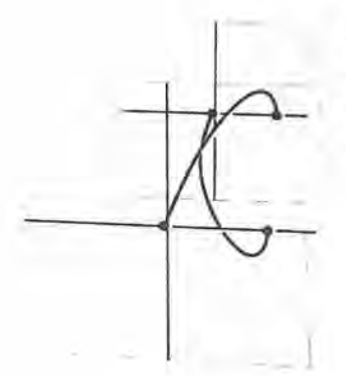


Figura 5.53
Retrato del espacio y-v-t de una solución que va desde el punto de silla en (0, 0) cuando $t \to -\infty$ de regreso hasta (0, 0), cuando $t \to +\infty$, y el correspondiente mapa de retorno de Poincaré.

En la figura 5.54 mostramos los resultados de aplicar el mapa de retorno a varias condiciones iniciales diferentes en el sistema no forzado. En este caso, el mapa de retorno de Poincaré se parece mucho al plano fase. Las condiciones iniciales cerca de $(\pm 1, 0)$ dan soluciones que permanecen sobre lazos cerrados alrededor de $(\pm 1, 0)$, por lo que en el mapa de Poincaré esas soluciones dan secuencias de puntos sobre lazos alrededor de $(\pm 1, 0)$. La distribución de esos puntos difiere a distintos radios, porque la razón a la que las soluciones se mueven en espiral alrededor del origen disminuye conforme el radio aumenta. Las órbitas que conectan el punto fijo de punto silla al mismo dan secuencias que van del origen y de regreso a éste.

Igual que con el espacio fase, es muy instructivo observar esos retratos conforme son calculados. El orden en que aparece la secuencia de puntos en el mapa de retorno da mucha más información que el retrato estático. Sin embargo, aún podemos usar el mapa completo de Poincaré para extraer conclusiones acerca de las soluciones.

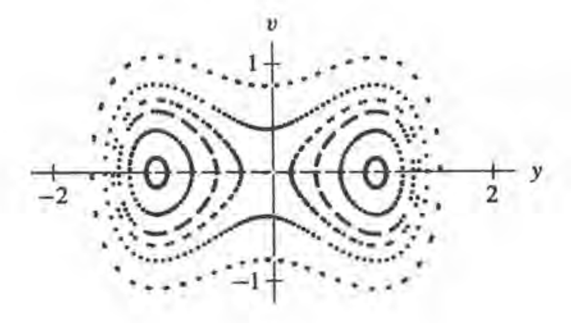


Figura 5.54
El mapa de retorno de Poincaré para muchas soluciones diferentes del sistema

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = y - y^3.$$

Mapa de retorno para el sistema forzado no lineal

Ahora volvemos al sistema forzado no lineal

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = y - y^3 + \epsilon \operatorname{sen} t.$$

Para calcular soluciones numéricamente necesitamos escoger un valor de ϵ. Con este fin, escogemos $\epsilon = 0.06$, pero en los ejercicios se consideran otros valores de ϵ. Nuestro ob-

jetivo es usar el mapa de retorno de Poincaré para interpretar el comportamiento de las soluciones de este sistema.

Fijamos una condición inicial cerca del centro (1, 0), calculamos la solución en el espacio y-v-t y luego el retrato del mapa de retorno de Poincaré. La imagen resultante se encuentra en la figura 5.55, y la gráfica $y(t)$ está dada en la figura 5.56. Podemos usar este retrato para predecir el comportamiento de la solución: por lo menos para tiempos que son múltiplos de 2π, la posición de la solución permanece relativamente cerca de (1, 0).

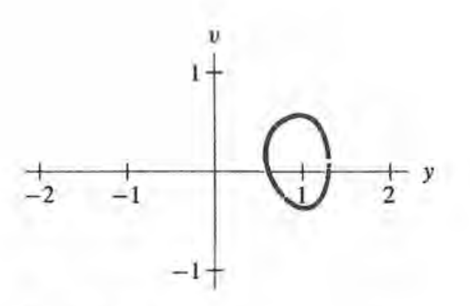


Figura 5.55
Mapa de retorno de Poincaré para una solución con punto inicial cerca de (1, 0) para el sistema forzado de Duffing con $\epsilon = 0.06$.

Figura 5.56
Las gráficas $y(t)$ y $v(t)$ de las soluciones en la figura 5.55.

Las soluciones que se inician cerca del punto silla en el origen son mucho más interesantes. El mapa de retorno de Poincaré para tal solución se da en la figura 5.57. En vez de una curva simple que conecte el origen consigo mismo, toda a un lado del plano fase, vemos una nube de puntos en ambos lados del origen.

La figura 5.57 nos permite predecir que una solución que se inicia cerca del origen se comporta de manera errática. La coordenada y toma valores tanto positivos como negativos. Como los puntos no parecen seguir un patrón regular, podemos predecir que la gráfica $y(t)$ de esta solución oscila sin ningún patrón particular. Esto es lo que observamos en la figura 5.58.

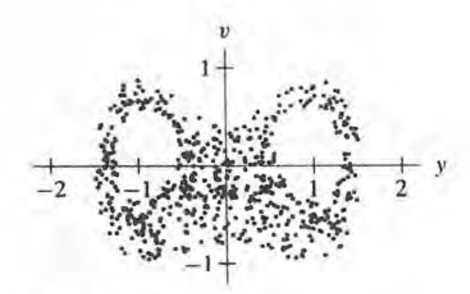


Figura 5.57
Mapa de retorno de Poincaré para una solución con punto inicial cerca del origen, para el sistema no lineal forzado con $\epsilon = 0.06$.

Figura 5.58
Las gráficas $y(t)$ y $v(t)$ de las soluciones en la figura 5.57.

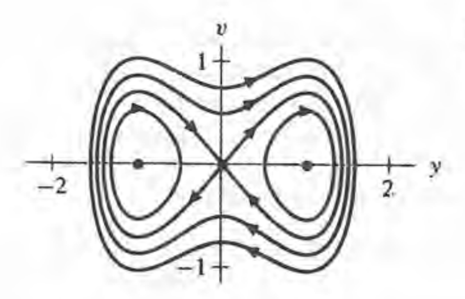


Figura 5.59
Plano fase para el sistema no forzado

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = y - y^3.$$

Es posible obtener alguna idea de por qué esta solución se comporta como lo hace, observando de nuevo el plano fase del sistema no forzado (vea la figura 5.59). Una solución que se inicia cerca del origen, digamos justo a la derecha de (0, 0) cerca de la separatriz que sale del origen, se mueve alejándose de éste durante cierto tiempo. Luego forma un lazo y retorna y se aproxima a (0, 0). El término de forzamiento es muy pequeño, por lo que tiene poco efecto sobre la solución cuando está lejos de (0, 0), ya que el campo vectorial tiene una magnitud relativamente pequeña en esta región. Esperamos entonces que la solución retorne a esta vecindad cerca de la separatriz de entrada. Cuando la solución está cerca del origen, el campo vectorial del sistema no forzado es pequeño, por lo que el forzamiento se vuelve más importante. Cuando la solución está cerca de (0, 0), si el término de forzamiento está empujando la solución hacia arriba (es decir, 0.06 sen $t > 0$), entonces la solución se mueve hacia la región $v > 0$ y por consiguiente sigue a la separatriz de salida de regreso hacia el medio plano derecho. Si, por otra parte, el término de forzamiento es negativo cuando la solución está cerca del origen, en ese caso es posible que haya suficiente "empuje" para mover la solución por debajo de la separatriz de entrada. En esta situación la solución procede hacia el medio plano izquierdo y, una vez ahí, describe un lazo alrededor del punto de equilibrio izquierdo.

Así entonces, en cada lazo, la solución del sistema forzado debe "tomar una decisión" cuando regresa a la vecindad del origen. Puede entrar al medio plano derecho o al medio plano izquierdo. ¿Qué dirección toma la solución? Depende de la posición de la solución respecto al origen y del signo del término de forzamiento cuando se aproxima al origen. Esto significa que la opción depende entonces del tiempo.

En consecuencia, no podemos predecir qué sucede cuando la condición inicial es modificada ligeramente. La solución se mueve lentamente cuando está cerca de (0, 0), por lo que un ligero cambio de la condición inicial que empuje a la solución más cerca del origen representa una diferencia importante en el tiempo que la solución pasa cerca de (0, 0). Esto a su vez afecta el tiempo que le toma regresar a la solución al origen y, por consiguiente, puede influir a qué lado del plano y-v entrará después. Por tanto, una pequeña diferencia en la condición inicial puede cambiar de manera radical el comportamiento a largo plazo de la solución. Esto se evidencia en la figura 5.60, donde se muestran las grá-

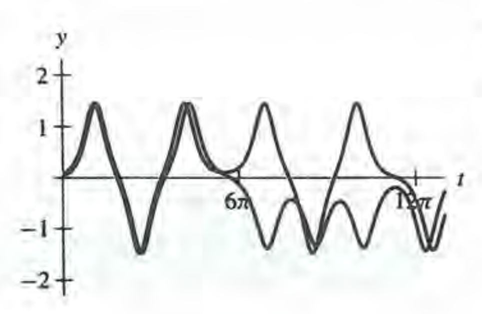


Figura 5.60
Las gráficas $y(t)$ de dos soluciones cuyos puntos iniciales están muy cercanos entre sí.

ficas $y(t)$ de dos soluciones con condiciones iniciales muy cercanas entre sí. Durante un tiempo permanecen cercanas, pero después están separadas lo suficiente para tomar decisiones diferentes sobre qué camino seguir cuando están cerca del origen. Después de este tiempo, las soluciones son totalmente distintas.

Verificación de la realidad

Sabemos que el sistema es "determinístico". Este comportamiento de las soluciones es algo frustante, puesto que está completamente determinado por el lado derecho del sistema de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, cuando observamos las soluciones, se comportan una manera que parece no tener ningún patrón particular. Incluso hemos antropomorfizado las soluciones diciendo cosas como "la solución decide qué camino seguir". Las soluciones no piensan, y no tienen que hacerlo puesto que su comportamiento está determinado por el lado derecho de la ecuación diferencial. Lo que pasa es que un cambio muy leve en las condiciones iniciales puede generar un cambio drástico en el comportamiento a largo plazo del sistema.

Si bien este tipo de comportamiento no parece usual comparado con el de las ecuaciones diferenciales que hemos estudiado en secciones previas, no es tan poco común en la naturaleza. Todos los sistemas físicos como el flujo de agua en una corriente turbulenta, los patrones del tiempo meteorológico en la Tierra y aun el lanzamiento de una moneda se comportan de esta manera. Esos sistemas son determinísticos, ya que obedecen leyes estrictas de la física. Esto no implica que sean predecibles. Un pequeño cambio en las condiciones iniciales puede conducir a una diferencia radical en su comportamiento.

Incluso es peligroso confiar en las simulaciones numéricas de esos sistemas. Sabemos que todo método numérico sólo proporciona aproximados de las soluciones. Hay pequeños errores en cada paso de la simulación. Para un sistema como el de arriba, un pequeño error en la aproximación numérica nos da una solución cercana que es ligeramente diferente de la esperada. Pero las soluciones cercanas pueden tener comportamiento a largo plazo radicalmente diferentes. En ese caso, una simulación numérica puede dar resultados muy diferentes de la solución deseada.

Ésta es una razón por la que la predicción del tiempo a largo plazo (más allá de cinco días) no es usualmente muy exacta. Un conocimiento incompleto de los sistemas climáticos y errores en las simulaciones numéricas conducen a predicciones que pueden estar lejos de ser correctas.

El péndulo forzado periódicamente

Como un segundo ejemplo de un sistema no lineal forzado periódicamente, volvemos al sistema que modela el movimiento de un péndulo. Podemos imaginar un péndulo sobre una mesa al que se estimula cada cierto periodo. Resulta que gran parte del comportamiento observado antes también ocurre para este sistema.

Las ecuaciones

Las ecuaciones del péndulo forzado periódicamente con masa 1 y longitud de brazo 1 son

$$\frac{d\theta}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = -g \operatorname{sen} \theta + \epsilon \operatorname{sen} t,$$

donde g es la constante gravitatoria. El término de forzamiento $\epsilon \operatorname{sen} t$ modela una fuerza externa que empuja periódicamente al péndulo en sentidos horario y antihorario con am-

plitud ϵ y periodo 2π. Por conveniencia suponemos que se han escogido las unidades de tiempo y distancia y que $g = 1$; nuestro sistema es entonces

$$\frac{d\theta}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = -\operatorname{sen}\theta + \epsilon \operatorname{sen} t.$$

El mapa de retorno

Construimos el mapa de retorno para el sistema del péndulo forzado exactamente igual que antes. El periodo del término de forzamiento es de nuevo 2π, por lo que seguimos las soluciones en el espacio θ-v-t, comenzando en el plano $t = 0$ y marcando el lugar en que cruzan el plano $t = 2\pi$.

Para los ejemplos siguientes, fijamos $\epsilon = 0.01$; pero en los ejercicios se consideran otros valores de ϵ. En la figura 5.61 mostramos el mapa de retorno de Poincaré para una solución con condición inicial cerca de (0, 0). El lazo espeso resultante pertenece a una solución que oscila con amplitud variable. La gráfica $\theta(t)$ de la misma solución en la figura 5.62 muestra esta oscilación.

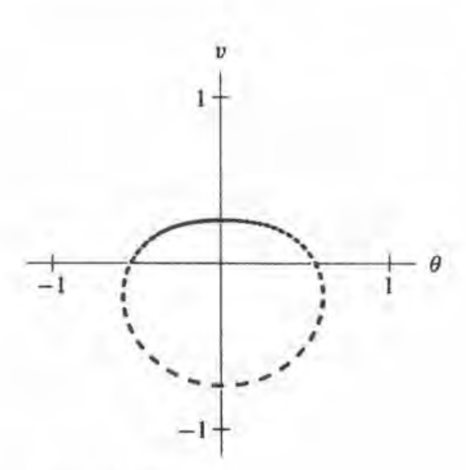


Figura 5.61
Mapa de retorno de Poincaré para el sistema del péndulo periódicamente forzado con $\epsilon = 0.01$, para una solución con condición inicial cerca de (0, 0).

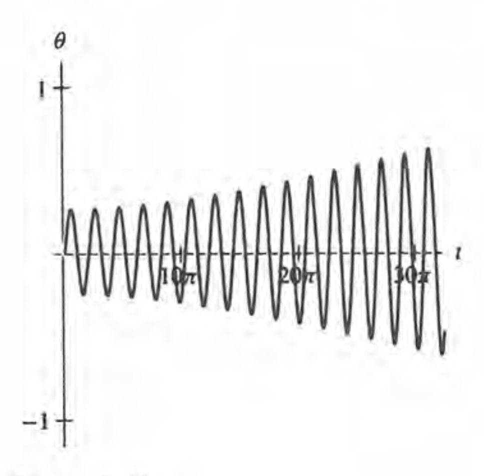


Figura 5.62
Gráfica en el plano $t\theta$ de la solución en la figura 5.61. (La amplitud de la oscilación permanece acotada para toda t.)

Las condiciones iniciales cerca de (0, 0) para el sistema del péndulo forzado corresponden a echar a andar el péndulo con un pequeño ángulo y con pequeña velocidad. En esta situación, el péndulo no forzado (sin amortiguamiento) oscila para siempre con amplitud pequeña constante. La adición del término de forzamiento significa que, igual que para el oscilador armónico forzado, unas veces empuja en la dirección del movimiento haciendo que el péndulo oscile más arriba, y algunas otras opone resistencia al movimiento haciendo que el péndulo oscile menos. A diferencia del oscilador armónico, el periodo del péndulo depende de la amplitud. Por tanto, un forzamiento agrega y resta energía del sis-

tema de modo que, a largo plazo, se vuelve muy complicado. (Esto no es evidente en la figura porque el forzamiento es pequeño.)

Soluciones cerca de los puntos de equilibrio de punto silla

La figura 5.63 muestra el mapa de retorno de Poincaré para una solución de la ecuación del péndulo forzado periódicamente ($\epsilon = 0.01$) con condición inicial cerca de $(-\pi, 0)$. Esos puntos forman una "nube" sin ninguna estructura particular. Además, la coordenada θ resulta bastante grande. Esto significa que el brazo del péndulo ha girado por completo varias veces en una dirección.

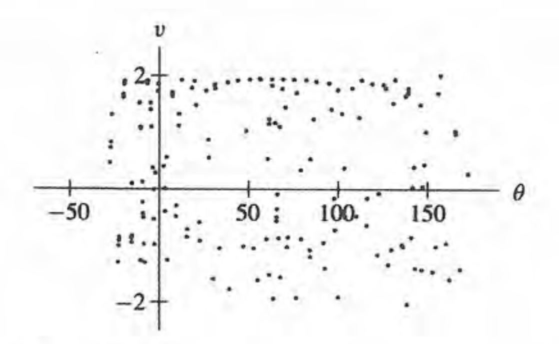


Figura 5.63
Mapa de Poincaré para el sistema del péndulo periódicamente forzado con $\epsilon = 0.01$, para una solución con condición inicial cerca de $(-\pi, 0)$.

Como ocurre en el sistema forzado Duffing, siempre que la solución se aproxima a un punto de equilibrio de punto silla, debe "decidir" qué camino seguir. Si permanece en el medio plano superior, entonces la coordenada θ de la solución se incrementa en un múltiplo de 2π antes de retornar a la vecindad de otro punto silla. Si escoge entrar a la parte inferior del medio plano, entonces la coordenada θ disminuye en 2π antes de hacer otra elección. Si graficamos la coordenada θ de la solución arriba del plano $t\theta$, vemos que se desplaza de manera muy irregular. En particular, es posible que se vuelva muy grande positivamente (o negativamente) si el péndulo "decide" girar de pronto en la misma dirección (vea los ejercicios 5-8).

La decisión de qué camino sigue la solución cuando está cerca de un punto silla depende del signo del término de forzamiento. En ese momento el comportamiento de la solución depende muy levemente de la condición inicial. Si dos soluciones se inician cerca de $(-\pi, 0)$ con casi la misma condición inicial, al final se separan y se vuelven muy diferentes (vea la figura 5.64).

De los retratos anteriores podemos deducir la existencia de un comportamiento interesante en el sistema del péndulo forzado. Una solución del sistema del péndulo forzado con condición inicial cerca de $(-\pi, 0)$ corresponde a una posición inicial del péndulo que es casi vertical pero con muy poca velocidad. Por supuesto, el péndulo oscila hacia abajo. Durante la oscilación, el forzamiento tiene muy poca influencia en el movimiento del péndulo.

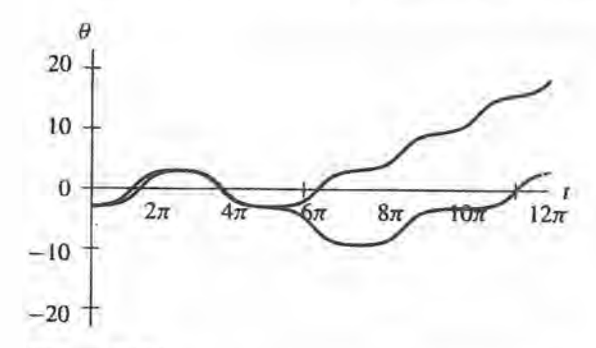


Figura 5.64
Las gráficas $\theta(t)$ para dos soluciones de la ecuación del péndulo periódicamente forzado con condiciones iniciales casi iguales.

Cuando el péndulo oscila casi hasta la posición vertical, se retarda de nuevo y el efecto del término de forzamiento es más pronunciado; cuando está cerca de la parte superior de la oscilación, el término de forzamiento lo "empuja sobre la parte superior" de modo que hace otra vuelta en la misma dirección, o lo "jala de regreso" y oscila de regreso al camino por el que vino. ¿Qué camino toma el péndulo? Esto podemos saberlo a partir del signo del término de forzamiento, que a su vez depende del tiempo que le toma llegar al péndulo a la parte superior de su oscilación. Como el péndulo se mueve muy lento cerca de la parte superior de su trayectoria, un pequeño cambio en las condiciones iniciales puede generar un cambio drástico en el tiempo y, por consiguiente, ocasionar una modificación en la dirección del péndulo.

Recalcamos que el tipo de razonamiento físico dado con anterioridad no pretende reemplazar los retratos de los mapas de retorno de Poincaré ni el análisis de las soluciones. Aunque el razonamiento físico tiene sentido, no nos dice si un término de forzamiento con $\epsilon = 0.01$ es suficientemente grande para ocasionar este tipo de comportamiento.

Moraleja

La moraleja de esta sección es que incluso sistemas que "entendemos" como el péndulo pueden volverse muy complicados cuando se agregan términos adicionales como el forzamiento forzado. El sistema del péndulo forzado periódicamente a primera vista no parece tan complicado, pero del mapa de retorno de Poincaré vemos que sus soluciones se comportan de manera muy impredecible. Un pequeño cambio en la posición inicial con frecuencia tiene un efecto radical sobre el comportamiento de la solución.

Si este tipo de comportamiento, que en la actualidad se llama **caos,** puede observarse en un sistema tan simple como el del péndulo forzado periódicamente, no debería sorprender que también pueda encontrarse en la naturaleza. Esto no es un descubrimiento nuevo. Alrededor de 1880, Henri Poincaré fue quien consideró por primera vez la posibilidad de la existencia del "caos" en la naturaleza. Se encontraba estudiando el movimiento de un pequeño asteroide bajo la influencia de una estrella (el Sol) y un planeta grande (Júpiter). Poincaré desarrolló el mapa de retorno para investigar el comportamiento de este sistema. Lo notable es que entonces no se tenía el beneficio de observar las simulaciones numéricas de las soluciones, como lo hacemos hoy en día. Sin embargo, él pudo ver que el mapa de retorno se comportaría de manera muy complicada y sabiamente no intentó dibujarlo.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 5.6

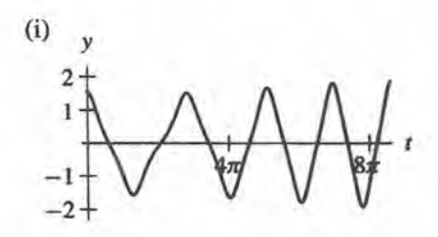
En los ejercicios 1-4 se dan las gráficas de mapas de retorno de Poincaré para cuatro órbitas distintas, con cuatro valores diferentes de ϵ, y condiciones iniciales para la ecuación de Duffing forzada periódicamente

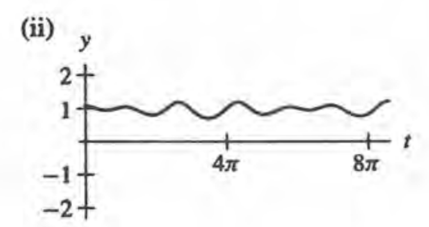
$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = y - y^3 + \epsilon \operatorname{sen} t.$$

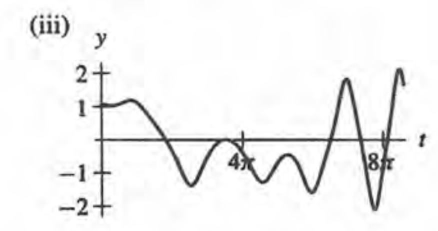
descrita en el texto. Además, también se proporcionan cuatro gráficas $y(t)$ para soluciones de este sistema.

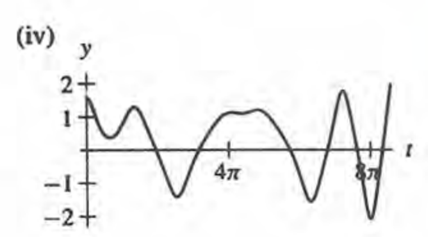
(a) Asocie los mapas de retorno de Poincaré con las gráficas $y(t)$.

(b) En un ensayo breve describa cómo hizo esta asociación y explique el comportamiento cualitativo de la solución.

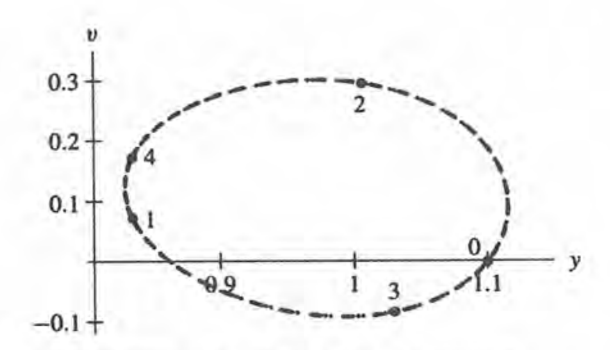






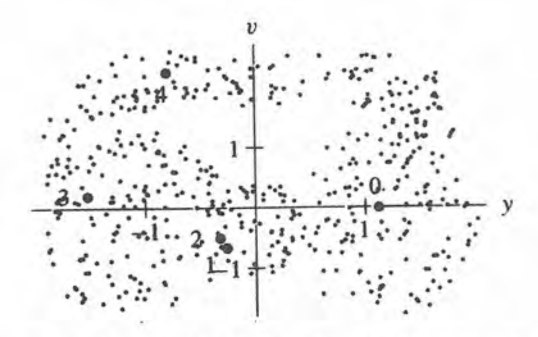


1. Para $\epsilon = 0.1$, $y(0) = 1.1$, $v(0) = 0$.



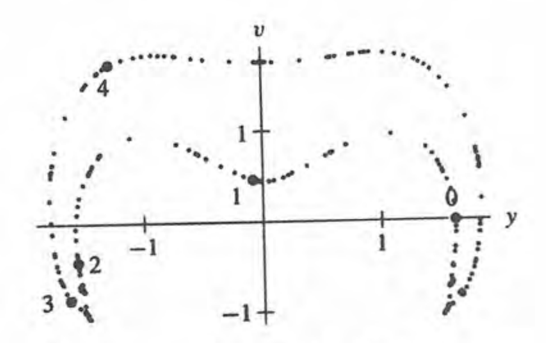
Mapa de retorno de Poincaré con 500 iteraciones.
Se indican los primeros cuatro retornos.

2. Para $\epsilon = 0.4$, $y(0) = 1.1$, $v(0) = 0$.



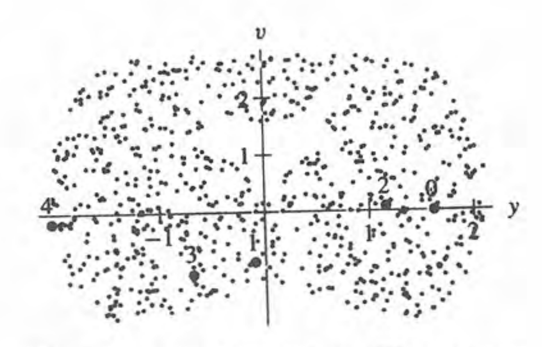
Mapa de retorno de Poincaré con 500 iteraciones.
Se indican los primeros cuatro retornos.

3. Para $\epsilon = 0.1$, $y(0) = 1.6$, $v(0) = 0$.



Mapa de retorno de Poincaré con 200 iteraciones.
Se indican los primeros cuatro retornos.

4. Para $\epsilon = 0.5$, $y(0) = 1.6$, $v(0) = 0$.



Mapa de retorno de Poincaré con 800 iteraciones.
Se indican los primeros cuatro retornos.

En los ejercicios 5-8 se dan los mapas de retorno de Poincaré para cuatro órbitas diferentes con cuatro valores distintos de ϵ y condiciones iniciales para el sistema del péndulo forzado periódicamente

$$\frac{d\theta}{dt} = v$$

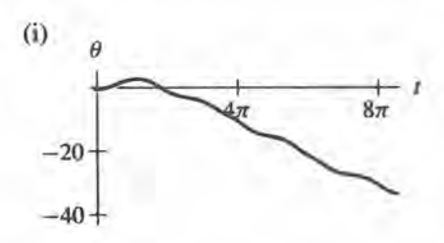
$$\frac{dv}{dt} = -\operatorname{sen}\theta + \epsilon \operatorname{sen} t$$

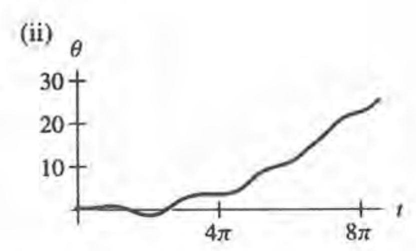
descrito en el texto. Se dan también cuatro gráficas $\theta(t)$ para soluciones de este sistema.

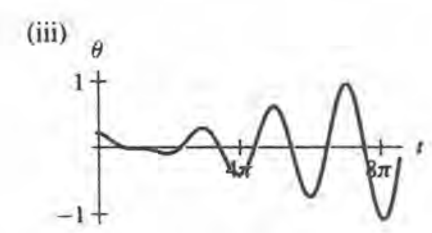
(a) Asocie los mapas de retorno de Poincaré con las gráficas $\theta(t)$.

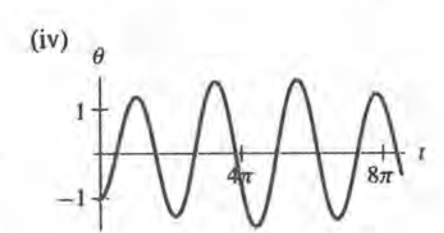
(b) En un ensayo breve explique cómo hizo la asociación y el comportamiento cualitativo de la solución.

(c) Describa el comportamiento del brazo del péndulo cuando éste sigue la solución indicada.

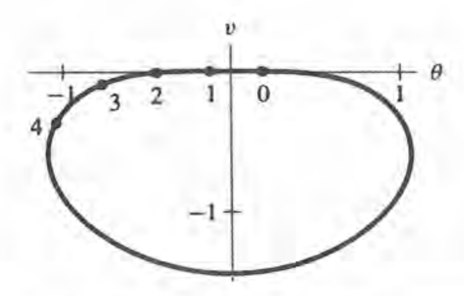






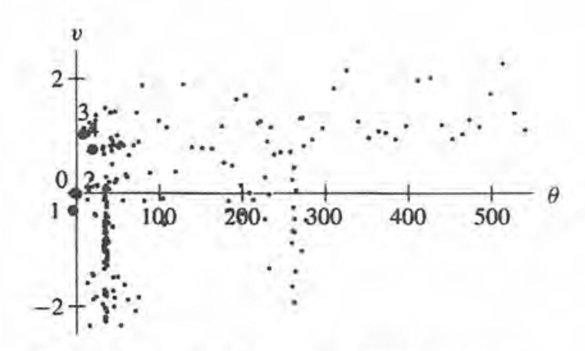


5. Para $\epsilon = 0.1$, $\theta(0) = .2$, $v(0) = 0$.



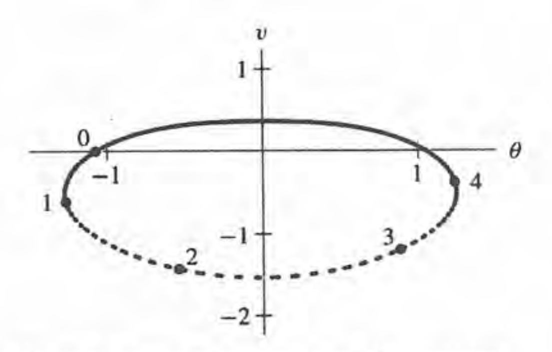
Mapa de retorno de Poincaré con 1 000 iteraciones. Se indican los primeros cuatro retornos.

6. Para $\epsilon = 0.5$, $\theta(0) = 0.2$, $v(0) = 0$.



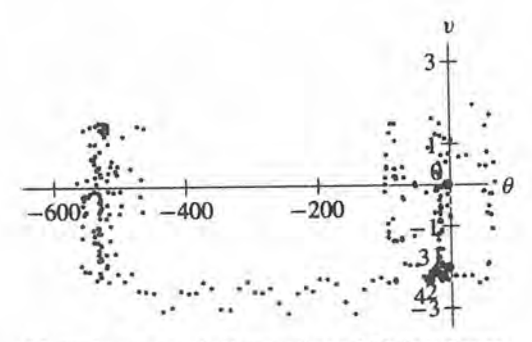
Mapa de retorno de Poincaré con 250 iteraciones.
Se indican los primeros cuatro retornos.

7. Para $\epsilon = 0.1$, $\theta(0) = -1.06$, $v(0) = 0$.



Mapa de retorno de Poincaré con 400 iteraciones.
Se indican los primeros cuatro retornos.

8. Para $\epsilon = 0.5$, $\theta(0) = -1.06$, $v(0) = 0$.

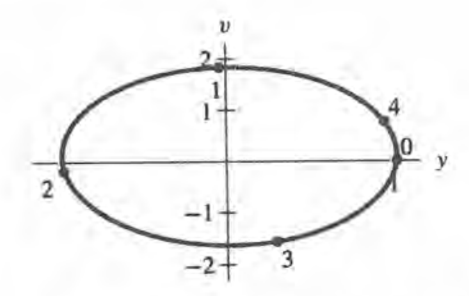


Mapa de retorno de Poincaré con 250 iteraciones.
Se indican los primeros cuatro retornos.

9. El mapa de retorno de Poincaré para una solución del oscilador armónico forzado periódicamente

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -3y + 0.2\,\text{sen}\,t$$

se da a continuación.



Mapa de retorno de Poincaré para el sistema del oscilador armónico forzado con condiciones iniciales $y(0) = 1$, $v(0) = 0$.

(a) Encuentre la solución con la condición inicial $y(0) = 1$, $v(0) = 0$.
(b) Explique por qué el mapa de retorno de Poincaré tiene este aspecto.
(c) ¿Qué aspecto tendría el mapa de retorno de Poincaré para la solución con $y(0) = 4$, $v(0) = 0$?
(d) Diga por qué el mapa de retorno de Poincaré para el sistema del oscilador armónico forzado es diferente del mapa de Poincaré para el péndulo forzado.

10. Describa y esboce el mapa de retorno de Poincaré para la solución del sistema del oscilador armónico forzado

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -4y + 0.1\,\text{sen}\,2t.$$

[*Sugerencia:* Trate de resolver este problema cualitativamente, con sólo pocos cálculos. ¿Cuál es la frecuencia natural del sistema?]

LABORATORIO 5.1 Resortes duros y suaves

En este laboratorio continuamos muestro estudio de las ecuaciones de segundo orden considerando "resortes no lineales". En la sección 3.6 desarrollamos el modelo de un resorte con base en la ley de Hooke, la cual establece que la fuerza restauradora de un resorte es proporcional a su desplazamiento; esta suposición conduce a la ecuación de segundo orden

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + k_s y = 0.$$

Como la ecuación diferencial resultante es lineal, decimos que el resorte es lineal. En este caso la fuerza restauradora es $-k_s y$. Suponemos además que la fuerza de fricción o de amortiguamiento es proporcional a la velocidad. La ecuación de segundo orden resultante es

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + k_d\frac{dy}{dt} + k_s y = 0.$$

La ley de Hooke es un modelo idealizado que funciona bien para oscilaciones pequeñas. De hecho, la fuerza restauradora es aproximadamente lineal si el desplazamiento del resorte desde su posición de equilibrio es pequeño, pero en general es más exacto modelar la fuerza restauradora por una cúbica de la forma $-ky + by^3$, donde b es pequeña respecto a k. Si b es negativa, se dice que el resorte es duro, y si b es positiva, es blando. En este laboratorio consideramos el comportamiento de los resortes duros y blandos para valores particulares de los parámetros. (Su profesor le indicará qué parámetros usar de la tabla 5.1.)

En su reporte deberá analizar los planos fase y las gráficas $y(t)$ y $v(t)$ para describir el comportamiento a largo plazo de las soluciones de las ecuaciones:

1. (Resorte duro sin amortiguamiento) La primera ecuación que deberá estudiar es la del resorte duro sin amortiguamiento; es decir, $k_d = 0$ y $b = b_1$. Examine las soluciones usando sus gráficas y el plano fase. Considere los periodos de las soluciones periódicas que tienen la condición inicial $v(0) = 0$. Esboce la gráfica del periodo como función de la condición inicial $y(0)$. ¿Hay un periodo mínimo? ¿Hay un periodo máximo? Si es así, ¿cómo interpreta esos extremos?

2. (Resorte duro con amortiguamiento) Ahora utilice el valor dado de k_d y $b = b_1$ para introducir el amortiguamiento en el análisis. En este caso, ¿qué le pasa al comportamiento a largo plazo de las soluciones? Determine el valor del parámetro de amortiguamiento que separa el caso subamortiguado del caso sobreamortiguado.

3. (Resorte blando sin amortiguamiento) Considere el resorte blando que corresponde al valor positivo b_2 de b. ¿Sobre qué rango de valores y es razonable este modelo? Tome en cuenta los intervalos de las soluciones periódicas que tienen la condición inicial $v(0) = 0$. Esboce la gráfica del periodo como función de la condición inicial $y(0)$. ¿Hay un periodo mínimo? ¿Hay uno máximo? Use el retrato fase como ayuda para justificar su respuesta.

4. (Resorte blando con amortiguamiento) Usando los valores dados de k_d y $b = b_2$, ¿qué sucede en este caso al comportamiento a largo plazo de las soluciones? Determine el valor del parámetro de amortiguamiento que separa el caso subamortiguado del sobreamortiguado.

5. Desde un punto de vista físico, ¿cuál es la diferencia entre un resorte duro y otro blando?

Sobre su reporte: Responda cada uno de los cinco incisos en forma de un pequeño ensayo. Puede ilustrarlos con retratos de los planos fase y gráficas de las soluciones. Sin embargo, sus ensayos deben quedar completos y ser inteligibles sin los retratos. Asegúrese de relacionar el comportamiento de las soluciones con el movimiento de la masa y resorte asociados del sistema.

Tabla 5.1
Opciones para los valores de los parámetros. Suponga que la masa $m = 1$, a menos que su profesor le indique otro valor.

Opción	k_s	k_d	b_1	b_2
1	0.1	0.15	−0.005	0.005
2	0.2	0.20	−0.008	0.008
3	0.3	0.20	−0.009	0.009
4	0.2	0.20	−0.005	0.005
5	0.1	0.10	−0.005	0.005
6	0.3	0.20	−0.007	0.007
7	0.3	0.15	−0.007	0.007
8	0.1	0.15	−0.004	0.004
9	0.2	0.15	−0.005	0.005
10	0.3	0.20	−0.008	0.008

LABORATORIO 5.2 Aproximaciones de orden superior para el péndulo

En capítulos previos estudiamos el comportamiento de las ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden (como las del oscilador armónico) reduciéndolas a sistemas lineales de primer orden. Este procedimiento de "reducción" también puede aplicarse a ecuaciones no lineales y, además, lo utilizaremos en este laboratorio para estudiar el péndulo ideal y aproximaciones al péndulo.

En el texto modelamos el péndulo ideal por medio de la ecuación no lineal de segundo orden

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\,\theta = 0,$$

donde θ es el ángulo medido desde la vertical, g es la constante gravitatoria ($g = 32$ pies/ s^2) y l es la longitud de la barra del péndulo, es decir, el radio del círculo sobre el cual viaja la masa. En este laboratorio compararemos los resultados de la simulación numérica de este modelo con los resultados obtenidos a partir de dos de sus aproximaciones. La primera de ellas es lineal y está dada por

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

La segunda aproximación es cúbica

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) = 0.$$

Recuerde que la expresión del cálculo $\theta - \theta^3/6$ representa los primeros dos términos del desarrollo en serie de potencias de sen θ alrededor de $\theta = 0$. Estamos especialmente interesados en ver qué tan cerca están las soluciones de las aproximaciones de la ecuación del péndulo ideal de la ecuación original. En particular queremos saber qué tanto se relacionan los periodos de las órbitas de las aproximaciones con los periodos de las órbitas de la ecuación original del péndulo. Su profesor le indicará qué valor del parámetro l (la longitud del brazo del péndulo) deberá usar. Su reporte debe incluir:

1. Un análisis del retrato fase para las tres ecuaciones. Compárelos desde el punto de vista de qué tan bien las ecuaciones lineal y cúbica aproximan al péndulo ideal.

2. Para estudiar cómo se relacionan los periodos de las órbitas, considere la familia paramétrica de condiciones iniciales θ_0, donde $\theta(0) = \theta_0$ y $\theta'(0) = 0$ (velocidad inicial nula). En otras palabras, deberá usted estudiar las diversas soluciones que se inician con un ángulo dado y velocidad nula. ¿Para qué intervalos de condiciones iniciales los periodos de las órbitas de

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

y

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) = 0$$

se aproximan bastante a los periodos de las órbitas del péndulo ideal? (El cálculo de los periodos en la aproximación lineal puede hacerse exactamente usando los procedimientos del capítulo 3. Existen procedimientos analíticos para calcular los periodos de las órbitas de las otras dos ecuaciones, pero en este laboratorio usted debe hacerlo numéricamente.) Trace las gráficas del periodo como función de θ_0 usando una tabla relativamente pequeña (5, 10 o 15 entradas) de periodos obtenidos mediante una simulación numérica directa del modelo.

3. Otra familia de condiciones iniciales es $\theta(0) = 0$ y $\theta'(0) = v_0$. Aquí la velocidad inicial es el parámetro. Al inicio el péndulo señala directamente hacia abajo con una velocidad dada v_0. ¿Qué cambia respecto a sus resultados en el párrafo 2 anterior?

4. Suponga que usted fabrica relojes con base en el movimiento de un péndulo. Para cada una de las tres ecuaciones, ¿qué debe hacer para duplicar el periodo de la oscilación?

Sobre su reporte: Responda cada uno de los incisos anteriores en forma de un breve ensayo. Sea tan sistemático como sea posible al recopilar sus datos y preséntelos en un formato claro y conciso. Usted puede ilustrar sus ensayos con retratos de planos fase y gráficas de soluciones o de los datos que compile. Sin embargo, su descripción debe quedar completa y ser entendible sin los retratos.

LABORATORIO 5.3 Una familia de ecuaciones depredador-presa

En este laboratorio estudiará usted una familia paramétrica de sistemas no lineales de primer orden que consisten en ecuaciones depredador-presa. La familia es

$$\frac{dx}{dt} = 9x - \alpha x^2 - 3xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -2y + xy,$$

donde $\alpha \geq 0$ es un parámetro. En otras palabras, para valores diferentes de α tenemos diferentes sistemas. La variable x es la población de presas (en alguna unidad a escala) y y es la población depredadora. Para un valor dado de α, queremos entender qué sucede a ambas especies cuando $t \to \infty$.

Usted deberá investigar los retratos fase de esas ecuaciones para varios valores de α en el intervalo $0 \leq \alpha \leq 5$. Para iniciarse, ensaye $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5. Piense qué significa el retrato fase en términos de la evolución de las poblaciones x y y. ¿Dónde se encuentran los puntos de equilibrio? ¿De qué tipo son? ¿Qué le sucede a una curva solución común? Considere también el comportamiento de las soluciones especiales en que $x = 0$ o $y = 0$ (las curvas solución se encuentran sobre los ejes x o y).

Determine los valores de bifurcación de α. Es decir, aquellos donde las α cercanas conducen a comportamientos "diferentes" en el retrato fase. Por ejemplo, $\alpha = 0$ es un valor de bifurcación, porque en ese punto el patrón a largo plazo de las poblaciones es significativamente distinto del que muestran cuando α es ligeramente positiva.

Sobre su reporte: Después de determinar todos los valores de bifurcación para α en el intervalo $0 \leq \alpha \leq 5$, estudie una cantidad suficiente de valores específicos de α para poder analizar todos los diversos escenarios de evolución de la población para esos sistemas. En su reporte debe describir esos escenarios usando los retratos fase y las gráficas $x(t)$ y $y(t)$. Su reporte debe incluir:

1. Un análisis breve del significado de los diversos términos del sistema. Por ejemplo, ¿qué representa $9x$? ¿Y $3xy$?
2. Un análisis de todas las bifurcaciones, incluyendo una en $\alpha = 0$. Por ejemplo, ocurre una bifurcación entre $\alpha = 3$ y $\alpha = 5$. ¿Qué significa para la población de depredadores?

Responda las preguntas anteriores en forma de un corto ensayo y respalde sus afirmaciones con ilustraciones seleccionadas. (Recuerde que si bien una buena ilustración puede valer mil palabras, mil ilustraciones usualmente no valen nada.)

6 TRANSFORMADAS DE LAPLACE

En este capítulo estudiaremos un procedimiento analítico denominado transformadas de Laplace, mediante el cual podemos encontrar las fórmulas para solucionar ciertas ecuaciones diferenciales. En particular, este método es efectivo en las ecuaciones lineales de coeficientes constantes y es muy diferente a los que estudiamos antes. Su utilidad radica en que nos permite reemplazar las operaciones de integración y diferenciación con cálculos algebraicos. Como procedimiento para resolver problemas de valor inicial, la transformada de Laplace algunas veces es más y otras menos eficiente que nuestros procedimientos anteriores.

La transformada de Laplace también es importante porque puede aplicarse en una gran diversidad de casos. Por ejemplo, nos permite tratar eficientemente con ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes que tienen funciones de forzamiento discontinuas. Esas discontinuidades incluyen saltos simples que modelan la acción de un interruptor. Puede usarse además para elaborar el modelo matemático de la fuerza de impulso suministrada por un golpe de martillo o una explosión. Otra de las aplicaciones de las transformadas de Laplace consiste en encontrar las soluciones en un oscilador armónico forzado, a partir de las soluciones generadas por un término de forzamiento completamente diferente. Este procedimiento es eficiente al tratar con un sistema que es modelado por una ecuación diferencial lineal desconocida con coeficientes constantes, para la cual damos la función de forzamiento (vea la sección 6.5). Por último, las transformadas de Laplace nos dan una manera de ampliar nuestro análisis cualitativo de las ecuaciones lineales homogéneas usando los eigenvalores de ecuaciones lineales no homogéneas (vea la sección 6.6).

6.1 TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Transformadas de integrales

En este capítulo estudiaremos la **transformada de Laplace** como una herramienta para resolver ecuaciones diferenciales. Forma parte de un gran grupo, en el que se encuentran muchos tipos diferentes de *transformadas de integrales*. En general, las transformadas de integrales responden la pregunta: ¿qué tanto se "parece" una función dada $y(t)$ a una función estándar particular?

Por ejemplo, si $y(t)$ representa una señal de radio, nos gustaría compararla con una función sen ωt, es decir, con una onda senoidal cuya frecuencia es $\omega/(2\pi)$. Ajustando el parámetro ω podríamos probar qué tan bien se ajusta $y(t)$ a las ondas senoidales con frecuencias diferentes. Idealmente, para cada valor de ω, esperaríamos obtener un número que indicase el parecido entre $y(t)$ y sen ωt. Una manera de lograr esta comparación es calculando la integral

$$\int_{-N}^{N} y(t) \operatorname{sen} \omega t \, dt$$

para N grandes. Si $y(t)$ está oscilando con una frecuencia de $\omega/(2\pi)$ y es positiva cuando sen ωt es positiva, entonces esta integral es muy grande. Si $y(t)$ tiene alguna otra frecuencia, los signos de $y(t)$ y sen ωt difieren en algunos tiempos t, por lo que la integral se cancela en partes y su valor es menor.

Para aplicar esta idea en ecuaciones diferenciales, es natural comparar $y(t)$ a la función que aparece más seguido, la exponencial. De hecho, podríamos usar la exponencial compleja y calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-zt} \, dt,$$

donde $z = s + i\omega$ es un parámetro complejo. Entre mayor es el valor de esta integral para una z particular, más se "parece" $y(t)$ a e^{zt}. En particular, si $y(t) = e^{zt}$, entonces el integrando es la función constante 1 y la integral es infinita.

En la práctica resulta más fácil escribir z en términos de sus partes real e imaginaria como $z = s + i\omega$ y calcular las dos transformadas

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-st} \, dt \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} \, dt$$

por separado. La integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} \, dt$$

se llama la *transformada de Fourier* de la función $y(t)$ y su valor particular de ω es una medida de la extensión en que $y(t)$ está oscilando con frecuencia $\omega/(2\pi)$. La parte imaginaria de esta cantidad es la comparación de $y(t)$ con sen ωt como se vio antes y la parte real es la comparación de $y(t)$ con cos ωt. Aunque la transformada de Fourier tiene muchas aplicaciones importantes en las ecuaciones diferenciales, no se verá en este capítulo. Más bien, nos centraremos en la integral $\int y(t) e^{-st} \, dt$.

Transformadas de Laplace

La transformada de Laplace de una función dada $y(t)$ emplea la integración para comparar $y(t)$ con las funciones exponenciales e^{st}.

DEFINICIÓN La función Y **transformada de Laplace** de la función y se define por

$$Y(s) = \int_0^\infty y(t)\, e^{-st}\, dt$$

para todo número s en el que converge esta integral impropia. ■

Por ejemplo, si $y(t) = e^{2t}$, entonces su transformada de Laplace $Y(s)$ queda determinada al evaluar la integral impropia

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_0^\infty e^{2t}\, e^{-st}\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{(2-s)t}\, dt \\ &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{(2-s)t}\, dt \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{2-s} e^{(2-s)t} \Big|_0^b \right] \\ &= \frac{1}{2-s} \lim_{b\to\infty} \left[e^{(2-s)b} - e^0 \right]. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{1}{2-s} \lim_{b\to\infty} e^{(2-s)b} = \begin{cases} \infty, & \text{si } s < 2; \\ 0, & \text{si } s > 2, \end{cases}$$

vemos que la integral impropia para $Y(s)$ no converge si $s \le 2$ y que

$$Y(s) = \frac{1}{s-2} \quad \text{si } \ s > 2.$$

En otras palabras, la función transformada de Laplace $Y(s)$ para la función $y(t) = e^{2t}$ es

$$Y(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{s-2}, & \text{si } s > 2; \\ \text{no definida} & \text{si } s \le 2. \end{cases}$$

Este cálculo implica un cierto número de detalles técnicos con integrales impropias que son importantes, pero no permita que esto lo aleje de la idea que subyace en la definición. La transformada de Laplace $Y(s)$ asociada con $y(t)$ es una función que mide qué tan cerca está $y(t)$ de las funciones exponenciales e^{st} para todo valor de s. En este ejemplo encontramos que la transformada de Laplace de e^{2t} es una función $Y(s)$ que es muy peque-

ña si s es mucho mayor que 2; pero cuando s se acerca a 2, los valores de $Y(s)$ crecen hasta que resultan ilimitados en $s = 2$.

Sorprendentemente, podemos usar esta idea para resolver ecuaciones diferenciales. Como pronto veremos, con la transformada de Laplace es posible convertir una ecuación diferencial en algebraica, que a menudo es más fácil de resolver. Esta conversión es similar a traducir una frase del idioma inglés al chino. Ambas tienen el mismo significado, pero las palabras y la gramática son muy diferentes. La función $y(t)$ representa un fenómeno en términos de la variable independiente t "en el dominio del tiempo" y la función $Y(s)$ representa el mismo fenómeno en el dominio s.

De manera más formal y desde un punto de vista estrictamente matemático, decimos que la transformada de Laplace define una operación que convierte una función $y(t)$ a una nueva función transformada $Y(s)$, y usamos la letra $\mathcal{L}$ para representarla. En otras palabras, denotamos que $Y = \mathcal{L}[y]$. En particular, nuestro cálculo de la transformada de Laplace de e^{2t} se escribe como

$$\mathcal{L}[e^{2t}] = \frac{1}{s-2} \quad \text{para } s > 2.$$

Esta manera de expresar la transformada de Laplace es algo descuidada, ya que supone que la variable independiente de la función transformada es la variable s, pero la falta de precisión rara vez ocasiona confusiones.

Para estar seguros de que se trata de la transformada de Laplace (es decir, que la integral impropia converge) por lo menos para algunos valores de s, es preciso concentrar nuestra atención a funciones continuas $y(t)$ o continuas en tramos para las cuales existen las constantes positivas K y M (que dependen de y) tales que $|y(t)| < e^{Mt}$ para $t \geq K$. Se dice que éstas sólo tienen un "crecimiento exponencial". La mayor parte de las funciones encontradas en las aplicaciones tienen esta propiedad.

Note también que la transformada de Laplace está definida como una integral sobre el intervalo $0 \leq t < \infty$ (y no sobre el eje real entero $-\infty < t < \infty$). Es necesario usar este intervalo puesto que, para $s > 0$, $e^{-st} \to \infty$ cuando $t \to \infty$. Si evaluáramos la transformada de Laplace sobre todo el eje real, entonces las restricciones sobre la función $y(t)$ que aseguran la convergencia de la integral serían mucho más estrictas. En la mayoría de las aplicaciones estamos interesados principalmente en el futuro ($t \geq 0$).

Cálculo de transformadas de Laplace de funciones exponenciales

Para una función $y(t)$ y un número dado s, el valor de la transformada de Laplace en s mide el grado de semejanza entre la función $y(t)$ y la función e^{st} sobre el intervalo $t \geq 0$. Para comprobar lo anterior, calculamos la transformada de Laplace de una función exponencial arbitraria. Si $y(t) = e^{at}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{at}] &= \int_0^\infty e^{at}\, e^{-st}\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{(a-s)t}\, dt. \end{aligned}$$

Recuerde que esta integral impropia en realidad es un límite de integrales cuando el límite superior de integración tiende al infinito. Por consiguiente

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{at}] &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{(a-s)t}\,dt \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^b \right] \\ &= \frac{1}{a-s} \lim_{b\to\infty} \left[e^{(a-s)b} - e^0 \right] \\ &= \frac{1}{s-a} \quad \text{si } s > a.\end{aligned}$$

Si $s \leq a$, la integral impropia diverge. En términos estrictos, la transformada de Laplace de e^{at} es la función racional $1/(s-a)$ restringida al intervalo $s > a$. Observe que el estimado anterior de $\mathcal{L}[e^{2t}]$ fue simplemente un caso especial de este cálculo.

Hay otro caso especial de este cálculo que vale la pena mencionar en este momento. Considere que si $a = 0$, entonces $e^{at} = 1$ para toda t. En consecuencia, también hemos calculado la transformada de Laplace de la función que es constantemente igual a 1. Como $a = 0$, tenemos

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \quad \text{para } s > 0.$$

A menudo necesitamos los resultados de esos cálculos así como las transformadas de otras funciones encontradas. Por tanto, proporcionamos una tabla de transformadas de Laplace y las propiedades importantes de esta transformación en la página 557.

Propiedades de la transformada de Laplace

Hay muchas transformadas que convierten una función en otra, pero la de Laplace tiene una propiedad muy especial que es la base de su éxito en la resolución de ecuaciones diferenciales.

TRANSFORMADA DE LAPLACE DE DERIVADAS Dada una función $y(t)$ con transformada de Laplace $\mathcal{L}[y]$, la transformada de Laplace de dy/dt es

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] = s\mathcal{L}[y] - y(0). \qquad ■$$

Para verificar este teorema usamos la definición de $\mathcal{L}[dy/dt]$ y calculamos

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] = \int_0^\infty \frac{dy}{dt} e^{-st}\,dt.$$

Mediante integración por partes con $u = e^{-st}$ y $dv = (dy/dt)\,dt$, tenemos $du = -se^{-st}\,dt$ y $v = y(t)$, por lo que

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] = \lim_{b\to\infty} \left[y(t)\,e^{-st} \Big|_0^b \right] + \int_0^\infty y(t)\,s\,e^{-st}\,dt.$$

Nuestra suposición anterior de que $y(t)$ posee cuando mucho un crecimiento exponencial, aquí es importante. Como $|y(t)| < e^{Mt}$ para alguna constante M,

$$\lim_{t\to\infty} y(t)\, e^{-st} = 0$$

para valores de s suficientemente grandes. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] &= -y(0) + \int_0^\infty y(t)\, s\, e^{-st}\, dt \\ &= -y(0) + s\mathcal{L}[y].\end{aligned}$$

Esta fórmula es la propiedad fundamental de la transformada de Laplace que nos permite reemplazar esencialmente la operación de diferenciación en el dominio t por la operación algebraica, que consiste en multiplicar por s en el dominio s. Por supuesto, esta descripción no es totalmente correcta puesto que debemos recordar la sustracción de $y(0)$, pero en todo caso consideramos que la transformada de Laplace es una operación que convierte un problema de cálculo en un problema de álgebra.

La conversión de un problema de ecuaciones diferenciales en un problema algebraico no sería muy útil si la transformada de Laplace no tuviese propiedades algebraicas razonables. Sin embargo, debido a su definición en términos de una integral, la transformada de Laplace tiene propiedades de linearidad muy convenientes.

LINEALIDAD DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE Dadas las funciones f y g y una constante c,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f+g] &= \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g] \\ \mathcal{L}[cf] &= c\mathcal{L}[f].\end{aligned}$$

En otras palabras, el "operador" transformada $\mathcal{L}$ es un operador lineal. ■

Para verificar esas propiedades, usamos las propiedades de linealidad de la integración. Es decir,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f+g] &= \int_0^\infty (f(t)+g(t))\, e^{-st}\, dt \\ &= \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt + \int_0^\infty g(t)\, e^{-st}\, dt \\ &= \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g],\end{aligned}$$

y

$$\mathcal{L}[cf] = \int_0^\infty cf(t)\, e^{-st}\, dt = c\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt = c\mathcal{L}[f].$$

Con la fórmula de la derivada y la linealidad establecida $\mathcal{L}$ podemos emplear la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales.

Solución de ecuaciones diferenciales por medio de la transformada de Laplace

Considere el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = y - 4e^{-t}, \quad y(0) = 1.$$

Para estudiar este problema, primero utilizaremos algunos procedimientos cualitativos por lo que sabemos qué esperar de la solución analítica.

Análisis cualitativo

El campo de pendientes para

$$\frac{dy}{dt} = y - 4e^{-t}$$

está dado en la figura 6.1. Nos indica que la solución con $y(0) = 1$ decrece cuando t tiende a cero. Una vez que la solución pasa por debajo de $y = 0$, ambos términos en el lado derecho de la ecuación diferencial son negativos, por lo que las soluciones continúan decreciendo. Para una t grande, la ecuación está cerca de

$$\frac{dy}{dt} = y,$$

y por consiguiente esperamos que la solución $y(t) \to -\infty$ cuando $t \to \infty$.

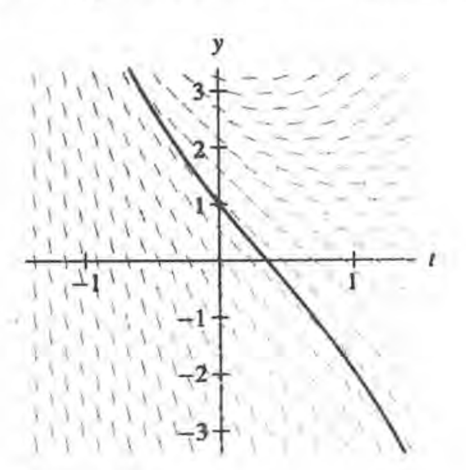


Figura 6.1
Campo de pendientes para $dy/dt = y - 4e^{-t}$ y solución con $y(0) = 1$.

Solución mediante transformadas de Laplace

Esta ecuación es lineal, por lo que podríamos usar los procedimientos de la sección 1.8. Sin embargo, la transformada de Laplace proporciona un método alternativo de solución.

Comenzando con el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = y - 4e^{-t}, \quad y(0) = 1,$$

el primer paso es tomar la transformada de Laplace en ambos lados

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] = \mathcal{L}[y - 4e^{-t}].$$

Después utilizamos la fórmula previa para la transformada de Laplace de una derivada para simplificar el lado izquierdo y la linealidad en el lado derecho, y tenemos

$$s\mathcal{L}[y] - y(0) = \mathcal{L}[y] - 4\mathcal{L}[e^{-t}],$$

Si sustituimos la condición inicial $y(0) = 1$, entonces

$$s\mathcal{L}[y] - 1 = \mathcal{L}[y] - 4\mathcal{L}[e^{-t}].$$

Antes calculamos que $\mathcal{L}[e^{at}] = 1/(s - a)$, por lo que podemos aplicar esta fórmula con $a = -1$ para obtener

$$s\mathcal{L}[y] - 1 = \mathcal{L}[y] - \frac{4}{s+1}.$$

La incógnita en la ecuación diferencial original es la función y, por tanto despejamos la transformada de Laplace de y de esta ecuación y el resultado es

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-1} - \frac{4}{(s-1)(s+1)}.$$

Estos cálculos dan la transformada de Laplace de la solución del problema de valor inicial. Tome en cuenta que sólo usamos aritmética para obtener $\mathcal{L}[y]$. (El cálculo está oculto en el cálculo de la transformada de Laplace de los exponenciales.] En cierto sentido está resuelto el problema de valor inicial.

Desafortunadamente, no estamos buscando la transformada de Laplace $\mathcal{L}[y]$ de la solución; queremos realmente la solución $y(t)$. De alguna manera debemos "reconvertir" o tomar una transformada "inversa" de Laplace. Es decir, debemos encontrar qué función $y(t)$ contiene la función

$$\frac{1}{s-1} - \frac{4}{(s-1)(s+1)}$$

como su transformada de Laplace.

Transformada inversa de Laplace

Cuando empleamos este método para resolver una ecuación diferencial, primero calculamos la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación, y después la transformada de la solución. Finalmente, para encontrar la solución, buscamos una función que contenga la transformada de Laplace dada. El último paso se llama tomar la **transformada inversa de Laplace**. La notación para esta transformación inversa es $\mathcal{L}^{-1}$, es decir,

$$\mathcal{L}^{-1}[F] = f \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{L}[f] = F.$$

Existe una propiedad de unicidad en las transformadas inversas de Laplace que establece que, si f es una función continua con $\mathcal{L}[f] = F$, entonces f es la única función con-

tinua cuya transformada de Laplace es F. Esta propiedad nos permite decir "la" transformada inversa de Laplace de F en vez de "una" transformada inversa de Laplace de F.

Como la transformada de Laplace es un operador lineal, es decir,

$$\mathcal{L}[f+g] = \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g] \quad \text{y} \quad \mathcal{L}[cf] = c\mathcal{L}[f]$$

para cualesquier funciones $f(t)$ y $g(t)$ y cualquier constante c, se infiere que la transformada inversa es también un operador lineal,

$$\mathcal{L}^{-1}[f+g] = \mathcal{L}^{-1}[f] + \mathcal{L}^{-1}[g] \quad \text{y} \quad \mathcal{L}^{-1}[cf] = c\mathcal{L}^{-1}[f].$$

La linealidad es importante porque nos permite determinar la transformada inversa de Laplace de una suma complicada a partir del cálculo de la transformada inversa de cada sumando.

Por lo general, las transformadas inversas de Laplace se obtienen de la misma manera que las antiderivadas en el cálculo. Trabajamos con una pequeña lista de transformadas "conocidas", y para calcular la transformada inversa de Laplace de una función complicada $F(s)$, primero la descomponemos en una suma de funciones cuyas transformadas inversas sean conocidas.

Ejemplos de transformadas inversas de Laplace

Cuando aplicamos la transformada de Laplace al problema de valor inicial antes en esta sección, llegamos a la expresión

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-1} - \frac{4}{(s-1)(s+1)}$$

para la transformada de Laplace de la solución y del problema de valor inicial dado. Por consiguiente, encontramos y calculando la transformada inversa de Laplace

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{4}{(s-1)(s+1)}\right].$$

Por linealidad tenemos

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{(s-1)(s+1)}\right],$$

y de la fórmula para $\mathcal{L}[e^{at}]$ sabemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] = e^t.$$

Para calcular la transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{(s-1)(s+1)}\right]$$

tenemos que usar algo de álgebra. La idea es reescribir el término

$$\frac{4}{(s-1)(s+1)}$$

como una combinación de funciones que se conocen como transformadas de Laplace. En este caso (y muy frecuentemente cuando las empleamos) aplicamos el procedimiento de las fracciones parciales. Es decir, escribimos

$$\frac{4}{(s-1)(s+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1}$$

y despejamos las constantes A y B, obteniendo

$$\frac{4}{(s-1)(s+1)} = \frac{2}{s-1} - \frac{2}{s+1}.$$

Cada uno de los términos del lado derecho se reconoce como la transformada de Laplace de una función exponencial. Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{(s-1)(s+1)}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s-1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1}\right] \\ &= 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] \\ &= 2e^{t} - 2e^{-t}.\end{aligned}$$

Terminación del problema de valor inicial

Previamente mostramos que la transformada de Laplace de la solución y del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = y - 4e^{-t}, \quad y(0) = 1$$

es

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-1} - \frac{4}{(s-1)(s+1)}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}y &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{4}{(s-1)(s+1)}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{(s-1)(s+1)}\right] \\ &= e^{t} - \left(2e^{t} - 2e^{-t}\right) \\ &= -e^{t} + 2e^{-t}.\end{aligned}$$

es la solución. Vemos que $y(t) \to -\infty$ cuando $t \to \infty$, como lo habíamos predicho.

Un ejemplo de un circuito RC

Consideremos el circuito RC en la figura 6.2. Sean $v_c(t)$ el voltaje a través del capacitor, R la resistencia, C la capacitancia y $V(t)$ el voltaje suministrado por la fuente de voltaje.

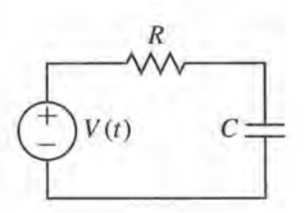


Figura 6.2
Circuito RC.

De la teoría de los circuitos eléctricos, sabemos que el voltaje $v_c(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$RC\frac{dv_c}{dt} + v_c = V(t).$$

Supongamos que la fuente de voltaje $V(t)$ tiene el valor constante de 3 y que el voltaje inicial a través del capacitor es $v_c(0) = 4$. Con las cantidades $R = 2$ y $C = 1$ como en la figura 6.2 (cantidades no muy razonables si usamos las unidades usuales de ohmios para R, faradios para C y voltios para V), el problema de valor inicial es

$$2\frac{dv_c}{dt} + v_c = 3, \quad v_c(0) = 4.$$

Análisis cualitativo

Reescribiendo este problema de valor inicial en la forma estándar

$$\frac{dv_c}{dt} = -\frac{v_c}{2} + \frac{3}{2}, \quad v_c(0) = 4,$$

vemos que esta ecuación es autónoma con un sumidero en $v_c = 3$ y ningún otro punto de equilibrio. Por tanto, la solución del problema de valor inicial tiende a $v_c = 3$ cuando $t \to \infty$, lo que es confirmado por el campo de pendientes y la línea fase (vea la figura 6.3).

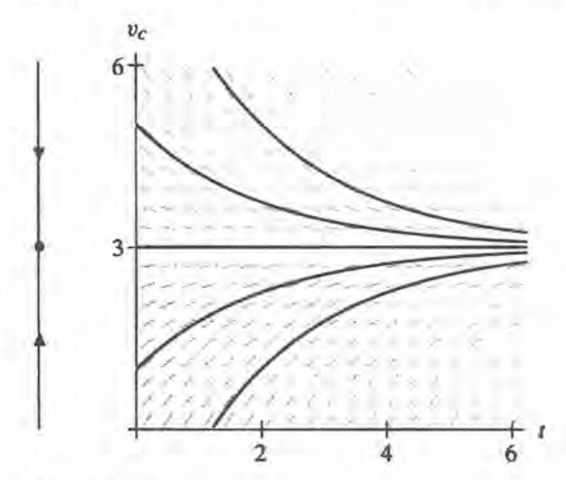


Figura 6.3
Línea fase y campo de pendientes para $dv_c/dt = (-v_c + 3)/2$.

Solución usando transformadas de Laplace

La ecuación diferencial

$$\frac{dv_c}{dt} = -\frac{v_c}{2} + \frac{3}{2}$$

es separable y lineal, pero en esta sección usaremos el método de las transformadas de Laplace para encontrar una fórmula para la solución. Primero, tomamos la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación, con lo que obtenemos

$$\mathcal{L}\left[\frac{dv_c}{dt}\right] = -\frac{1}{2}\mathcal{L}[v_c] + \mathcal{L}\left[\frac{3}{2}\right].$$

Usando la fórmula para $\mathcal{L}[dv_c/dt]$, simplificando y sustituyendo el valor inicial $v_c(0) = 4$, resulta

$$s\mathcal{L}[v_c] - 4 = -\frac{1}{2}\mathcal{L}[v_c] + \frac{3}{2}\mathcal{L}[1].$$

Antes vimos que $\mathcal{L}[1] = 1/s$. Por tanto, tenemos

$$s\mathcal{L}[v_c] - 4 = -\frac{1}{2}\mathcal{L}[v_c] + \frac{3}{2s}.$$

Despejando $\mathcal{L}[v_c]$ resulta

$$\left(s + \frac{1}{2}\right)\mathcal{L}[v_c] = 4 + \frac{3}{2s},$$

que implica que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[v_c] &= \frac{4}{s+1/2} + \frac{3}{2s(s+1/2)}\\ &= \frac{4}{s+1/2} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{s(s+1/2)}.\end{aligned}$$

Para calcular la transformada inversa de Laplace, usamos la descomposición en fracciones parciales

$$\frac{1}{s(s+1/2)} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1/2}.$$

Obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[v_c] &= \frac{4}{s+1/2} + \frac{3}{2}\left(\frac{2}{s} - \frac{2}{s+1/2}\right)\\ &= \frac{1}{s+1/2} + \frac{3}{s}.\end{aligned}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned}v_c(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1/2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s}\right]\\ &= e^{-t/2} + 3,\end{aligned}$$

Observe que esta solución es consistente con la línea fase y el campo de pendientes para esta ecuación.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 6.1

En los ejercicios 1-4, calcule la transformada de Laplace de la función dada a partir de la definición.

1. $f(t) = 3$ (la función constante)

2. $g(t) = t$

3. $h(t) = -5t^2$

4. $k(t) = t^5$

5. Verifique que

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (s > 0).$$

[*Sugerencia:* Para hacerlo cuidadosamente se requiere inducción matemática.]

6. Usando

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (s > 0),$$

dé una fórmula para la transformada de Laplace de un polinomio de grado n-ésimo arbitrario

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n,$$

donde todas las a_i son constantes.

En los ejercicios 7-14, encuentre la transformada inversa de Laplace de la función dada.

7. $\dfrac{1}{s-3}$

8. $\dfrac{5}{(s-1)(s-2)}$

9. $\dfrac{2}{3s+5}$

10. $\dfrac{14}{(3s+2)(s-4)}$

11. $\dfrac{5}{3s}$

12. $\dfrac{4}{s(s+3)}$

13. $\dfrac{2s+1}{(s-1)(s-2)}$

14. $\dfrac{2s^2+3s-2}{s(s+1)(s-2)}$

En los ejercicios 15-24,

(a) calcule la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación;

(b) sustituya las condiciones iniciales y resuelva para la transformada de Laplace de la solución;

(c) busque una función cuya transformada de Laplace sea la misma de la solución; y

(d) compruebe que ha encontrado usted la solución del problema de valor inicial.

15. $\dfrac{dy}{dt} = -y + e^{-2t}, \quad y(0) = 2$

16. $\dfrac{dy}{dt} + 5y = e^{-t}, \quad y(0) = 2$

17. $\dfrac{dy}{dt} + 7y = 1, \quad y(0) = 3$

18. $\dfrac{dy}{dt} + 4y = 6, \quad y(0) = 0$

19. $\dfrac{dy}{dt} + 9y = 2, \quad y(0) = -2$

20. $\dfrac{dy}{dt} = -y + 2, \quad y(0) = 4$

21. $\dfrac{dy}{dt} = -y + e^{-2t}, \quad y(0) = 1$

22. $\dfrac{dy}{dt} = 2y + t, \quad y(0) = 0$

23. $\dfrac{dy}{dt} = -y + t^2, \quad y(0) = 1$

24. $\dfrac{dy}{dt} + 4y = 2 + 3t, \quad y(0) = 1$

25. Encuentre la solución general de la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = 2y + 2e^{-3t}.$$

(Esta ecuación es lineal, pero use el método de las transformadas de Laplace.)

26. Suponga que $g(t) = \int f(t)dt$; es decir, que $g(t)$ es la antiderivada de $f(t)$. Exprese la transformada de Laplace de $g(t)$ en términos de la transformada de Laplace de $f(t)$.

27. Todos los ejemplos en esta sección y las ecuaciones diferenciales en este grupo de ejercicios son lineales. Tratar de usar la transformada de Laplace incluso en la más simple ecuación no lineal conduce rápidamente a dolores de cabeza. Trate de usar la transformada de Laplace para encontrar la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = y^2, \quad y(0) = 1.$$

Dé una corta explicación de dónde y por qué se atoró usted.

6.2 FUNCIONES DISCONTINUAS

En la sección 6.1 vimos que usar las transformadas de Laplace para encontrar las soluciones de una ecuación diferencial implica ideas completamente distintas de las de nuestros métodos previos. Las operaciones de diferenciación e integración son reemplazadas por operaciones algebraicas. Sin embargo, las transformadas de Laplace no son ninguna panacea. Son aplicables sólo a ecuaciones lineales, y aun cuando reemplazan el cálculo por el álgebra, las operaciones algebraicas pueden resultar muy complicadas.

Con esas limitaciones, es importante preguntar por qué necesitamos otro método para resolver ecuaciones lineales. El resto de este capítulo se dedica a las aplicaciones de la transformada de Laplace que nos permiten estudiar nuevos tipos de ecuaciones y nos dan nueva información sobre las ecuaciones familiares.

En las aplicaciones, las funciones discontinuas surgen de manera natural. Por ejemplo, la introducción repentina de una nueva especie o de una enfermedad desconocida que afecte a una población o el encendido y apagado de un interruptor son fenómenos discontinuos. Las ecuaciones diferenciales que contienen funciones discontinuas son difíciles de tratar analíticamente usando nuestros métodos previos, pero la transformada de Laplace puede facilitar el tratamiento de esas discontinuidades, como lo muestran los siguientes ejemplos.

Transformada de Laplace de una función Heaviside

Para $a \geq 0$, sea $u_a(t)$ la función

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < a; \\ 1, & \text{si } t \geq a. \end{cases}$$

Es decir, $u_a(t)$ tiene una discontinuidad en $t = a$ donde salta de 0 a 1. Por ejemplo, la función $u_2(t)$ tiene una discontinuidad en $t = 2$, donde salta de 0 a 1. (Vea la figura 6.4). Una función de esta forma se llama función escalón o **función de Heaviside** (en honor del ingeniero Oliver Heaviside). Es útil al modelar procesos discontinuos tales como el encendido de un interruptor de corriente eléctrica.

La transformada de Laplace de $u_a(t)$ es

$$\mathcal{L}[u_a] = \int_0^\infty u_a(t)e^{-st}\,dt.$$

Para calcular esta integral, usamos la definición de u_a y separamos el cálculo en dos partes,

$$\mathcal{L}[u_a] = \int_0^a u_a(t)e^{-st}\,dt + \int_a^\infty u_a(t)e^{-st}\,dt.$$

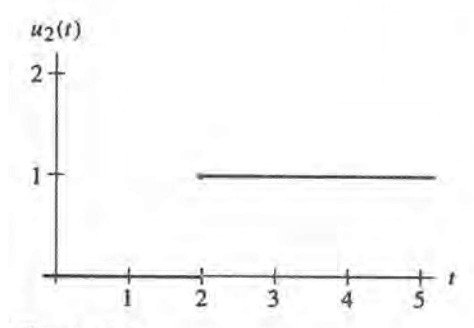


Figura 6.4
Gráfica de la función de Heaviside $u_2(t)$.

La primera integral es cero porque $u_a(t)$ es cero para $t < a$. Podemos simplificar la segunda integral porque $u_a(t) = 1$ para $t \geq a$, y entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u_a] &= \int_a^\infty e^{-st}\,dt \\ &= \lim_{b\to\infty} \int_a^b e^{-st}\,dt \\ &= \lim_{b\to\infty} \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_a^b \\ &= \lim_{b\to\infty} \frac{e^{-sb}}{-s} - \frac{e^{-as}}{-s} \\ &= 0 + \frac{e^{-as}}{s}.\end{aligned}$$

Hemos establecido la fórmula

$$\mathcal{L}[u_a] = \frac{e^{-as}}{s}.$$

Aunque la función original u_a tiene una discontinuidad en $t = a$, la transformada de Laplace es continua para toda $s > 0$. Esta *propiedad de suavización* es un aspecto muy útil de las transformadas de Laplace.

Una ecuación diferencial con una discontinuidad

Considere el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = -y + u_3(t), \quad y(0) = 2.$$

Podemos reescribir esta ecuación diferencial en la forma

$$\frac{dy}{dt} = \begin{cases} -y, & \text{si } t < 3; \\ -y + 1, & \text{si } t \geq 3. \end{cases}$$

Análisis cualitativo

Como éste es en realidad un sistema con un par de ecuaciones autónomas de primer orden, podemos usar los métodos cualitativos del capítulo 1 para analizar el comportamiento de las soluciones. El campo de pendientes se muestra en la figura 6.5. Para $t < 3$, la ecuación $dy/dt = -y$ tiene un sumidero en $y = 0$ y todas las soluciones tienden a este punto de equilibrio. Para $t \geq 3$, la ecuación $dy/dt = -y + 1$ tiene un sumidero en $y = 1$, que atrae a todas las otras soluciones. Por tanto, la solución de nuestro problema de valor inicial decrece al principio hacia $y = 0$. Es por eso que en $t = 3$, la solución comienza a acercarse a $y = 1$. Si en el tiempo $t = 3$ tenemos $y(3) < 1$, entonces la solución deja de disminuir y comienza a incrementarse hacia 1. Si en el tiempo $t = 3$ tenemos $y(3) > 1$, la solución continúa declinando hacia $y = 1$.

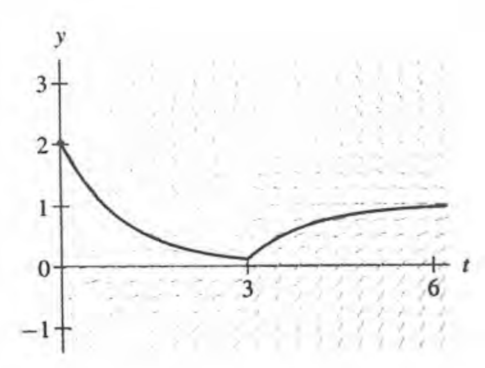


Figura 6.5
Campo de pendientes para

$$\frac{dy}{dt} = -y + u_3(t)$$

y solución con $y(0) = 2$.

Para saber si la solución del problema de valor inicial crece o decrece hacia 1 cuando $t \to \infty$, debemos calcular el valor de la solución en el tiempo $t = 3$. El problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = -y, \quad y(0) = 2$$

tiene la solución $y(t) = 2e^{-t}$. Por consiguiente $y(3) = 2e^{-3}$ y vemos que $y(3) < 1$. En consecuencia, la solución crece para $t > 3$ hacia $y = 1$.

Observe que incluso para obtener una descripción cualitativa de la solución tuvimos que encontrar su forma analítica hasta el tiempo $t = 3$, donde el término $u_3(t)$ "se enciende".

Solución mediante las transformadas de Laplace

Como en la sección 6.1, para resolver el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = -y + u_3(t), \quad y(0) = 2$$

con este método, tomamos primero la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación diferencial (y empleamos la linealidad también transformada) para obtener

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] = -\mathcal{L}[y] + \mathcal{L}[u_3].$$

Usando la regla para la transformada de Laplace de una derivada y nuestro cálculo de $\mathcal{L}[u_3] = e^{-3s}/s$, tenemos

$$s\mathcal{L}[y] - y(0) = -\mathcal{L}[y] + \frac{e^{-3s}}{s}.$$

Sustituyendo $y(0) = 2$ y despejando $\mathcal{L}[y]$ resulta

$$\mathcal{L}[y] = \frac{2}{s+1} + \frac{e^{-3s}}{s(s+1)}.$$

Por tanto, la solución es

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3s}}{s(s+1)}\right].$$

Ahora
Now

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1}\right] = 2e^{t},$$

pero para determinar

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3s}}{s(s+1)}\right]$$

necesitamos otra regla para calcular las transformadas de Laplace.

Desplazamiento del origen sobre el eje t

Dada $f(t)$ suponga que queremos considerar una función $g(t)$, que es la misma que la función $f(t)$ pero desplazada de modo que el tiempo $t = 0$ para f corresponde a cierto tiempo posterior, digamos $t = a$, para g. Para el tiempo $t \leq a$ hacemos $g(t) = 0$. (Entonces g es la misma que f excepto que g "se enciende" en $t = a$.) Una manera eficiente de escribir $g(t)$ es

$$g(t) = u_a(t) f(t-a).$$

Note que

$$g(a) = u_a(a) f(a-a) = f(0)$$

y, si $b > 0$,

$$g(a+b) = u_a(a+b) f(b) = f(b)$$

como se predijo. Por ejemplo, si $f(t) = e^{-t}$ y $a = 3$, entonces $g(t) = u_3(t)e^{-(t-3)}$ (vea las figuras 6.6 y 6.7).

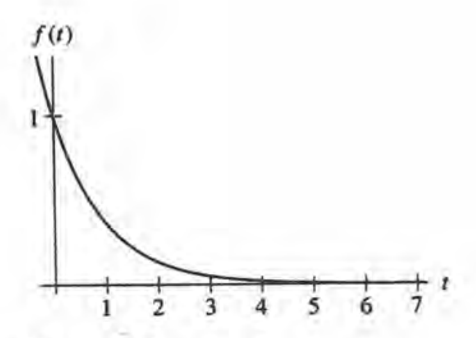


Figura 6.6
Gráfica de $f(t) = e^{-t}$.

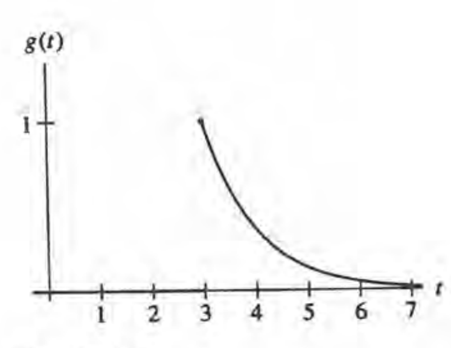


Figura 6.7
Gráfica de $g(t) = u_3(t)e^{-(t-3)}$.

Para calcular la transformada de Laplace de $g(t)$, volvemos a la definición

$$\mathcal{L}[g] = \int_0^\infty g(t)e^{-st}\,dt.$$

Tomando en cuenta que $g(t) = 0$ para $t < a$ y que $g(t) = f(t-a)$ para $t \geq a$, obtenemos

$$\mathcal{L}[g] = \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}\,dt.$$

La sustitución de $u = t - a$ en la integral da

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[g] &= \int_0^\infty f(u)e^{-s(u+a)}\,du \\ &= e^{-sa}\int_0^\infty f(u)e^{-su}\,du \\ &= e^{-sa}\mathcal{L}[f] = e^{-sa}F(s).\end{aligned}$$

Por lo anterior podemos expresar la transformada de Laplace de $g(t) = u_a(t)f(t-a)$ en términos de la transformada de $f(t)$ por la siguiente regla:

$$\text{Si } \mathcal{L}[f] = F(s), \text{ entonces } \mathcal{L}[u_a(t)f(t-a)] = e^{-as}F(s).$$

(Ésta, junto con las otras reglas que desarrollamos para las transformadas de Laplace, pueden encontrarse en la tabla 6.1).

Para el ejemplo anterior, si $g(t) = u_3(t)e^{-(t-3)}$, tenemos que la transformada de Laplace de $g(t)$ es

$$\mathcal{L}[g] = e^{-3s}\mathcal{L}[e^{-t}] = \frac{e^{-3s}}{s+1}.$$

Terminación del problema de valor inicial

Para el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = -y + u_3(t), \quad y(0) = 2,$$

mostramos que

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3s}}{s(s+1)}\right].$$

Usando fracciones parciales, podemos escribir

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

de modo que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3s}}{s(s+1)}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3s}}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3s}}{s+1}\right] \\ &= u_3(t) - u_3(t)e^{-(t-3)}.\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$y(t) = 2e^{-t} + u_3(t)(1 - e^{-(t-3)}).$$

Note que el segundo término es diferente de cero sólo para $t \geq 3$. Es decir, este término "se enciende" precisamente cuando $u_3(t)$ en la ecuación diferencial "se enciende".

Un circuito RC con una fuente de voltaje con decaimiento exponencial

Consideremos el circuito RC en la figura 6.8 con fuente de voltaje

$$V(t) = 2u_4(t)e^{-(t-4)}.$$

La fuente de voltaje tiene un valor de 2 en el tiempo $t = 4$ y luego decae exponencialmente para t creciente (vea la figura 6.9). La ecuación diferencial para el voltaje v_c a través del capacitor es

$$RC\frac{dv_c}{dt} + v_c = V(t).$$

Supongamos que el voltaje inicial a través del capacitor es $v_c(0) = 5$. Si consideramos los valores (no prácticos) $R = 1$ y $C = 1/3$ y utilizamos el $V(t)$ dado arriba, tenemos el problema de valor inicial

$$\frac{1}{3}\frac{dv_c}{dt} + v_c = 2u_4(t)e^{-(t-4)}, \quad v_c(0) = 5.$$

Multiplicando ambos lados por 3 y pasando el término v_c al lado derecho, obtenemos

$$\frac{dv_c}{dt} = -3v_c + 6u_4(t)e^{-(t-4)}, \quad v_c(0) = 5.$$

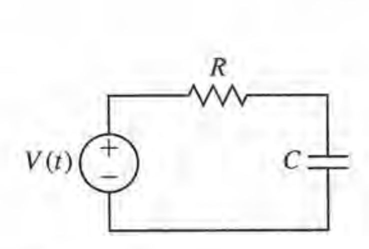


Figura 6.8
Circuito RC.

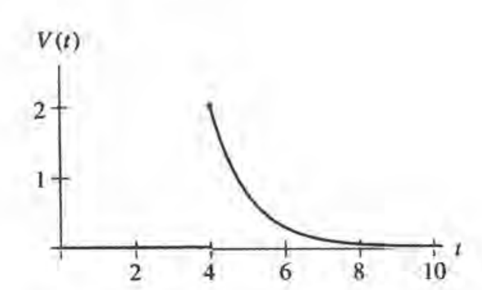


Figura 6.9
Fuente de voltaje $V(t) = 2u_4(t)e^{-(t-4)}$.

Análisis cualitativo

De nuevo podemos reescribir esta ecuación diferencial como

$$\frac{dv_c}{dt} = \begin{cases} -3v_c, & \text{si } t < 4; \\ -3v_c + 6e^{-(t-4)}, & \text{si } t \geq 4. \end{cases}$$

La solución con condición inicial $v_c(0) = 5$ para $0 \leq t < 4$ es $v_c(t) = 5e^{-3t}$. Esta solución decrece muy rápido hacia $v_c = 0$ conforme t se incrementa. Para $t \geq 4$, el término positivo $6e^{-(t-4)}$ ocasiona que las soluciones cercanas a $v_c = 0$ aumenta. Sin embargo, como $6e^{-(t-4)}$ tiende a cero cuando t crece, al final las soluciones se aproximan a cero. Por tan-

to, esperamos que la solución del problema de valor inicial decrezca de inmediato hacia $v_c = 0$ para $0 \leq t < 4$, y que después se incremente para t ligeramente mayor que 4 y, por último, que disminuya de nuevo hacia cero a medida que t se incremente. Este comportamiento es confirmado por el campo de pendientes y la solución en la figura 6.10.

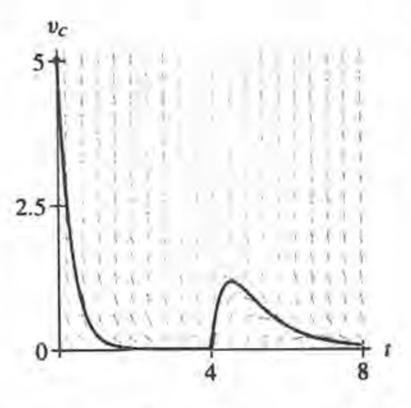


Figura 6.10
Campo de pendientes para

$$\frac{dv_c}{dt} = -3v_c + 6u_4(t)e^{-(t-4)}$$

y solución para $v_c(0) = 5$.

Solución mediante transformadas de Laplace

Comenzando con el problema de valor inicial

$$\frac{dv_c}{dt} = -3v_c + 6u_4(t)e^{-(t-4)}, \quad v_c(0) = 5,$$

tomamos las transformadas de Laplace de ambos lados de la ecuación diferencial para obtener

$$\mathcal{L}\left[\frac{dv_c}{dt}\right] = -3\mathcal{L}[v_c] + 6\mathcal{L}[u_4(t)e^{-(t-4)}],$$

que se simplifica a

$$s\mathcal{L}[v_c] - v_c(0) = -3\mathcal{L}[v_c] + \frac{6e^{-4s}}{s+1}.$$

Al sustituir $v_c(0) = 5$ y despejar $\mathcal{L}[v_c]$, resulta

$$\mathcal{L}[v_c] = \frac{5}{s+3} + \frac{6e^{-4s}}{(s+3)(s+1)}.$$

Entonces,

$$v_c = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5}{s+3}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6e^{-4s}}{(s+3)(s+1)}\right].$$

Usando la descomposición en fracciones parciales

$$\frac{6}{(s+3)(s+1)} = \frac{-3}{s+3} + \frac{3}{s+1},$$

tenemos

$$v_c = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5}{s+3}\right] - 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-4s}}{s+3}\right] + 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-4s}}{s+1}\right].$$

Por consiguiente, la solución del problema de valor inicial es

$$v_c(t) = 5e^{-3t} - 3u_4(t)e^{-3(t-4)} + 3u_4(t)e^{-(t-4)}.$$

Para $0 \leq t < 4$, la solución es $v_c(t) = 5e^{-3t}$, que decrece rápidamente hacia cero. Para $t \geq 4$, la solución es

$$v_c(t) = 5e^{-3t} - 3e^{-3(t-4)} + 3e^{-(t-4)}.$$

Cada término de esta solución tiende a 0 cuando t crece, como se predijo.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 6.2

1. Para $a \geq 0$, sea $g_a(t)$ la función

$$g_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < a; \\ 0, & \text{si } t \geq a. \end{cases}$$

(a) Dé una expresión para $g_a(t)$ usando la función $u_a(t)$ de Heaviside.

(b) Calcule $\mathcal{L}[g_a]$.

2. **(a)** Suponga que $a \geq 0$. Calcule la transformada de Laplace de la función

$$r_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < a; \\ k(t-a) & \text{si } t \geq a. \end{cases}$$

[*Sugerencia:* Su solución debe contener a y k como parámetros.]

(b) Esboce la gráfica de $r_a(t)$ y comente por qué se llama *función rampa.*

3. Suponga que $a \geq 0$. Calcule la transformada de Laplace de la función

$$g_a(t) = \begin{cases} t/a, & \text{si } t < a; \\ 1, & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

[*Sugerencia:* Su solución debe contener a como parámetro.]

En los ejercicios 4-7, determine la transformada inversa de Laplace de la función dada.

4. $\dfrac{e^{-2s}}{s-3}$

5. $\dfrac{e^{-3s}}{(s-1)(s-2)}$

6. $\dfrac{4e^{-2s}}{s(s+3)}$

7. $\dfrac{14e^{-s}}{(3s+2)(s-4)}$

En los ejercicios 8-13, resuelva el problema de valor inicial dado.

8. $\dfrac{dy}{dt} + 7y = u_2(t), \quad y(0) = 3$

9. $\dfrac{dy}{dt} + 9y = u_5(t), \quad y(0) = -2$

10. $\dfrac{dy}{dt} = -y + 2u_3(t), \quad y(0) = 4$

11. $\dfrac{dy}{dt} = -y + u_2(t)e^{-2(t-2)}, \quad y(0) = 1$

12. $\dfrac{dy}{dt} = u_2(t), \quad y(0) = 3$

13. $\dfrac{dy}{dt} = -y + u_1(t)(t-1), \quad y(0) = 2$

14. Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = -2y + u_2(t)e^{-t}, \quad y(0) = 3.$$

[*Advertencia:* Es más difícil de lo que parece.]

15. Suponga que $a \geq 0$. Encuentre la solución general de

$$\frac{dy}{dt} = -y + u_a(t).$$

[*Sugerencia:* Su solución debe contener a como parámetro.]

16. Suponga que $f(t)$ es una función periódica con periodo T; es decir

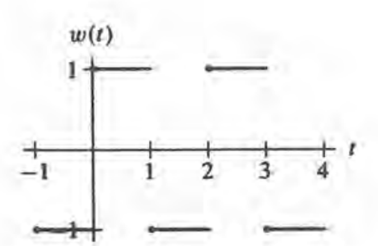
$$f(t + T) = f(t) \qquad \text{para toda } t.$$

Demuestre que

$$\mathcal{L}[f] = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T f(t)e^{-st}\,dt.$$

17. Calcule la transformada de Laplace de la onda cuadrada

$$w(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 2n \leq t < 2n + 1 \text{ para algún entero } n; \\ -1, & \text{si } 2n + 1 \leq t < 2n + 2 \text{ para algún entero } n. \end{cases}$$

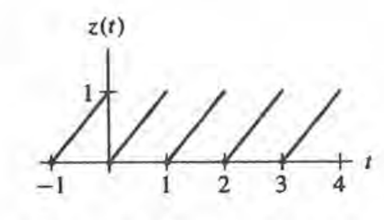


Onda cuadrática con periodo 2.

18. Calcule la transformada de Laplace de la función diente de sierra

$$z(t) = t - [t],$$

donde $[t]$ denota el entero más grande menor o igual que t. [*Sugerencia:* Use la fórmula desarrollada en el ejercicio 16.]



Una onda de diente de sierra con periodo 1.

19. Considere el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = -y + w(t), \quad y(0) = 0,$$

donde $w(t)$ es la onda cuadrada del ejercicio 17.

(a) Calcule la transformada de Laplace de la solución.

(b) Describa el comportamiento cualitativo de esta solución. [*Sugerencia:* Conocer la transformada de Laplace de la solución puede no ser de ayuda en esta parte, pero vea la sección 6.6.]

20. Considere el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = -y + z(t), \quad y(0) = 0,$$

donde $z(t)$ es la onda de diente de sierra del ejercicio 18.

(a) Determine la transformada de Laplace de la solución.

(b) Describa el comportamiento cualitativo de esta solución. [*Sugerencia:* Tal vez en esta parte no nos sirva conocer la transformada de Laplace de la solución, pero revise la sección 6.6.]

6.3 ECUACIONES DE SEGUNDO ORDEN

En esta sección ampliaremos el método de las transformadas de Laplace a las ecuaciones lineales forzadas de segundo orden con coeficientes constantes, es decir, ecuaciones de la forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = f(t),$$

donde p y q son constantes. En el capítulo 4 tratamos ecuaciones de esta forma para funciones particulares de forzamiento $f(t)$. Las transformadas de Laplace nos permiten estudiar otros tipos de funciones de forzamiento, incluidas algunas con discontinuidades.

Para comenzar, recordamos que las funciones sen ωt, cos ωt, e^{at} sen ωt y e^{at} cos ωt aparecen con frecuencia en el estudio de ecuaciones de segundo orden. Por tanto, nuestra primera tarea es estudiar la transformada de Laplace de esas funciones.

Transformadas de Laplace del seno y del coseno

Para calcular la transformada de Laplace de sen ωt, podemos usar la definición y evaluar la integral

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen}\omega t] = \int_0^\infty \operatorname{sen}\omega t \, e^{-st}\, dt.$$

Otro procedimiento es usar exponenciales complejos. Esas alternativas conducen a buenos ejercicios en integración por partes y en fracciones parciales con números complejos, respectivamente (vea los ejercicios 1-4 y 19-21).

El método que usamos para calcular $\mathcal{L}$[sen ωt] aprovecha el hecho de que ya sabemos que $y(t)$ = sen ωt es la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \omega.$$

Por tanto, podemos obtener $\mathcal{L}[\text{sen}\ \omega t]$ calculando la transformada de Laplace de la solución de este problema de valor inicial.

Observe primero que dos aplicaciones de la regla para la transformada de Laplace de una derivada da

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] &= s\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] - y'(0) \\ &= s(s\mathcal{L}[y] - y(0)) - y'(0) \\ &= s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0).\end{aligned}$$

Para resolver el problema de valor inicial mediante transformadas de Laplace

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \omega$$

tomamos primero la transformada de ambos lados de la ecuación diferencial

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] + \omega^2\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[0].$$

Simplificando y considerando que $\mathcal{L}[0] = 0$, tenemos

$$s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) + \omega^2\mathcal{L}[y] = 0.$$

Sustituyendo las condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $y'(0) = \omega$, resulta

$$\begin{aligned}s^2\mathcal{L}[y] - \omega + \omega^2\mathcal{L}[y] &= 0 \\ \left(s^2 + \omega^2\right)\mathcal{L}[y] &= \omega,\end{aligned}$$

por consiguiente

$$\mathcal{L}[y] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Pero ya sabemos que la solución del problema de valor inicial es $y(t) = \text{sen}\ \omega t$, por lo que

$$\mathcal{L}[\text{sen}\omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Para calcular $\mathcal{L}[\cos \omega t]$ podríamos repetir esta operación utilizando el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

cuya solución es $y(t) = \cos \omega t$ (vea el ejercicio 5). Como una alternativa, podemos usar el hecho de que

$$\cos \omega t = \frac{1}{\omega}\frac{d(\text{sen}\omega t)}{dt}.$$

Aplicando transformadas de Laplace a ambos lados de esta ecuación, resulta

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos \omega t] &= \frac{1}{\omega}\mathcal{L}\left[\frac{d(\operatorname{sen}\omega t)}{dt}\right] \\ &= \frac{1}{\omega}(s\mathcal{L}[\operatorname{sen}\omega t] - \operatorname{sen} 0) \\ &= \frac{s}{\omega}\mathcal{L}[\operatorname{sen}\omega t] \\ &= \frac{s}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2},\end{aligned}$$

por lo que

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

(Esas fórmulas están incluidas en las tablas 6.1 y 6.2 de este capítulo.)

Desplazamiento del origen sobre el eje s

Consideraremos ahora las transformadas de Laplace de las funciones e^{at} sen ωt y e^{at} cos ωt. En general, la función transformada de un producto es bastante complicada. Sin embargo, si uno de los factores es una exponencial, se combina muy bien con el factor e^{-st} en la definición de la transformada.

Supongamos que nos dan una función $f(t)$ y que sabemos que su transformada de Laplace es $F(s)$. Para calcular la transformada de $e^{at}f(t)$, recordamos la definición y escribimos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{at}f(t)] &= \int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-st}\,dt \\ &= \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}\,dt \\ &= F(s-a)\end{aligned}$$

Es decir,

$$\text{Si } \mathcal{L}[f] = F(s), \text{ entonces } \mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a).$$

En otras palabras, multiplicar $f(t)$ por e^{at} equivale a un desplazamiento del argumento de la transformada de Laplace F de f por a.

Por ejemplo,

$$\mathcal{L}[\cos 2t] = \frac{s}{s^2+4},$$

es por eso que para calcular la transformada de Laplace de $e^{-3t}\cos 2t$, reemplazamos s por $s+3$. Obtenemos

$$\mathcal{L}[e^{-3t}\cos 2t] = \frac{s+3}{(s+3)^2+4} = \frac{s+3}{s^2+6s+13}.$$

Podemos usar esta regla también para determinar las transformadas inversas de Laplace. Por ejemplo, para

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2s+5}\right]$$

lo primero que observamos es que las raíces de

$$s^2 + 2s + 5$$

son $-1 \pm 2i$. Si el denominador tuviese raíces reales, lo factorizaríamos y usaríamos fracciones parciales para calcular la transformada inversa. Como las raíces en este caso son complejas, escribimos

$$s^2 + 2s + 5 = (s + 1)^2 + 4.$$

(Recuerde que este cálculo algebraico se llama "completando el cuadrado". En los ejercicios 11-14 se repasa este procedimiento.) A continuación notamos que

$$\frac{1}{(s+1)^2 + 4} = F(s+1),$$

donde

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 4}.$$

Sabemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right] = \frac{1}{2}\operatorname{sen}2t.$$

Entonces, usando la regla anterior, tenemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+4}\right] = \frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen}2t.$$

Un oscilador armónico forzado

En el capítulo 4 presentamos la ecuación del oscilador armónico forzado como un modelo de una masa unida a un resorte, que se desliza alternadamente sobre una mesa con una fuerza externa generada, por ejemplo, al inclinar la mesa. Como primer ejemplo del método de la transformada de Laplace para este tipo de ecuación, consideremos el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 3\cos t, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Esta ecuación modela una masa unitaria deslizándose sobre una mesa sin fricción, con una constante de resorte de 4 y una fuerza externa periódica de 3 cos t.

Análisis cualitativo

El polinomio característico para el oscilador armónico no forzado

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0$$

es

$$s^2 + 4 = 0.$$

Los eigenvalores son entonces $s = \pm 2i$ y el periodo natural es $2\pi/2 = \pi$. Como el forzamiento tiene un periodo de 2π, la ecuación forzada

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 3\cos t$$

no es un sistema resonante y cualquier solución permanece acotada todo el tiempo. Las soluciones son combinaciones de funciones trigonométricas con periodos de π y 2π.

Solución mediante transformadas de Laplace

Para usar la transformada de Laplace en el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 3\cos t, \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

calculamos la transformada en ambos lados de la ecuación diferencial y obtenemos

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] + 4\mathcal{L}[y] = 3\mathcal{L}[\cos t].$$

Simplificando tenemos

$$s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) + 4\mathcal{L}[y] = \frac{3s}{s^2+1}.$$

Al sustituir las condiciones iniciales resulta

$$(s^2+4)\mathcal{L}[y] = \frac{3s}{s^2+1},$$

que da

$$\mathcal{L}[y] = \frac{3s}{(s^2+4)(s^2+1)}.$$

Por tanto, la solución buscada es

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s}{(s^2+4)(s^2+1)}\right].$$

Si utilizamos fracciones parciales, tenemos

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-s}{s^2+4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right],$$

cuyo resultado es

$$y(t) = -\cos 2t + \cos t.$$

Esta solución es acotada y se comporta tal como se predijo (vea la figura 6.11).

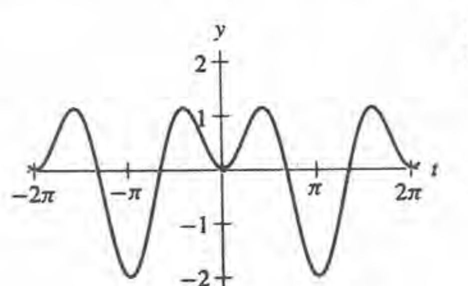


Figura 6.11
Solución de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 3\cos t$$

con $y(0) = y'(0) = 0$.

Un oscilador con forzamiento discontinuo

A continuación consideramos el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = h(t), \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

donde $h(t) = 1 - u_7(t)$ está dada por

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t < 7; \\ 0, & \text{si } t \geq 7; \end{cases}$$

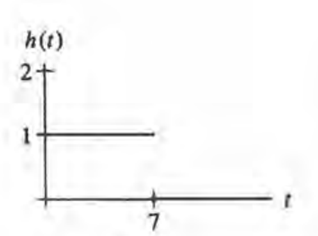


Figura 6.12
Gráfica de la función $h(t)$.

(vea la figura 6.12).

Éste es un modelo para una masa unitaria unida a un resorte cuya constante de resorte es 5 y se desliza sobre una mesa con un coeficiente de amortiguamiento de 2 (vea el capítulo 4). Podemos interpretar las condiciones iniciales y el término de forzamiento como sigue: supongamos que en el tiempo $t = 0$ la masa se mantiene en reposo en $y = 0$. Cuando $t < 7$, la mesa se inclina de manera que la gravedad proporciona una fuerza unitaria que alarga al resorte. En el tiempo $t = 7$, la mesa vuelve a nivelarse (vea la figura 6.13).

Análisis cualitativo

El polinomio característico de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = 0$$

es

$$s^2 + 2s + 5 = 0.$$

Los eigenvalores son $s = -1 \pm 2i$, por lo que este oscilador es subamortiguado. En consecuencia, cuando $0 < t < 7$, la masa se desliza hacia abajo de la mesa y oscila al aproximarse a una posición de equilibrio, para la cual el resorte está ligeramente estirado. Para $t > 7$, después de que la mesa ha vuelto a nivelarse, la masa se desliza de regreso hacia la posición original de reposo y luego oscila con amplitud exponencialmente decreciente.

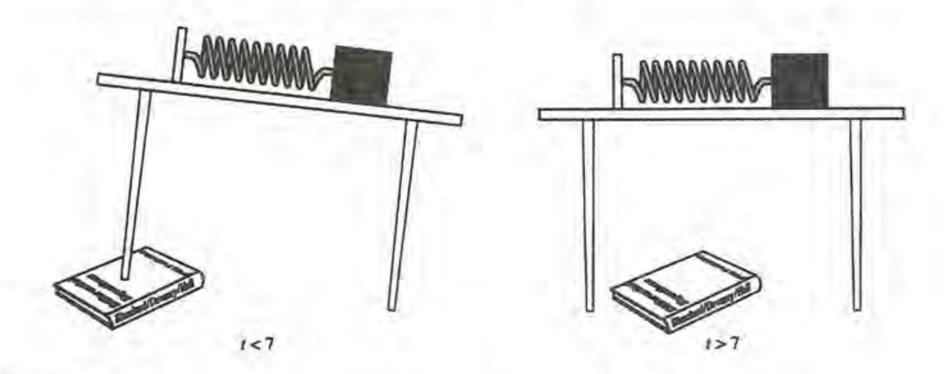


Figura 6.13
Esquema de un sistema masa-resorte sobre una mesa inclinada ($t < 7$) y sobre una mesa nivelada ($t > 7$).

Solución mediante transformadas de Laplace

Como lo hicimos antes, empezamos por calcular la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación diferencial. Si empleamos la linealidad, obtenemos

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] + 2\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] + 5\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[h(t)].$$

Por consiguiente,

$$(s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0)) + 2(s\mathcal{L}[y] - y(0)) + 5\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[h(t)].$$

Agrupando términos, sustituyendo las condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$ y evaluando $\mathcal{L}[h(t)] = \mathcal{L}[1 - u_7(t)]$, tenemos

$$(s^2 + 2s + 5)\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s} - \frac{e^{-7s}}{s},$$

que da

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} - \frac{e^{-7s}}{s(s^2 + 2s + 5)}.$$

Es decir,

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} - \frac{e^{-7s}}{s(s^2 + 2s + 5)}\right].$$

Para calcular el lado derecho, es preciso descomponerlo en fracciones parciales

$$\frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{1}{5s} - \frac{s + 2}{5(s^2 + 2s + 5)}.$$

Sabemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{5s}\right] = \frac{1}{5},$$

de modo que sólo tenemos que trabajar con el segundo término. En éste, el denominador cuadrático tiene raíces complejas; por tanto, completamos primero el cuadrado y obtenemos

$$s^2 + 2s + 5 = (s + 1)^2 + 4.$$

Después escribimos esta expresión en la forma más conveniente

$$\frac{s + 2}{5(s^2 + 2s + 5)} = \frac{1}{5}\left(\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 4} + \frac{1}{2}\frac{2}{(s + 1)^2 + 4}\right).$$

Entonces,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{5s} - \frac{s + 2}{5(s^2 + 2s + 5)}\right] = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right).$$

La transformada inversa de Laplace de

$$\frac{e^{-7s}}{s(s^2+2s+5)}$$

contiene la función de Heaviside $u_7(t)$ y el mismo conjunto de fracciones parciales que antes. Nuestro resultado final es

$$y(t) = \frac{1}{5} - \frac{e^{-t}}{5}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)$$
$$- \frac{u_7(t)}{5} + \frac{u_7(t)e^{-(t-7)}}{5}\left(\cos(2(t-7)) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2(t-7))\right).$$

La solución para $0 \leq t < 7$ oscila hacia el punto de equilibrio $(y, v) = (1/5, 0)$ donde $v = dy/dt$, que es una posición de equilibrio cuando la mesa está inclinada. Para $t > 7$, se cancelan los términos $1/5$ y $-u_7(t)/5$. Todos los términos restantes tienden a oscilar con amplitud decreciente al punto de equilibrio $(y, v) = (0, 0)$ como se predijo (vea la figura 6.14).

Note que la gráfica de $y(t)$ es diferenciable en $t = 7$, pero la gráfica de $v(t) = dy/dt$ tiene una esquina en $t = 7$. Como el término de forzamiento "se apaga" en $t = 7$, la segunda derivada de y muestra una discontinuidad de salto, por lo que la primera derivada tiene una esquina.

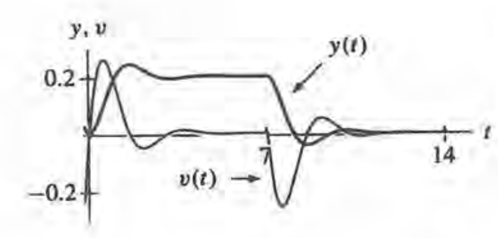


Figura 6.14
Las gráficas $y(t)$ y $v(t)$ para la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = h(t),$$

con $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$.

Forzamiento senoidal

Podemos imaginar muchos tipos diferentes de forzamiento que aparezcan o desaparezcan súbitamente. Por ejemplo, supongamos de nuevo una masa unida a un resorte sobre una mesa. Digamos que en $t \leq 5$ la mesa está horizontal y que no actúa ninguna fuerza externa sobre la masa. En $t = 5$ un sismo comienza a mover la mesa de atrás hacia adelante y viceversa, proporcionando así un término periódico de forzamiento.

Por ejemplo, sea $m = 1$ la masa y $k_s = 4$ la constante de resorte. Suponemos que el oscilador no está amortiguado, por consiguiente $k_d = 0$. Para el término de forzamiento tomamos la función $3u_5(t)$ sen $(t - 5)$, cuya amplitud es 3, su periodo es 2π y se inicia en el tiempo $t = 5$. La ecuación diferencial es

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 3u_5(t)\operatorname{sen}(t-5).$$

Consideramos las condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$.

Análisis cualitativo

Para $t < 5$, esta ecuación representa un oscilador armónico no forzado sin amortiguamiento con periodo natural π, por lo que la solución con condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$ oscila con amplitud constante. En el tiempo $t = 5$, se presenta el término de forzamiento. El periodo del forzamiento es 2π, y de aquí inferimos que no se trata de un sistema resonante y todas las soluciones quedan acotadas. De hecho, todas éstas son combinaciones de funciones trigonométricas con los periodos natural y de forzamiento.

Solución usando transformadas de Laplace

Para aplicar este método al problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 3u_5(t)\,\text{sen}(t-5), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

calculamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación diferencial y obtenemos

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] + 4\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[3u_5(t)\,\text{sen}(t-5)].$$

Entonces,

$$s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) + 4\mathcal{L}[y] = \frac{3e^{-5s}}{s^2+1}.$$

Al sustituir las condiciones iniciales y simplificar, nos da

$$(s^2+4)\mathcal{L}[y] - s = \frac{3e^{-5s}}{s^2+1}.$$

Por consiguiente,

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3e^{-5s}}{(s^2+4)(s^2+1)}\right].$$

Utilizando las fracciones parciales, podemos escribir el segundo término del lado derecho como

$$\frac{3e^{-5s}}{(s^2+4)(s^2+1)} = -\frac{e^{-5s}}{s^2+4} + \frac{e^{-5s}}{s^2+1},$$

que da

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-5s}}{s^2+4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-5s}}{s^2+1}\right].$$

Si empleamos

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] = \cos 2t, \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \text{sen}\, t,$$

y

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right] = \text{sen}\, 2t,$$

obtenemos

$$y(t) = (\cos 2t + u_5(t)(\text{sen}(t-5) - \tfrac{1}{2}\text{sen}(2(t-5))).$$

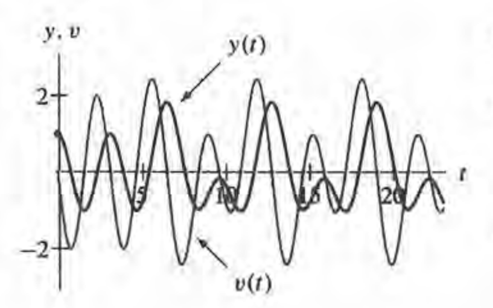


Figura 6.15
Las gráficas $y(t)$ y $v(t)$ para la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 3u_5(t)\,\text{sen}(t-5),$$

donde $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$.

Las gráficas $y(t)$ y $v(t)$ para esta solución se muestran en la figura 6.15. Observe que la solución se comporta como se predijo. Es $y(t) = \cos 2t$ hasta el tiempo $t = 5$, cuando el forzamiento se enciende. No existe discontinuidad en la segunda derivada porque el valor de $3u_5(t)$ sen $(t-5)$ es cero en $t = 5$. La tercera derivada d^3y/dt^3 es discontinua en $t = 5$, pero esto es muy difícil de apreciar en las gráficas.

Forzamiento resonante

Finalmente, consideremos el caso de un oscilador armónico sin amortiguamiento con forzamiento resonante. En el capítulo 4 vimos que el comportamiento de los osciladores resonantes es muy diferente al de los casos sin resonancia. Las soluciones oscilan con una amplitud que crece de manera lineal con el tiempo y por consiguiente no quedan acotadas (vea la figura 6.16). En el capítulo 4 vimos que los métodos para obtener las fórmulas para las soluciones de un oscilador resonante implicaron "segundas conjeturas" y resultaron muy tediosos. Con el método de la transformada de Laplace, la obtención de la solución de una ecuación resonante es casi tan fácil como en el caso sin resonancia, una vez que agregamos una transformada de Laplace adicional a nuestra lista de transformadas conocidas.

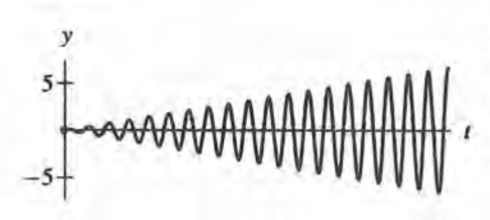


Figura 6.16
Solución del oscilador no amortiguado con forzamiento resonante

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 9y = \cos 3t$$

con $y(0) = y'(0) = 0$.

Como ejemplo, consideremos

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 9y = \cos 3t, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

El periodo natural y el de forzamiento de este oscilador no amortiguado son $2\pi/3$, por lo que se trata de un oscilador resonante.

Comenzamos, como siempre, tomando la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación diferencial

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] + 9\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\cos 3t].$$

Simplificando y sustituyendo las condiciones iniciales se obtiene

$$s^2\mathcal{L}[y] + 9\mathcal{L}[y] = \frac{s}{s^2+9},$$

que se reduce a

$$\mathcal{L}[y] = \frac{s}{(s^2+9)^2}.$$

De aquí que

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+9)^2}\right].$$

Ésta es la primera vez que hemos encontrado una transformada de Laplace de la forma

$$\frac{s}{(s^2+w^2)^2},$$

y el método de las fracciones parciales no ayuda porque esta fracción es parcial. En este caso recurrimos a nuestra tabla de transformadas (p. 557), y obtenemos

$$\mathcal{L}[t\ \text{sen}\omega t] = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}.$$

En nuestro caso escribimos

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+9)^2}\right] = \frac{1}{6}\mathcal{L}\left[\frac{6s}{(s^2+9)^2}\right],$$

por tanto

$$y(t) = \frac{1}{6}t\ \text{sen}\, 3t$$

(vea la figura 6.16). La única diferencia entre este cálculo y el de los ejemplos no resonantes anteriores es que usamos una entrada diferente en la tabla al buscar la transformada inversa de Laplace. Debemos recordar que, aun cuando el cálculo es similar, el comportamiento a largo plazo de la solución de una ecuación resonante es considerablemente diferente al de una no resonante.

Análisis del método de la transformada de Laplace

Si sólo fuera un procedimiento para encontrar soluciones en forma cerrada de ecuaciones lineales con coeficientes constantes, a la transformada de Laplace ya le habría pasado lo que a los dinosaurios y a la regla de cálculo. Las transformadas de Laplace sustituyen las operaciones de cálculo por operaciones algebraicas, pero los sistemas de álgebra computacional reemplazan las operaciones del cálculo por mecanografía.

La efectividad de las transformadas de Laplace se manifiesta en su enfoque único de las ecuaciones diferenciales. Ya hemos visto que nos ayudan a resolver aquellas ecuaciones que contienen discontinuidades. En la sección próxima las transformadas de Laplace se usan de manera más fundamental para modelar un término de forzamiento, que corresponde a un empuje repentino como el golpe de un martillo o la sacudida de una explosión. Las transformadas de Laplace son esenciales para la construcción de modelos matemáticos de un término de forzamiento.

En la sección 6.5 usaremos la capacidad de las transformadas de Laplace para convertir el cálculo en álgebra, y de este modo obtendremos un método que compara las soluciones que surgen de un oscilador armónico con diferentes funciones de forzamiento. En la sección 6.6 utilizaremos las transformadas de Laplace para generalizar la noción de eigenvalor de una ecuación lineal con coeficientes constantes que es aplicable a ecuaciones forzadas (no autónomas). Por esos usos teóricos de la transformada de Laplace es por lo que vale la pena aprenderla.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 6.3

En los ejercicios 1-4, calcule la transformada de Laplace de la función dada determinando la integral. (Esos ejercicios son principalmente un repaso de la integración por partes.)

1. $\operatorname{sen}\omega t$

2. $\cos\omega t$

3. $e^{at}\operatorname{sen}\omega t$

4. $e^{at}\cos\omega t$

5. Tome como premisa el hecho de que $y(t) = \cos\omega t$ es la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

para verificar la fórmula para $\mathcal{L}[\cos\omega t]$.

En los ejercicios 6-10, calcule la transformada de Laplace de la función dada. [*Sugerencia:* Una forma de resolverlos es usando integración por partes. De manera alternativa, en el ejercicio 6 derive ambos lados de la fórmula para $\mathcal{L}[\cos\omega t]$ con respecto a ω. Los otros pueden tratarse igual.]

6. $f(t) = t\operatorname{sen}\omega t$

7. $f(t) = t\cos\omega t$

8. $f(t) = te^{at}$

9. $f(t) = t^2e^{at}$

10. $f(t) = t^ne^{at}$

En los ejercicios 11-14, escriba la cuadrática dada en la forma $(s + \alpha)^2 + \beta^2$ (es decir, completando el cuadrado).

11. $s^2 + 2s + 10$

12. $s^2 - 4s + 5$

13. $s^2 + s + 1$

14. $s^2 + 6s + 10$

En los ejercicios 15-18, determine la transformada inversa de Laplace de las funciones dadas (compárelos con los ejercicios 11-14).

15. $\dfrac{1}{s^2 + 2s + 10}$

16. $\dfrac{s}{s^2 - 4s + 5}$

17. $\dfrac{2s + 3}{s^2 + s + 1}$

18. $\dfrac{s + 1}{s^2 + 6s + 10}$

19. De la definición, calcule la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left[e^{(a+ib)t}\right],$$

donde a y b son constantes reales.

20. Suponga que $y(t)$ es compleja y escriba $y(t) = y_{re} + iy_{im}(t)$, donde $y_{re}(t)$ y $y_{im}(t)$ son las partes real e imaginaria de $y(t)$, respectivamente. Demuestre que $\mathcal{L}[y_{re}]$ es la parte real de $\mathcal{L}[y]$ y $\mathcal{L}[y_{im}]$ es la parte imaginaria de $\mathcal{L}[y]$.

21. Use los ejercicios 19 y 20 para calcular $\mathcal{L}[e^{at}\cos\omega t]$ y $\mathcal{L}[e^{at}\operatorname{sen}\omega t]$.

22. Calcule

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2s+5}\right]$$

como sigue:

(a) Demuestre que $s^2 + 2s + 5 = (s + 1 + 2i)(s + 1 - 2i)$.

(b) Use fracciones parciales para escribir

$$\frac{1}{s^2+2s+5} = \frac{A}{s+1+2i} + \frac{B}{s+1-2i},$$

donde A y B son constantes (complejas).

(c) Utilice el ejercicio 19 para tomar la transformada inversa de Laplace de cada término calculado en el inciso (b).

(d) Simplifique la suma de las transformadas inversas de Laplace obtenidas en el inciso (c) para obtener la transformada inversa deseada.

En los ejercicios 23-26, use fracciones parciales y exponenciales complejos para calcular la transformada inversa de Laplace de las funciones dadas.

23. $\dfrac{1}{s^2+2s+10}$

24. $\dfrac{s}{s^2-4s+5}$

25. $\dfrac{2s+3}{s^2+s+1}$

26. $\dfrac{s+1}{s^2+6s+10}$

En los ejercicios 27-32,

(a) determine la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación diferencial,

(b) sustituya en las condiciones iniciales y simplifique para obtener la transformada de Laplace de la solución, y

(c) encuentre las soluciones tomando la transformada inversa de Laplace.

27. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = \cos 2t, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 0$

28. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + 5y = \operatorname{sen} 3t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$

29. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3y = u_4(t)\cos(5(t-4)), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -2$

30. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 9y = u_5(t)\operatorname{sen}(3(t-5)), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$

31. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3y = w(t), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0,$, donde

$$w(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \leq t < 1; \\ 1, & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

32. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + 3y = w(t), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2,$

donde $w(t)$ es la función definida en el ejercicio 31.

33. **(a)** Encuentre la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 9y = 0.1\cos 3t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$$

[*Sugerencia:* No es necesario usar transformadas de Laplace, pero si lo hace, le será de ayuda para el próximo ejercicio.]

(b) En un párrafo breve, describa el comportamiento de la solución en el inciso (a).

34. **(a)** Determine la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 9y = 0.1\left((1 - u_5(t))\cos 3t + u_{12}(t)\cos 3t\right), \ y(0) = 2, \ y'(0) = 0.$$

(b) En unas cuantas líneas, explique el comportamiento de la solución en el inciso (a).

35. Si $w(t)$ es la onda cuadrada del ejercicio 17 en la sección 6.2:

(a) Calcule la transformada de Laplace de la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 20\frac{dy}{dt} + 200y = w(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

(b) Interprete el comportamiento de la solución. [*Sugerencia:* Conocer la transformada de Laplace de la solución quizá no sea de ayuda en esta parte.]

36. Si $z(t)$ es la onda de diente de sierra del ejercicio 18 en la sección 6.2:

(a) Encuentre la transformada de Laplace de la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 20\frac{dy}{dt} + 200y = z(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

(b) Describa el comportamiento de la solución. [*Sugerencia:* Puede no ser de ayuda conocer la transformada de Laplace de la solución en esta parte.]

6.4 FUNCIONES DELTA Y FORZAMIENTO DE IMPULSO

Hemos visto que las transformadas de Laplace nos permiten trabajar con ecuaciones que tienen términos de forzamiento discontinuos. En esta sección consideramos otro tipo de funciones de forzamiento discontinuo conocidas como función impulso.

Forzamiento de impulso

Forzamiento de impulso es el término usado para describir un empuje o tirón muy rápido sobre un sistema, como un golpe de martillo o el efecto de una explosión. Por ejemplo, imagine que tenemos un oscilador no forzado que satisface la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 26y = 0.$$

Esta ecuación modela una masa unitaria unida a un resorte cuya constante de resorte es 26 y se desliza sobre una mesa con un coeficiente de amortiguamiento de 2 (vea el capítulo 4).

Ahora, suponga que golpeamos la masa con un martillo una sola vez en el tiempo $t = 4$ (vea la figura 6.17). Podemos escribir la ecuación forzada como

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 26y = g(t),$$

donde

$$g(t) = \begin{cases} \text{muy grande,} & \text{cuando } t = 4; \\ 0, & \text{cuando } t \neq 4. \end{cases}$$

Para hacer esto suficientemente preciso y poder obtener una solución, necesitamos algún tipo de fórmula para $g(t)$. Como primer intento para derivar una fórmula como ésta, podríamos suponer que el martillo golpea con una fuerza constante grande durante un tiempo corto. De manera específica, digamos que el martillo está en contacto con la masa un intervalo de $4 - \Delta t$ a $4 + \Delta t$ durante un tiempo pequeño $\Delta t > 0$, y que la fuerza so-

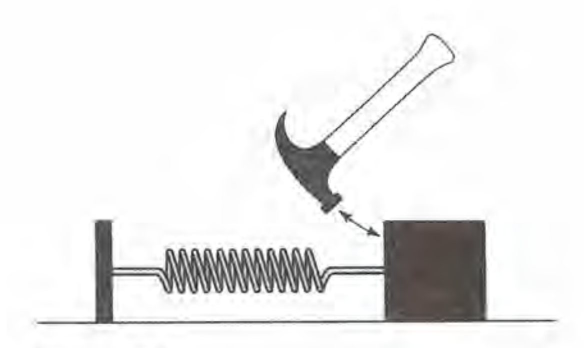


Figura 6.17
Oscilador armónico golpeado por un martillo.

bre la masa en este intervalo es la constante k. Entonces, la función de forzamiento toma la forma

$$g_{\Delta t}(t) = \begin{cases} k, & \text{si } 4 - \Delta t \le t \le 4 + \Delta t; \\ 0, & \text{otros valores.} \end{cases}$$

Consideramos a Δt y k como parámetros. Ambos están íntimamente relacionados. La fuerza externa sólo es diferente de cero para un intervalo de $2\Delta t$. Por consiguiente, entre más pequeño tomemos Δt, mayor debe ser k para comunicar el mismo empuje total.

Escogemos $k = 1/(2\Delta t)$ de manera que k resulta grande cuando $\Delta t \to 0$. Por lo que,

$$g_{\Delta t}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\Delta t}, & \text{si } 4 - \Delta t \le t \le 4 + \Delta t; \\ 0, & \text{otros valores.} \end{cases}$$

Con esta selección de k, el área bajo la gráfica de $g_{\Delta t}(t)$ es la misma que encontraríamos en un rectángulo con base $2\Delta t$ y altura $1/(2\Delta t)$. Es decir, el área es 1 sin importar qué escojamos para Δt (vea la figura 6.18).

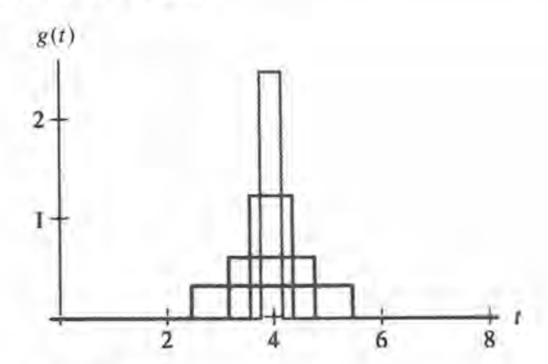


Figura 6.18
Gráfica de la función $g_{\Delta t}$ para diferentes valores de Δt.

Como estamos modelando un golpe de martillo que se difunde muy rápidamente, nos gustaría hacer el intervalo Δt tan pequeño como fuera posible. Consideremos entonces qué sucede cuando $\Delta t \to 0$. De manera informal, cuando $\Delta t \to 0$, estamos comprimiendo la misma cantidad de fuerza en un intervalo cada vez más corto.

Una fuerza "instantánea" sería representada por el límite cuando $\Delta t \to 0$. Pero

$$\lim_{\Delta t \to 0} g_{\Delta t}(t)$$

es un concepto confuso. Para cualquier $t \neq 4$, el límite de $g_{\Delta t}(t)$ cuando $\Delta t \to 0$ es nulo porque para una Δt pequeña, el tiempo t está fuera del intervalo en que $g_{\Delta t}(t)$ es positiva. Por otra parte,

$$\lim_{\Delta t \to 0} g_{\Delta t}(4)$$

no existe porque $g_{\Delta t}(4) \to \infty$ cuando $\Delta t \to 0$. La "función"

$$\delta_4(t) = \lim_{\Delta t \to 0} g_{\Delta t}(t)$$

es llamada la **función delta de Dirac**. Esta "función" es 0 para todos los valores de t excepto para $t = 4$, donde es infinita.

Para un matemático esta "definición" es peor que inútil. De acuerdo con ella, no hay manera de especificar la diferencia entre $\delta_4(t)$ y $2\delta_4(t)$, porque ambas "funciones" son cero para $t \neq 4$, e infinitas para $t = 4$. Por otra parte, parece que la integral definida de $\delta_4(t)$ tiene sentido. Ciertamente, el área total bajo la gráfica de $g_{\Delta t}$ siempre es 1, sin importar qué tan pequeño sea el intervalo Δt. Aparentemente, podemos usar las transformadas de Laplace para rescatar la función delta de Dirac, cambiándola de su obsolescencia a un objeto matemático de gran utilidad.

La transformada de Laplace de una función delta de Dirac

Para aclarar un poco este enredo, volvemos a la transformada de Laplace. Para cualquier $\Delta t > 0$ podemos calcular

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[g_{\Delta t}] &= \int_0^\infty g_{\Delta t}(t)e^{-st}\,dt \\
&= \int_{4-\Delta t}^{4+\Delta t} \frac{1}{2\Delta t} e^{-st}\,dt \\
&= \left(\frac{1}{2\Delta t}\right)\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right)\Bigg|_{t=4-\Delta t}^{t=4+\Delta t} \\
&= \left(\frac{1}{2\Delta t}\right)\left(-\frac{e^{-s(4+\Delta t)} - e^{-s(4-\Delta t)}}{s}\right) \\
&= \left(\frac{e^{-4s}}{s}\right)\left(\frac{e^{s\Delta t} - e^{-s\Delta t}}{2\Delta t}\right).
\end{aligned}$$

Tomando el límite de esta cantidad cuando $\Delta t \to 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \to 0} \mathcal{L}[g_{\Delta t}] &= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{e^{-4s}}{s}\right)\left(\frac{e^{s\Delta t} - e^{-s\Delta t}}{2\Delta t}\right) \\
&= \left(\frac{e^{-4s}}{s}\right) \lim_{\Delta t \to 0} e^{-s\Delta t} \left(\frac{e^{2s\Delta t} - 1}{2\Delta t}\right) \\
&= e^{-4s}
\end{aligned}$$

(vea el ejercicio 1).

El límite de la transformada de Laplace de $g_{\Delta t}$ cuando $\Delta t \to 0$ es una función perfectamente normal. En tanto que calculamos la transformada de Laplace *antes* de hacerlo con el límite, todo queda en orden. Por consiguiente, definimos la transformada de Laplace de $\delta_4(t)$ como

$$\mathcal{L}[\delta_4] = e^{-4s}.$$

También podríamos incluir fácilmente la fuerza de impulso en el tiempo $t = a$, y obtendríamos una función delta de Dirac $\delta_a(t)$ que "es cero para $t \neq a$ e ∞ para $t = a$". Tenemos la siguiente definición:

DEFINICIÓN La transformada de Laplace de $\delta_a(t)$ es $\mathcal{L}[\delta_a] = e^{-as}$. ■

Usamos $\delta_a(t)$ para modelar la fuerza comunicada por el golpe de un martillo en el tiempo $t = a$. Como observamos antes, es imposible distinguir la función $2\delta_a(t)$ como función de $\delta_a(t)$. Sin embargo, tomando las transformadas de Laplace, vemos que por linealidad

$$\mathcal{L}[2\delta_a] = 2\mathcal{L}[\delta_a] = 2e^{-as}.$$

Cuando empleamos esta relación, podemos modelar efectivamente el golpe de un martillo el doble de la fuerza original. De hecho, podemos tratar la transformada de Laplace de $\delta_a(t)$ de la misma manera en que lo hacemos con cualquier otra transformada de Laplace.

Forzamiento de impulso de un oscilador armónico amortiguado

Volvemos ahora a la ecuación del oscilador armónico con masa 1, constante de resorte 26 y coeficiente de amortiguamiento 2, que es golpeado por un martillo en $t = 4$. Para este ejemplo escogemos condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$. Es decir, el resorte está alargado una unidad con respecto a su estado de reposo y luego se suelta con velocidad 0. Con la función delta de Dirac podemos escribir el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 26y = \delta_4(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Análisis cualitativo

Para $0 \leq t < 4$ tenemos un oscilador armónico no forzado subamortiguado, ya que la ecuación característica tiene raíces $-1 \pm 5i$. La gráfica de la solución con condición inicial $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$ oscila con amplitud decreciente (vea la figura 6.19). En $t = 4$, la fuerza de impulso es, aproximadamente, infinita. Como la fuerza es el producto de la masa y la aceleración, d^2y/dt^2 es infinita en $t = 4$. Por consiguiente, la velocidad $v = dy/dt$ tiene una discontinuidad en $t = 4$ y la solución $y(t)$ cambia de pronto de amplitud. Después de $t = 4$ tenemos de nuevo un oscilador subamortiguado.

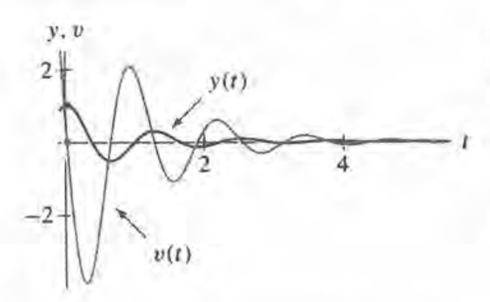


Figura 6.19
Gráficas $y(t)$ y $v(t)$ para la solución del oscilador no forzado

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 26y = 0$$

con condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$.

Desafortunadamente, ésta es sólo una descripción cualitativa burda del comportamiento de la solución que usa frases matemáticas sospechosas como "la aceleración es infinita". Para saber qué ocurre en realidad, empleamos la transformada de Laplace.

Solución mediante transformadas de Laplace

Al determinar la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] + 2\mathscr{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] + 26\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[\delta_4].$$

Usando las fórmulas para la transformada de Laplace de la primera y la segunda derivadas y despejando $\mathscr{L}[y]$, encontramos

$$s^2\mathscr{L}[y] - sy(0) - y'(0) + 2s\mathscr{L}[y] - 2y(0) + 26\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[\delta_4].$$

Al sustituir las condiciones iniciales y evaluar $\mathscr{L}[\delta_4]$, tenemos

$$s^2\mathscr{L}[y] - s + 2s\mathscr{L}[y] - 2 + 26\mathscr{L}[y] = e^{-4s}.$$

Despejando $\mathscr{L}[y]$ resulta

$$\mathscr{L}[y] = \frac{s+2}{s^2+2s+26} + \frac{e^{-4s}}{s^2+2s+26}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2+2s+26}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-4s}}{s^2+2s+26}\right] \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+25}\right] + \frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{5e^{-4s}}{(s+1)^2+25}\right], \end{aligned}$$

y la solución es

$$y(t) = e^{-t}\cos 5t + \tfrac{1}{5}e^{-t}\operatorname{sen} 5t + \tfrac{1}{5}u_4(t)e^{-(t-4)}\operatorname{sen}(5(t-4)).$$

La solución tiene la forma predicha (vea la figura 6.20). Vea que la gráfica $v(t)$ tiene una discontinuidad de salto en $t = 4$, justo cuando se aplica la fuerza de impulso. Entonces la pendiente de la línea tangente a la gráfica de $y(t)$ cambia abruptamente en $t = 4$. Note que hay una "esquina" en la gráfica de $y(t)$ en $t = 4$ (vea la figura 6.21).

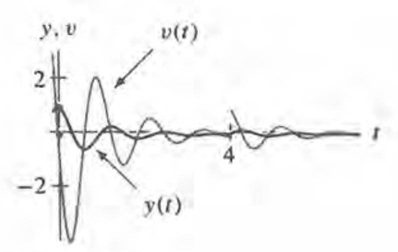


Figura 6.20
Gráficas $y(t)$ y $v(t)$ para $d^2y/dt^2 + 2dy/dt + 26y = \delta_4(t)$ con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$.

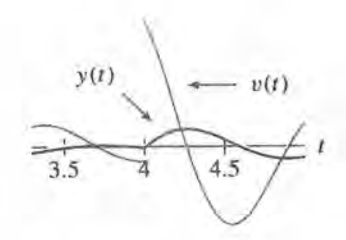


Figura 6.21
Amplificación de la esquina y de la discontinuidad de salto de las gráficas $y(t)$ y $v(t)$ en $t = 4$.

Un oscilador no amortiguado con forzamiento de impulso

En las aplicaciones es común suponer que la fuerza de impulso se aplica en $t = 0$. Por ejemplo, considere el oscilador sin amortiguamiento

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = \delta_0(t).$$

Éste es un modelo de una masa unitaria unida a un resorte, cuya constante es 4 y resbala sobre una mesa sin fricción. Suponemos que para toda $t < 0$, la masa está en el punto de equilibrio y en reposo en $y = 0$. Cuando $t = 0$, a la masa se le da un fuerte empujón en la dirección y positiva. Entonces, en $t = 0$ tenemos $y(0) = 0$, pero $y'(0)$ está indefinida debido a que la aceleración en este tiempo es infinita. Para indicar que antes de $t = 0$ la masa estaba en reposo, escribimos la condición inicial $y'(0) = 0^-$. Y consideramos el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = \delta_0(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0^-.$$

Análisis cualitativo

Como no hay fuerza externa para $t > 0$, una vez que la masa se pone en movimiento en el tiempo $t = 0$, ésta oscila para siempre con periodo y amplitud constantes. El periodo de oscilación es el natural (que es igual a π). Para determinar la amplitud de las oscilaciones, calculamos la solución.

Solución usando transformadas de Laplace

Tomando la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación diferencial resulta

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] + 4\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[\delta_0].$$

Al simplificar y tomar en cuenta que $\mathscr{L}[\delta_0] = e^{-0s}$, encontramos

$$s^2\mathscr{L}[y] - sy(0) - y'(0) + 4\mathscr{L}[y] = 1.$$

Sustituyendo las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$ (justo antes del empuje de la fuerza de impulso) y resolviendo para $\mathscr{L}[y]$ resulta

$$\mathscr{L}[y] = \frac{1}{s^2+4},$$

de modo que

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right].$$

Por tanto, la solución es

$$y(t) = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t.$$

Es decir, la solución oscila con amplitud 1/2 para $t > 0$ (vea la figura 6.22).

No pierda de vista que la fórmula que acabamos de obtener es la solución para $t > 0$. La solución para toda t es

$$y(t) = \begin{cases} \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t, & \text{si } t > 0; \\ 0, & \text{si } t \le 0. \end{cases}$$

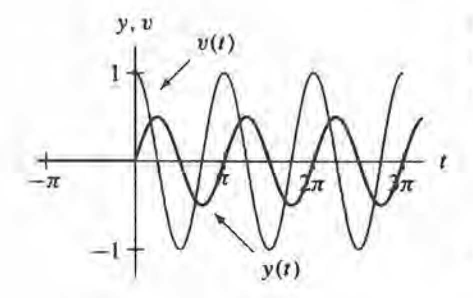


Figura 6.22
Las gráficas $y(t)$ y $v(t)$ de la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = \delta_0(t),$$

con $y(0) = y'(0) = 0^-$.

Note que la derivada de esta solución no existe en $t = 0$ (vea la figura 6.22). Para $t < 0$ la velocidad es igual a 0, pero para t ligeramente positiva es cercana a 1. Así entonces, $v(t)$ tiene una discontinuidad de salto en $t = 0$. Esta observación concuerda con nuestro análisis cualitativo previo ya que la aceleración es infinita en $t = 0$.

Forzamiento de impulso periódico

El enfoque cualitativo puede ser útil aunque se tengan complicados términos de forzamiento con discontinuidades. Por ejemplo, considere un oscilador no amortiguado que golpeamos con un martillo cada a unidades de tiempo, es decir, en los tiempos $t = a$, $t = 2a$, $t = 3a$, etc. Esto conduce a un problema de valor inicial de la forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{na}(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

El efecto a largo plazo de estos golpes dependerá de cuál sea el comportamiento de la masa cuando llegue el golpe. Si la masa se está alejando del martillo, entonces el martillo la acelerará; pero si la masa se acerca hacia el martillo, el golpe la demorará o incluso podría cambiarle su dirección.

Esta situación es similar a la del forzamiento senoidal; si el periodo del forzamiento es el mismo que el periodo natural del oscilador, entonces el impacto del martillo siempre tocará a la masa en el mismo estado. Por consiguiente, se presentará un fenómeno de resonancia y las amplitudes de las oscilaciones crecerán sin límite. Si los periodos de forzamiento y natural son diferentes, en ese caso los golpes del martillo demorarán algunas veces la masa y otras la acelerarán.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 6.4

1. Calcule el límite

$$\lim_{\Delta t \to 0} e^{-s\Delta t}\left(\frac{e^{2s\Delta t} - 1}{2\Delta t}\right).$$

En los ejercicios 2-5, resuelva el problema de valor inicial dado.

2. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3y = 5\delta_2(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

3. $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = \delta_3(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

4. $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = -2\delta_2(t), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$

5. $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 3y = \delta_1(t) - 3\delta_4(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

6. **(a)** Analice el comportamiento cualitativo de la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 3y = \delta_4(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

(b) Calcule la solución de este problema de valor inicial.

(c) Grafique esta solución. Escriba un párrafo comparando su descripción del comportamiento cualitativo con la gráfica.

7. Existe una relación entre la función de Heaviside $u_a(t)$ y la función delta de Dirac $\delta_a(t)$ que puede observarse en sus transformadas de Laplace.

(a) Demuestre que, para $a > 0$, $\mathscr{L}[\delta_a] = s\mathscr{L}[u_a] - u_a(0)$.

(b) ¿Qué relación sugiere esto entre $u_a(t)$ y $\delta_a(t)$?

(c) ¿Hay alguna manera en que podríamos entender esta relación en términos del cálculo (sin transformadas de Laplace)?

8. Calcule la transformada de Laplace de

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{na}(t),$$

donde $a > 0$. [*Sugerencia:* Vea el ejercicio 16 en la sección 6.2.]

9. **(a)** Encuentre la transformada de Laplace de la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

(b) Calcule la solución del problema de valor inicial del inciso (a) (es decir, tome la transformada inversa de Laplace de su respuesta del inciso (a)).

(c) ¿Cuál es el comportamiento cualitativo a largo plazo de esta solución?

10. **(a)** Encuentre la transformada de Laplace de la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{2n\pi}(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

(b) Determine la solución del problema de valor inicial del inciso (a) (hágalo a partir de la transformada inversa de Laplace de la respuesta que obtuvo).

(c) ¿Cuál es el comportamiento cualitativo a largo plazo de esta solución?

6.5 CONVOLUCIONES

Al usar transformadas de Laplace para encontrar la solución de un problema de valor inicial, el paso más difícil es por lo general el último, esto es, calcular la transformada inversa de Laplace. La dificultad surge cuando tenemos que descomponer un complicado producto en la suma de dos o más términos más simples, usando fracciones parciales. Si bien el álgebra implicada es elemental, puede llegar a resultar muy complicada. La probabilidad de cometer un error es alta. Por ello sería conveniente tener una regla de productos para las transformadas inversas de Laplace, es decir, poder calcularlas a partir de las transformadas inversas de cada uno de sus factores.

En esta sección obtendremos esa regla de productos. Desafortunadamente, emplearla casi siempre resulta más complicado que efectuar la descomposición con fracciones parciales. Sin embargo, tiene otras sorprendentes aplicaciones. En particular, nos permite resolver la ecuación del oscilador armónico forzado usando las soluciones del mismo oscilador con una función de forzamiento diferente.

La regla del producto para transformadas inversas de Laplace

Suponga que deseamos calcular la transformada inversa de Laplace de un producto, es decir

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)]$$

donde conocemos $\mathcal{L}^{-1}[F] = f(t)$ y $\mathcal{L}^{-1}[G] = g(t)$. De la definición de la transformada de Laplace tenemos

$$F(s) = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau \quad \text{y} \quad G(s) = \int_0^\infty g(u)e^{-su}\,du.$$

(Tome en cuenta que estamos usando τ y u como las variables de integración. Esto es sólo una notación, pero será importante en el cálculo que sigue.) Por consiguiente

$$F(s)G(s) = \left(\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau\right)\left(\int_0^\infty g(u)e^{-su}\,du\right).$$

La primera integral no contiene ninguna u, por lo que puede llevarse dentro de la segunda integral, lo que da

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau\right) g(u)e^{-su}\,du.$$

Combinando esto en una integral doble y simplificando, resulta

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(\tau)g(u)e^{-s(\tau+u)}\,d\tau\,du.$$

A continuación efectuamos un cambio de variables, reemplazando la variable τ por la nueva variable $t = \tau + u$. Observe que $\tau = t - u$, $dt/du = 1$ y que $0 < \tau < \infty$ implica que $u < t < \infty$, por lo que tenemos

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty \int_u^\infty f(t-u)g(u)e^{-st}\,dt\,du.$$

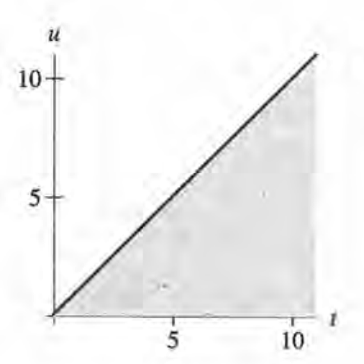


Figura 6.23
Región de integración para la integral doble

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty \int_u^\infty f(t-u)g(t)e^{-st}\,dt\,du.$$

La región de integración se muestra en la figura 6.23. Cambiando el orden en la integral doble nos da

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty \int_0^t f(t-u)g(u)e^{-st}\,du\,dt.$$

Podemos segregar los términos que contienen u y obtenemos

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(t-u)g(u)\,du\right)e^{-st}\,dt.$$

Observando minuciosamente esta expresión, nos llevamos una sorpresa. Si hacemos

$$h(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)\,du,$$

entonces

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty h(t)e^{-st}\,dt,$$

o en otras palabras,

$$F(s)G(s) = \mathcal{L}[h].$$

Es decir, hemos expresado el producto de $F(s)$ y $G(s)$ como una transformada de Laplace. Al calcular las transformadas inversas en ambos lados de esta ecuación, resulta

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = h(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)\,du.$$

Este cálculo motiva la definición de la convolución.

DEFINICIÓN La **convolución** $f * g$ de dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ es la función definida por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)\,du.$$

Con esta notación podemos reescribir los resultados de nuestro cálculo como

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = f * g,$$

que es equivalente a

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F] * \mathcal{L}^{-1}[G].$$

En palabras, la regla expresa: "La transformada inversa de Laplace de un producto es la convolución de las transformadas inversas de Laplace."

A primera vista, parece que $f * g$ no es lo mismo que $g * f$ ya que las integrales se ven diferentes. Sin embargo, sabemos que

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)F(s)],$$

por consiguiente, éste no es el caso (vea el ejercicio 6 para aclarar esta dificultad).

Un ejemplo frustrante

Como primer intento (frustrante) al usar esta regla, consideremos

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s}{(s^2+1)(s^2+4)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{3}{s^2+1}\right)\left(\frac{s}{s^2+4}\right)\right].$$

Ahora

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+1}\right] = 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = 3\,\text{sen}\,t$$

y

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] = \cos 2t.$$

Por tanto, aplicando la regla del producto, tenemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{3}{s^2+1}\right)\left(\frac{s}{s^2+4}\right)\right] = (3\,\text{sen}\,t) * (\cos 2t)$$
$$= \int_0^t 3\,\text{sen}(t-u)\cos 2u\,du.$$

La integral con que terminamos es calculable, pero no es "cómoda" (vea el ejercicio 5).

Por otra parte, al determinar la transformada inversa de Laplace por medio de fracciones parciales, resulta

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s}{(s^2+1)(s^2+4)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right],$$

por lo que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s}{(s^2+1)(s^2+4)}\right] = \cos t - \cos 2t.$$

Este ejemplo es común. Si bien efectuar la descomposición en fracciones parciales es tedioso, es menos laborioso que calcular la convolución. Sin embargo, su valor radica en que obtenemos la sorprendente fórmula

$$\cos t - \cos 2t = 3\int_0^t \text{sen}(t-u)\cos 2t\,du$$

ya que ambos lados tienen la misma transformada de Laplace.

Nos queda la impresión de que la regla del producto anterior no es muy útil para calcular transformadas inversas de Laplace. No obstante, como veremos a continuación, la convolución tiene aplicaciones que son mucho más interesantes e importantes.

Forzamiento delta y convolución

Para ilustrar uno de los usos de las convoluciones, consideremos la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = f(t),$$

donde p y q son constantes.

Antes de tratar el término de forzamiento general $f(t)$, consideremos el caso especial en que $f(t) = \delta_0(t)$, es decir, la función delta de Dirac en $t = 0$. Veamos el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = \delta_0(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0^-,$$

donde el superíndice "$-$" indica como siempre que $y'(t) = 0$ para $t < 0$. Para ser consistentes después con la notación, sea $\zeta(t)$ la solución de este problema de valor inicial. (En la teoría de los circuitos eléctricos, $\zeta(t)$ se denomina la *respuesta impulso*.)

A fin de obtener una expresión para $\zeta(t)$, calculamos la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación diferencial y resulta

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right] + p\mathcal{L}\left[\frac{d\zeta}{dt}\right] + q\mathcal{L}[\zeta] = \mathcal{L}[\delta_0].$$

Usando las reglas para la transformada de Laplace de una derivada y partiendo de que $\mathcal{L}[\delta_0] = 1$, obtenemos

$$s^2\mathcal{L}[\zeta] - s\zeta(0) - \zeta'(0) + ps\mathcal{L}[\zeta] - p\zeta(0) + q\mathcal{L}[\zeta] = 1.$$

Al sustituir las condiciones iniciales y despejar $\mathcal{L}[\zeta]$, tenemos

$$\mathcal{L}[\zeta] = \frac{1}{s^2 + ps + q}.$$

Volvamos ahora al caso general

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = f(t), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Utilizando la transformada de Laplace exactamente como arriba, calculamos que la transformada de la solución $y(t)$ es

$$\mathcal{L}[y] = \frac{\mathcal{L}[f]}{s^2 + ps + q}.$$

Ahora podemos aprovechar la regla del producto para transformadas inversas de Laplace escribiendo

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2 + ps + q}\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[\zeta]\mathcal{L}[f].$$

La solución del problema de valor inicial con $y(0) = y'(0) = 0$ y función de forzamiento $f(t)$ es entonces

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[\zeta]\mathcal{L}[f]] = (\zeta * f)(t).$$

Podemos resolver $y(t)$ conociendo sólo la función de forzamiento $f(t)$ y la solución $\zeta(t)$ de la ecuación diferencial con el mismo lado izquierdo pero con la función de forzamiento $\delta_0(t)$. Si conocemos $\zeta(t)$ y $f(t)$, ni siquiera es preciso saber los valores de los coeficientes p y q, es decir, *¡no tenemos que conocer la ecuación diferencial!*

Un cálculo usando convoluciones

Consideremos el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = \delta_0(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Si $\zeta(t)$ denota la solución, podemos calcular, de la manera usual, que

$$\mathcal{L}[\zeta] = \frac{1}{s^2+4}$$

por lo que $\zeta(t) = 1/2$ sen $2t$.

Ahora podemos aplicar la observación anterior para ver que la solución $y(t)$ de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = f(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

con la nueva función de forzamiento, $f(t)$ tiene como transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\zeta]\mathcal{L}[f] = \frac{1}{s^2+4}\mathcal{L}[f].$$

Entonces,

$$y(t) = \left(\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right) * f = \int_0^u \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2(t-u))\, f(u)\, du.$$

Por ejemplo, si $f(t) = e^{-t}$, entonces la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = e^{-t}, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

es

$$y(t) = \left(\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right) * e^{-t} = \int_0^t \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2(t-u))\, e^{-u}\, du.$$

Resulta tedioso resolver esta integral a mano, pero un sistema de álgebra para computadora nos da

$$y(t) = -\tfrac{4}{5}e^{-t} - \tfrac{1}{5}\cos 2t - \tfrac{1}{10}\operatorname{sen} 2t.$$

De nuevo hemos reemplazado el método usual para calcular soluciones mediante una integral de convolución. Como lo indicamos antes, quizá esto no disminuya la dificultad del cálculo. Sin embargo, este procedimiento difiere fundamentalmente de nuestros métodos anteriores. Podemos resolver

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = f(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

usando sólo la solución de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = \delta_0(t), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Es decir, podemos calcular soluciones nuevas (con funciones nuevas de forzamiento) a partir de soluciones anteriores sin tener que referirnos a la ecuación diferencial.

Cálculo de soluciones a partir de datos experimentales

Imaginemos una "caja negra", tal vez un circuito RLC o un dispositivo mecánico, que pueda ser modelado por una ecuación de la forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0,$$

pero de la cual no conocemos los coeficientes p y q. Supongamos que la caja tiene una entrada donde podemos aplicar cualquier función $f(t)$ de forzamiento que escojamos. La caja también posee una salida donde es posible registrar la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = f(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

(vea la figura 6.24).

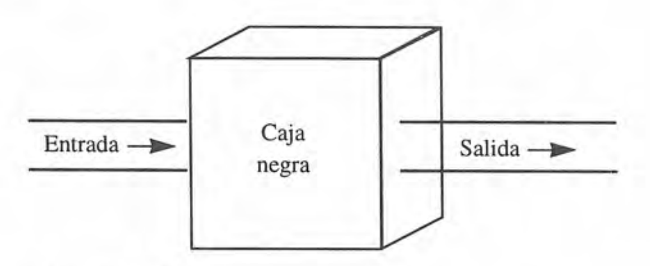


Figura 6.24
Caja negra con entrada y salida.

El análisis previo nos da un método para predecir la salida $y(t)$ para una entrada dada $f(t)$. Primero hacemos el experimento. Introducimos la función delta $\delta_0(t)$ y registramos cuidadosamente la salida $\zeta(t)$ que satisface

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + p\frac{d\zeta}{dt} + q\zeta = \delta_0(t), \quad \zeta(0) = 0, \quad \zeta'(0) = 0^-.$$

Luego calculamos numéricamente la transformada de Laplace $\mathscr{L}[\zeta]$.

Para la función de forzamiento de entrada $f(t)$, sea $y(t)$ la salida. Es decir, $y(t)$ satisface el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = f(t), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Obtenemos entonces $\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[\zeta]\mathscr{L}[f]$, y por tanto

$$y(t) = (\zeta * f)(t) = \int_0^t \zeta(t-u)f(u)\,du.$$

Como conocemos ζ y f, por lo menos numéricamente, es posible calcular las aproximaciones para $\mathscr{L}[y]$ y y. Es decir, podemos predecir la salida para una entrada a partir de datos de una entrada completamente diferente. Esto corresponde a resolver un problema de valor inicial a partir de otra solución obtenida de manera experimental. Podemos encontrar una solución de un problema de valor inicial sin conocer siquiera la ecuación diferencial.

Recordatorio tranquilizante

Desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales, el análisis anterior puede ser un poco perturbador. Hemos encontrado una manera de calcular soluciones a partir de datos experimentales, evitando por completo la ecuación diferencial (esto significa que no necesitamos siquiera saber cuál es la ecuación). Sin embargo, debe recordarse que este procedimiento requiere un sistema (caja negra) que pueda ser modelado por un tipo especial de ecuación diferencial, es decir, ésta debe ser lineal con coeficientes constantes. Además, todo el análisis anterior requiere que las condiciones iniciales sean cero (la posición de reposo con entrada cero). Esto corresponde a un dispositivo que retorna rápidamente a su posición de reposo cuando se retira el forzamiento. Finalmente, fue sólo por un buen entendimiento de la ecuación diferencial y de la transformada de Laplace que pudimos derivar este método.

Si bien estos procedimientos nos permiten calcular fórmulas o aproximaciones numéricas de las soluciones, nos dan poca información sobre su comportamiento cualitativo. No obstante, las transformadas de Laplace pueden usarse en el estudio cualitativo de las ecuaciones lineales con coeficientes constantes. Volveremos a este tema en la siguiente sección.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 6.5

En los ejercicios 1-4, calcule la convolución $f * g$ para las funciones f y g dadas.

1. $f(t) = 1$ y $g(t) = e^{-t}$

2. $f(t) = e^{-at}$ y $g(t) = e^{-bt}$

3. $f(t) = \cos t$ y $g(t) = u_2(t)$

4. $f(t) = u_2(t)$ y $g(t) = u_3(t)$

5. Calcule (3 sen t) $*$ cos $2t$ por medio de la integral. [*Sugerencia:* Use primero identidades trigonométricas.]

6. Demuestre que la convolución es una operación conmutativa. En otras palabras, demuestre que $f * g = g * f$ para dos funciones f y g cualesquiera.

7. Suponga que la solución $\zeta(t)$ del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = \delta_0(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

tiene una transformada de Laplace $\mathcal{L}[\zeta]$ cuyo valor en $s = 0$ es 1/5 y en $s = 2$ es 1/17. Encuentre p y q.

8. Demuestre que la solución $\eta(t)$ del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} + ay = f(t), \quad y(0) = 0$$

tiene una transformada de Laplace $\mathcal{L}[\eta] = \mathcal{L}[\zeta]\ \mathcal{L}[f]$, donde $\zeta[t]$ es la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} + ay = \delta_0(t), \quad y(0) = 0^-.$$

9. Si $\zeta(t)$ es la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = \delta_0(t), \quad y(0) = y'(0) = 0^-.$$

Sean a y b constantes y $f(t)$ una función arbitraria.

(a) Encuentre una expresión para la transformada de Laplace de la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = 0$$

en términos de a, p, q y $\mathscr{L}[\zeta]$.

(b) Determine una expresión para la transformada de Laplace de la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = b$$

en términos de b, p, q y $\mathscr{L}[\zeta]$.

(c) Encuentre una expresión para la transformada de Laplace de la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = f(t), \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b$$

en términos de a, b, p, q, $\mathscr{L}[f]$ y $\mathscr{L}[\zeta]$.

10. Suponga que conocemos $\eta(t)$, que es la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = u_0(t), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Busque una fórmula para la solución $y(t)$ del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = f(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

en términos de η y f.

11. Si $y_1(t)$ es la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = f_1(t), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

(a) Calcule una expresión para $\mathscr{L}[y_1]$.

(b) Suponga que $y_2(t)$ es la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = f_2(t), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

para una función diferente de forzamiento $f_2(t)$. Demuestre que

$$\frac{\mathscr{L}[f_2]}{\mathscr{L}[y_2]} = \frac{\mathscr{L}[f_1]}{\mathscr{L}[y_1]}.$$

(c) Compruebe que

$$\mathcal{L}[y_2] = \mathcal{L}[f_2]\frac{\mathcal{L}[y_1]}{\mathcal{L}[f_1]}.$$

(Esto implica que podríamos usar la solución con cualquier función de forzamiento y condiciones iniciales cero para resolver otras funciones de forzamiento.)

6.6 TEORÍA CUALITATIVA DE LAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Como hemos indicado en muchas ocasiones, determinar la solución de una ecuación diferencial significa mucho más que encontrar una fórmula. El entendimiento del comportamiento cualitativo de la solución con frecuencia es más importante que la fórmula. Hasta ahora hemos usado la transformada de Laplace principalmente para encontrar las fórmulas de las soluciones. En esta sección la emplearemos para estudiar el comportamiento cualitativo de las soluciones.

Hemos usado las transformadas de Laplace en ecuaciones lineales con coeficientes constantes. En el capítulo 3 vimos que podíamos resolver ecuaciones lineales autónomas usando eigenvalores y eigenvectores. Lo más importante es que usando los eigenvalores, podíamos dar una descripción cualitativa de las soluciones sin tanto trabajo aritmético como era necesario al encontrar una fórmula para la solución general.

El concepto de eigenvalores, como lo hemos expuesto, no se extiende naturalmente a las ecuaciones no homogéneas como las del oscilador armónico forzado. Por otra parte, la transformada de Laplace funciona muy bien con ecuaciones homogéneas y no homogéneas. Existe una extensa teoría que emplea la transformada de Laplace para ampliar la idea de los eigenvalores a las ecuaciones no homogéneas, con el fin de estudiar la naturaleza cualitativa de las soluciones. Estudiaremos una pequeña parte de esta teoría cualitativa en esta sección.

Ecuaciones homogéneas de segundo orden

Comenzaremos nuestra investigación del uso de las transformadas de Laplace en la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales estudiando la ecuación homogénea de segundo orden que nos es tan familiar

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0.$$

Disponemos de varios métodos para resolverla, los cuales son más fáciles de usar que las transformadas de Laplace, pero nuestro objetivo ahora es aprender más sobre estas transformadas.

Tomando la transformada de Laplace en ambos lados de esta ecuación, obtenemos

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] + p\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] + q\mathcal{L}[y] = 0.$$

Al aplicar las reglas relativas a las transformadas de Laplace de las derivadas, esta ecuación toma la forma

$$\left(s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0)\right) + p\left(s\mathcal{L}[y] - y(0)\right) + q\mathcal{L}[y] = 0,$$

que puede simplificarse a

$$(s^2 + ps + q)\mathcal{L}[y] - (s + p)y(0) - y'(0) = 0.$$

La transformada de Laplace de la solución con condiciones iniciales $y(0)$ y $y'(0)$ es entonces

$$\mathcal{L}[y] = \frac{(s+p)y(0)}{s^2+ps+q} + \frac{y'(0)}{s^2+ps+q}.$$

Lo importante por observar aquí es que el denominador de la transformada de Laplace de la solución es el polinomio cuadrático

$$s^2 + ps + q.$$

Hemos visto esta cuadrática en otras dos ocasiones. Se trata del polinomio característico obtenido de la ecuación diferencial al conjeturar una solución de la forma $y(t) = e^{st}$. También es el polinomio característico del sistema lineal

$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -qy - pv$$

que corresponde a esta ecuación de segundo orden. No se trata de una coincidencia.

Si las raíces del polinomio característico (que son los eigenvalores del sistema) son λ y μ, entonces podemos escribir

$$s^2 + ps + q = (s-\lambda)(s-\mu).$$

Primero trataremos el caso en que λ y μ son reales. La solución y está dada por

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+p)y(0)}{(s-\lambda)(s-\mu)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{y'(0)}{(s-\lambda)(s-\mu)}\right].$$

Utilizando fracciones parciales podemos descomponer esta expresión en una suma de fracciones con denominadores $(s-\lambda)$ y $(s-\mu)$. Cada término de la solución tendrá un factor que contendrá $e^{\lambda t}$ o $e^{\mu t}$. Cualitativamente sabemos que si λ y μ son positivas, entonces el origen es una fuente; si ambas son negativas, el origen es un sumidero; y si una es positiva y la otra negativa, se trata de un punto silla.

Si $\lambda = \alpha + i\beta$ y $\mu = \alpha - i\beta$, entonces

$$\begin{aligned}(s-\lambda)(s-\mu) &= (s-(\alpha+i\beta))(s-(\alpha-i\beta)) \\ &= ((s-\alpha)-i\beta)((s-\alpha)+i\beta) \\ &= (s-\alpha)^2+\beta^2.\end{aligned}$$

En este caso podemos escribir y como la transformada inversa de Laplace de funciones que contengan la expresión cuadrática $(s-\alpha)^2+\beta^2$ en el denominador y una constante o un múltiplo constante de s en el numerador. Las transformadas inversas de Laplace de esos términos son múltiplos de $e^{\alpha t}$ sen βt o de $e^{\alpha t}$ cos βt. De nuevo, esto es exactamente lo que esperábamos. En este caso las soluciones oscilan y el comportamiento a largo plazo queda determinado por el signo de α. La amplitud crece si α es positiva y decrece si α es negativa. La frecuencia de oscilación está definida por β y está dada por $\beta/(2\pi)$.

Podemos resumir este análisis de la manera siguiente: para ecuaciones homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes, el comportamiento cualitativo de las soluciones está determinado por los valores de s, para los cuales el denominador de la transformada de Laplace de la solución es cero. (Esos valores de s son precisamente los mismos que los eigenvalores del correspondiente sistema lineal.) Esto motiva parte de la terminología.

DEFINICIÓN Suponga que $F(s)$ es una función racional; es decir,

$$F(s) = \frac{G(s)}{H(s)},$$

donde $G(s)$ y $H(s)$ son polinomios sin factores comunes y el grado de G es menor que el grado de H. Los **polos** de F son los valores de s para los cuales $H(s) = 0$. Si $F(s)$ es la suma de funciones racionales,

$$F(s) = \frac{G_1(s)}{H_1(s)} + \frac{G_1(s)}{H_1(s)} + \cdots + \frac{G_n(s)}{H_n(s)},$$

los polos de F se encuentran reescribiendo primero F como una fracción única, cancelando cualquier término común en el numerador y denominador y determinando después los polos de la función racional resultante. ∎

Podemos resumir este cálculo diciendo que, para una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, los polos de la transformada de Laplace de la solución general son los mismos que los eigenvalores del correspondiente sistema lineal.

Ecuaciones no homogéneas de segundo orden

Cuando consideramos una ecuación diferencial lineal no homogénea, los procedimientos cualitativos que usamos para las ecuaciones lineales homogéneas y sistemas ya no son aplicables. Un sistema no autónomo es muy diferente de un sistema autónomo porque su campo vectorial cambia con el tiempo.

Sin embargo, al usar la transformada de Laplace, no hay mucha diferencia entre una ecuación homogénea y una no homogénea. La aritmética para las ecuaciones no homogéneas es ligeramente más complicada, pero el método básico es el mismo. Por consiguiente, debemos considerar los polos de la transformada de Laplace de las soluciones de ecuaciones no homogéneas con la esperanza de conseguir el mismo tipo de información cualitativa que podemos obtener con los eigenvalores de una ecuación homogénea.

Por ejemplo, considere el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = e^{-t/10}, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 1.$$

Tomando la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación y despejando $\mathcal{L}[y]$, obtenemos

$$\mathcal{L}[y] = \frac{(s+2)y(0)}{s^2+2s+2} + \frac{y'(0)}{s^2+2s+2} + \frac{1}{(s^2+2s+2)(s+\frac{1}{10})},$$

y sustituyendo las condiciones iniciales, resulta

$$\mathcal{L}[y] = \frac{4(s+2)}{s^2+2s+2} + \frac{1}{s^2+2s+2} + \frac{1}{(s^2+2s+2)(s+\frac{1}{10})}.$$

Para encontrar los polos, notamos que el mínimo denominador común de la suma para $\mathscr{L}[y]$ es

$$(s^2 + 2s + 2)(s + \tfrac{1}{10}).$$

Las raíces de $s^2 + 2s + 2$ son $-1 \pm i$, por lo que los polos son $s = -1 \pm i$ y $s = -1/10$. Usando fracciones parciales, podemos reescribir la transformada de Laplace de la solución como una suma de términos con denominadores

$$s + \tfrac{1}{10} \quad \text{y} \quad s^2 + 2s + 2 = (s+1)^2 + 1$$

De la tabla de transformadas de Laplace, vemos que los únicos términos que pueden aparecer en la solución son $e^{-t/10}$, e^{-t} sen t y $e^{-t}\cos t$.

Igual que para el caso homogéneo, los polos de la transformada de Laplace, $s = -1/10$ y $s = -1 \pm i$, nos dan el comportamiento cualitativo de la solución, y nos muestran que ésta decrece hacia cero porque todos los polos son negativos o tienen partes reales negativas. La solución no es monótona sino que oscila con una frecuencia natural de 2π debido a los polos complejos. Finalmente, la razón a la que se aproxima a cero está determinada por el término exponencial cuya parte real está más cerca de cero. Por consiguiente, esta solución tiende a cero con la misma razón que $e^{-t/10}$.

Esta información cualitativa concuerda con la gráfica de la solución dada en la figura 6.25, pues las oscilaciones contribuidas por los términos sen t y cos t son difícilmente visibles. Lo notable aquí es que la descripción que conseguimos al emplear los polos de la transformada de Laplace es muy similar a la descripción de las soluciones de ecuaciones lineales homogéneas que obtuvimos usando los eigenvalores. Por lo menos de manera aproximada, podemos imaginar que los polos de la transformada de Laplace de las soluciones son una extensión de la idea de los eigenvalores de ecuaciones no homogéneas.

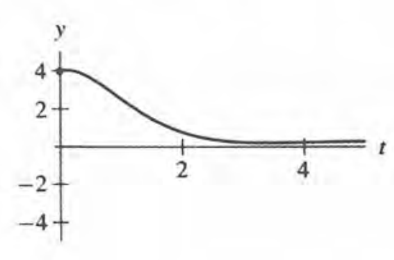


Figura 6.25
La solución de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = e^{-t/10}$$

con condiciones iniciales $y(0) = 4$ y $y'(0) = 1$.

Clasificación usando polos

Reuniendo estas ideas, podemos establecer algunas reglas concernientes a la relación que existe entre los polos de la transformada de Laplace de una solución y su comportamiento cualitativo.

Si todos los polos son negativos o tienen partes reales que lo son, entonces la solución tiende hacia el origen en forma exponencial cuando t crece, y el signo del exponente es igual a la parte real del polo más cercano a cero. Si uno o más de los polos es positivo o tiene parte real positiva, entonces la solución no está acotada. Tiende a infinito exponencialmente si el polo más grande es real. Si el polo con la parte real mayor es complejo, entonces la solución oscila y la amplitud de la oscilación crece de modo exponencial. Recalcamos que hasta ahora sólo hemos hablado de las soluciones que tienden a infinito o a cero con razón exponencial. En esta área se acostumbra llamar *estables* a las ecuaciones diferenciales, para las que todas las soluciones tienden a cero cuando t crece. Pero en

aquellas ecuaciones, en las que una o más soluciones tienden a infinito cuando t crece se llaman *inestables*.

La parte del plano complejo a la izquierda del eje imaginario se denomina el medio plano izquierdo. Éste contiene los números reales negativos y los números complejos que tienen partes reales negativas. Los reales positivos y los números complejos con partes reales positivas constituyen el medio plano derecho. La condición para la estabilidad es eficientemente resumida por:

Todos los polos en el medio plano izquierdo implican estabilidad.

y

Uno o más polos en el medio plano derecho implican inestabilidad.

Resumimos esta información cualitativamente en la figura 6.26. En el caso especial de que todos los polos se encuentren sobre el eje imaginario, la situación es más compli-

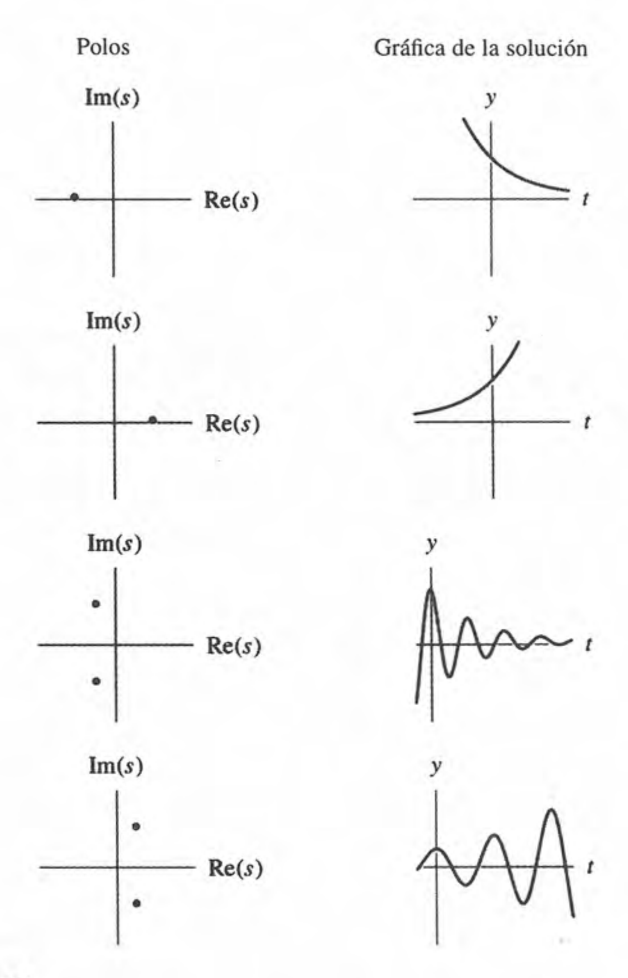


Figura 6.26
Representación esquemática de la información contenida en los polos de la transformada de Laplace. Cada retrato a la izquierda da la localización de los polos en el plano complejo s, mientras que el retrato a la derecha es la gráfica $y(t)$ de la solución.

cada. La solución puede oscilar o podemos encontrar resonancia. No trataremos más este caso especial importante; sin embargo, vea los ejercicios 5-8.

Otro ejemplo con moraleja

Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 3y = u_2(t)e^{-(t-2)/10}\operatorname{sen}(t-2).$$

Éste es un oscilador armónico subamortiguado con un término senoidal de forzamiento que aparece en el tiempo $t = 2$ y que decrece exponencialmente cuando t se incrementa. Tomando la transformada de Laplace, obtenemos

$$s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) + s\mathcal{L}[y] - y(0) + 3\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[u_2(t)e^{-(t-2)/10}\operatorname{sen}(t-2)].$$

Despejando $\mathcal{L}[y]$, resulta

$$\mathcal{L}[y] = \frac{(s+1)y(0)}{s^2+s+3} + \frac{y'(0)}{s^2+s+3} + \frac{e^{-2s}}{((s+\frac{1}{10})^2+1)(s^2+s+3)}.$$

Los polos son $(-1 \pm \sqrt{11})/2$ y $-\frac{1}{10} \pm i$. Los polos $(-1 \pm i\sqrt{11})/2$ son los eigenvalores de la ecuación no forzada y representan la respuesta natural del sistema. Los polos $-\frac{1}{10} \pm i$ simbolizan la respuesta forzada del sistema. De aquí podemos ver que la respuesta natural decae exponencialmente a cero (según $e^{-t/2}$), y la solución tiende a una oscilación de estado permanente cuyo periodo es 2π y su amplitud decrece más lentamente, según $e^{-t/10}$; vea la figura 6.27.

Sin embargo, debemos ser cautos. Si cambiamos la ecuación a

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 3y = (1 - u_2(t))e^{-(t-2)/10}\operatorname{sen}(t-2),$$

podemos entonces calcular que los polos de la transformada de Laplace son exactamente los mismos que antes. No obstante, la segunda ecuación tiene un término de forzamiento que se apaga en el tiempo $t = 2$, por lo que el comportamiento a largo plazo de las soluciones es el mismo que para el oscilador armónico subamortiguado no forzado; es decir, tiende a cero relativamente rápido, según $e^{-t/2}$; vea la figura 6.28.

La moraleja es que uno siempre debe esperar lo inesperado. Confiar ciegamente en un procedimiento, sin examinar la ecuación o la cuestión subyacente (o el sistema físico, si lo hay), puede conducir al desastre.

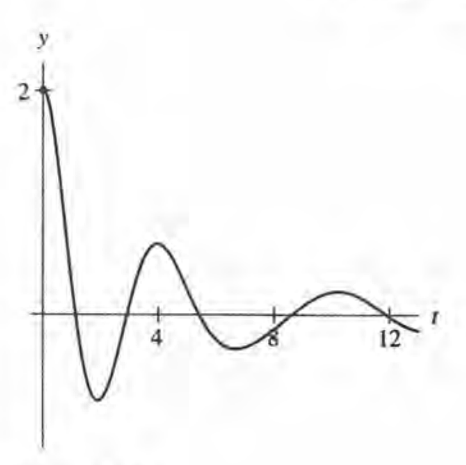


Figura 6.27
Solución de $d^2y/dt^2 + dy/dt + 3y = u_2(t)e^{-(t-2)/10}\,\text{sen}(t-2)$ con condiciones iniciales $y(0) = 2$ y $y'(0) = 0$.

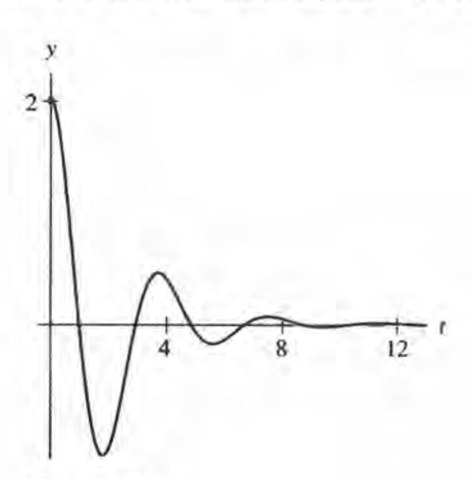


Figura 6.28
Solución de $d^2y/dt^2 + dy/dt + 3y = (1 - u_2(t))e^{-(t-2)/10}\,\text{sen}(t-2)$ con condiciones iniciales $y(0) = 2$ y $y'(0) = 0$.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 6.6

En los ejercicios 1-4,

(a) calcule la transformada de Laplace de la solución,

(b) encuentre los polos de la transformada de Laplace de la solución, y

(c) analice el comportamiento de la solución.

1. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + 2y = e^{-2t}\,\text{sen}\,4t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2$

2. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + 5y = u_2(t)\,\text{sen}(4(t-2)), \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 0$

3. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + 8y = (1 - u_4(t))\cos(t-4), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

[*Sugerencia:* Recuerde que $\cos(t-4) = (\cos t)(\cos 4) + (\text{sen}\,t)(\text{sen}\,4)$.]

4. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + 3y = (1 - u_2(t))e^{-(t-2)/10}\,\text{sen}(t-2), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

[*Sugerencia:* Recuerde que $\text{sen}(t-2) = (\cos 2)(\text{sen}\,t) - (\text{sen}\,2)(\cos t)$.]

5. **(a)** Calcule la transformada de Laplace de la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 16y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

(b) Calcule los polos de la transformada de Laplace de la solución.

(c) Use esto para formular una conjetura acerca de qué implicaciones genera en la transformada de Laplace tener polos sobre el eje imaginario respecto al comportamiento cualitativo de la solución.

6. **(a)** Calcule la transformada de Laplace de la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = \operatorname{sen} 2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

(b) Determine los polos de la transformada de Laplace de la solución.

(c) Con esto formule una conjetura sobre lo que representa para la transformada de Laplace tener "polos dobles" sobre el eje imaginario, respecto al comportamiento cualitativo de las soluciones.

7. **(a)** Calcule la transformada de Laplace de la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

(b) ¿Cuáles son los polos de la transformada de Laplace?

(c) Con lo anterior formule una hipótesis sobre lo que implica para la transformada de Laplace tener un "polo doble", respecto al comportamiento cualitativo de las soluciones.

8. **(a)** Encuentre la transformada de Laplace de la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 16y = t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

(b) Calcule los polos de la transformada de Laplace de la solución.

(c) Formule una conjetura sobre qué implicaciones trae a la transformada de Laplace tener un "polo doble" en cero, respecto al comportamiento cualitativo de la solución.

9. En el ejercicio 17 de la sección 6.2, consideramos la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 20\frac{dy}{dt} + 200y = w(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

donde $\omega(t)$ es la onda cuadrada.

(a) Calcule la transformada de Laplace de la solución de este problema de valor inicial.

(b) ¿Cuáles son los polos de la solución?

(c) Describa el comportamiento a largo plazo de la solución.

10. En el ejercicio 18 de la sección 6.2, consideramos la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 20\frac{dy}{dt} + 200y = z(t) \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

donde $z(t)$ es la onda de diente de sierra.

(a) Determine la transformada de Laplace de la solución de este problema de valor inicial.

(b) ¿Cuáles son los polos de la solución?

(c) Describa el comportamiento a largo plazo de la solución.

Tabla 6.1
Transformadas de Laplace de uso frecuente

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y]$	$Y(s) = \mathcal{L}[y]$	$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y]$	$Y(s) = \mathcal{L}[y]$
$y(t) = e^{at}$	$Y(s) = \dfrac{1}{s-a} \quad (s > a)$	$y(t) = t^n$	$Y(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}} \quad (s > 0)$
$y(t) = \operatorname{sen}\omega t$	$Y(s) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$y(t) = \cos\omega t$	$Y(s) = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$y(t) = e^{at}\operatorname{sen}\omega t$	$Y(s) = \dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	$y(t) = e^{at}\cos\omega t$	$Y(s) = \dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$y(t) = t\operatorname{sen}\omega t$	$Y(s) = \dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$y(t) = t\cos\omega t$	$Y(s) = \dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$y(t) = u_a(t)$	$Y(s) = \dfrac{e^{-as}}{s} \quad (s > 0)$	$y(t) = \delta_a(t)$	$Y(s) = e^{-as}$

Tabla 6.2
Reglas para las transformadas de Laplace:
Funciones dadas $y(t)$ y $w(t)$ con $\mathcal{L}[y] = Y(s)$ y $\mathcal{L}[w] = W(s)$, y constantes α y a

Regla para la transformada de Laplace	Regla para la transformada inversa de Laplace
$\mathcal{L}\left[\dfrac{dy}{dt}\right] = s\mathcal{L}[y] - y(0) = sY(s) - y(0)$	
$\mathcal{L}[y+w] = \mathcal{L}[y] + \mathcal{L}[w] = Y(s) + W(s)$	$\mathcal{L}^{-1}[Y+W] = \mathcal{L}^{-1}[Y] + \mathcal{L}^{-1}[W] = y(t) + w(t)$
$\mathcal{L}[\alpha y] = \alpha\mathcal{L}[y] = \alpha Y(s)$	$\mathcal{L}^{-1}[\alpha Y] = \alpha\mathcal{L}^{-1}[Y] = \alpha y(t)$
$\mathcal{L}[u_a(t)y(t-a)] = e^{-as}\mathcal{L}[y] = e^{-as}Y(s)$	$\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}Y] = u_a(t)y(t-a)$
$\mathcal{L}[e^{at}y(t)] = Y(s-a)$	$\mathcal{L}^{-1}[Y(s-a)] = e^{at}\mathcal{L}^{-1}[Y] = e^{at}y(t)$

LABORATORIO 6.1 CONVOLUCIONES

En la sección 6.5 vimos cómo puede calcularse la solución de una ecuación diferencial lineal no homogénea de coeficientes constantes

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = f(t), \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

para la función $f(t)$ de forzamiento a partir de la solución de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = \delta_0(t), \qquad y(0) = y'(0) = 0^-.$$

En este proceso no tuvimos que conocer las constantes p y q. Este procedimiento es aplicable a ecuaciones lineales con coeficientes constantes de cualquier orden.

En este laboratorio le proponemos que realice esos cálculos. La tabla 6.3 contiene las soluciones del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + qy = \delta_0(t), \qquad y(0) = 0^-,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = \delta_0(t), \qquad y(0) = y'(0) = 0^-,$$

Tabla 6.3
Soluciones para condiciones iniciales cero y forzamiento $\delta_0(t)$

Tiempo	$y_1(t)$	$y_2(t)$	$y_3(t)$	$y_4(t)$	Tiempo	$y_1(t)$	$y_2(t)$	$y_3(t)$	$y_4(t)$
0.1	0.0854	0.6065	0.0042	0.0905	2.1	−0.0195	0.0000	0.0074	0.2572
0.2	0.1425	0.3679	0.0136	0.1637	2.2	−0.0169	0.0000	0.0070	0.2438
0.3	0.1779	0.2231	0.0243	0.2222	2.3	−0.0139	0.0000	0.0064	0.2306
0.4	0.1927	0.1353	0.0336	0.2681	2.4	−0.0109	0.0000	0.0058	0.2177
0.5	0.1921	0.0821	0.0398	0.3033	2.5	−0.0080	0.0000	0.0052	0.2052
0.6	0.1801	0.0498	0.0424	0.3293	2.6	−0.0054	0.0000	0.0046	0.1931
0.7	0.1604	0.0302	0.0417	0.3476	2.7	−0.0031	0.0000	0.0041	0.1814
0.8	0.1361	0.0183	0.0384	0.3595	2.8	−0.0012	0.0000	0.0036	0.1703
0.9	0.1100	0.0111	0.0337	0.3659	2.9	0.0002	0.0000	0.0032	0.1596
1.0	0.0840	0.0067	0.0283	0.3679	3.0	0.0013	0.0000	0.0028	0.1494
1.1	0.0597	0.0041	0.0231	0.3662	3.1	0.0020	0.0000	0.0025	0.1396
1.2	0.0381	0.0025	0.0186	0.3614	3.2	0.0024	0.0000	0.0023	0.1304
1.3	0.0198	0.0015	0.0149	0.3543	3.3	0.0026	0.0000	0.0021	0.1217
1.4	0.0050	0.0009	0.0123	0.3452	3.4	0.0025	0.0000	0.0019	0.1135
1.5	−0.0062	0.0006	0.0105	0.3347	3.5	0.0023	0.0000	0.0018	0.1057
1.6	−0.0141	0.0003	0.0094	0.3230	3.6	0.0021	0.0000	0.0016	0.0984
1.7	−0.0191	0.0002	0.0088	0.3106	3.7	0.0017	0.0000	0.0015	0.0915
1.8	−0.0217	0.0001	0.0084	0.2975	3.8	0.0014	0.0000	0.0013	0.0850
1.9	−0.0223	0.0001	0.0081	0.2842	3.9	0.0010	0.0000	0.0012	0.0789
2.0	−0.0214	0.0000	0.0078	0.2707	4.0	0.0007	0.0000	0.0011	0.0733

o

$$\frac{d^3y}{dt^3} + r\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = \delta_0(t), \qquad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0^-$$

para varias opciones de las constantes r, p y q. Con estos datos usted puede encontrar las soluciones para diferentes funciones de forzamiento a partir de las convoluciones. La aritmética implicada en el cálculo numérico de estas últimas puede ser considerable, por lo que conviene aprovechar cualquier ayuda computacional de que se disponga.

En su reporte, responda las siguientes preguntas:

1. Para cada una de las soluciones dadas, calcule la solución aproximada si la función delta en el lado derecho es reemplazada por $f(t) = \cos 4t$. Las condiciones iniciales permanecen igual a cero.
2. Para cada una de las soluciones dadas, determine la solución aproximada si la función delta en el lado derecho es sustituida por $g(t) = 3u_1(t) + u_2(t) - 4u_3(t)$. Las condiciones iniciales permanecen igual a cero.
3. Para cada una de las soluciones dadas, encuentre la solución aproximada si la función delta en el lado derecho es reemplazada por $h(t) = e^{-t}$. Las condiciones iniciales permanecen igual a cero.
4. Para cada una de las soluciones dadas, determine la ecuación diferencial. Es decir, defina el orden de la ecuación y los valores aproximados de los coeficientes.

Sobre su reporte: En su reporte debe resumir su procedimiento para calcular las convoluciones y presentar las soluciones en gráficas y tablas. Como también habrá cálculos numéricos, deberá analizar la exactitud de sus respuestas.

LABORATORIO 6.2 POLOS

En la sección 6.6 analizamos la relación entre los polos de la transformada de Laplace de una solución y el comportamiento cualitativo de la solución. La regla empírica general es que la parte real de los polos da el crecimiento exponencial y la razón de declinación de la solución, mientras que la parte imaginaria proporciona el periodo de oscilación. Esto facilita determinar tanto el crecimiento exponencial de las soluciones (polos con parte real positiva) como la razón exponencial del decaimiento (polo con parte real negativa más cercano a cero).

Si bien el incremento y la declinación exponenciales son los aspectos más importantes de las soluciones, también se tiene el crecimiento lineal. Por ejemplo, esto ocurre con un forzamiento resonante en las ecuaciones del oscilador armónico no amortiguado. Este comportamiento puede identificarse en los polos de la solución. El objetivo de este laboratorio es aprender a efectuar estas identificaciones.

Su reporte debe responder los temas siguientes:

1. Determine los polos de las soluciones de cada uno de los problemas de valor inicial siguientes:

(a) $\dfrac{dy}{dt} + y = e^{-t}, \qquad y(0) = 0$

(b) $\dfrac{dy}{dt} + y = t, \quad y(0) = 0$

(c) $\dfrac{dy}{dt} + y = t^2, \quad y(0) = 0$

(d) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 9y = \text{sen } 3t, \quad y(0) = y'(0) = 0$

(e) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 9y = t \quad y(0) = y'(0) = 0$

(f) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 9y = t^2 \quad y(0) = y'(0) = 0$

(g) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = e^{-t} \quad y(0) = y'(0) = 0$

(h) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + y = e^{-t} \quad y(0) = y'(0) = 0$

2. Para cada problema de valor inicial en la parte 1, encuentre la solución (numérica o analíticamente). Encuentre la razón de crecimiento o declinación de la solución. [*Sugerencia:* La determinación de la razón exacta de crecimiento puede ser sutil si se hace numéricamente. Para las ecuaciones (a), (g) y (h), compare usted la solución con e^{-t}.]

3. Con base en sus resultados en las partes 1 y 2, elabore una conjetura concerniente a la relación entre polos múltiples y la razón de crecimiento o declinación de soluciones.

4. Calcule una fórmula para

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds}\mathscr{L}[f]\right]$$

en términos de $f(t)$. Escriba un ensayo breve que relacione este cálculo con su trabajo en las partes 1, 2 y 3.

Sobre su reporte: En la parte 3 establezca de manera clara y concisa una conjetura que sea congruente con los resultados de las partes 1 y 2, y asegúrese de que también lo sea con su fórmula en la parte 4.

7 MÉTODOS NUMÉRICOS

Los errores en las aproximaciones numéricas de soluciones a problemas de valor inicial son inevitables. Por lo general pueden controlarse al disminuir el tamaño del paso, pero esta reducción hace más laboriosa las operaciones de aritmética. En consecuencia, hay un trueque entre exactitud y tiempo de cálculo.

Comenzaremos este capítulo con un análisis de los errores implicados en el método de Euler para entender la relación entre error y tamaño de paso. Veremos por qué el método de Euler es un procedimiento aproximado de primer orden.

En las secciones segunda y tercera damos métodos que alcanzan una cierta exactitud con menores pasos y menos aritmética. Los métodos que consideramos son el método de Euler mejorado y el de Runge-Kutta, los cuales producen resultados mucho más exactos para un tamaño de paso dado.

Las computadoras y calculadoras pueden usar sólo una cantidad finita de memoria para almacenar cada número de un cálculo. Sin embargo, la mayor parte de los números tienen expansiones decimales infinitas. Por ello, las computadoras y las calculadoras cometen errores pequeños en cada operación debido a la representación numérica de las máquinas implicadas. En la sección final consideraremos el efecto de esos errores en nuestras aproximaciones.

7.1 ERRORES NUMÉRICOS EN EL MÉTODO DE EULER

De los tres enfoques para el estudio de las ecuaciones diferenciales, el analítico, el cualitativo y el numérico, el de uso más común en ciencia e ingeniería es el numérico. Esto no debe sorprendernos, puesto que existen muchos paquetes de programación eficientes que automatizan en gran medida el proceso para obtener soluciones numéricas. Aun cuando existen procedimientos analíticos o cualitativos relativamente simples, se tiene la tentación de "dejar que la computadora lo haga".

No hay nada malo con este modo de operar, siempre que se tengan en mente dos puntos importantes. Primero, la computadora da números y gráficas, pero no efectúa ninguna interpretación. La tarea del ser humano es entender el comportamiento cualitativo de una solución aproximada junto con sus implicaciones para el sistema físico bajo consideración.

Segundo, los métodos numéricos dan soluciones *aproximadas*. Siempre hay un cierto grado de error, y éste se incrementa cuando se prolonga el periodo en el que se desarrolla la solución. Si bien el error puede resultar insignificante para algunas ecuaciones diferenciales, hemos visto ejemplos "caóticos" donde los errores pequeños se amplifican muy rápido (vea las secciones 2.5, 5.6, 8.4 y 8.5).

Hasta ahora hemos evitado todo análisis de los errores que surgen en los procedimientos numéricos como el método de Euler. Sin embargo, si vamos a trabajar con computadoras, debemos estar conscientes de esos errores y saber cómo determinar si nuestras soluciones aproximadas están dentro de rangos aceptables.

Cuando usamos una computadora para aproximar la solución de una ecuación diferencial, hay dos maneras muy diferentes de introducir errores en el cálculo. Una de ellas está implícita en el esquema de aproximación que usamos y la otra resulta de la aritmética finita empleada durante los cálculos. En este capítulo analizaremos principalmente los errores que se originan del procedimiento de aproximación. No obstante, en la sección 7.4 analizaremos algunos de los temas interesantes y prácticos que se derivan de la aritmética de la computadora.

Tamaño del paso y el método de Euler

De la sección 1.4, recuerde que el método de Euler es un esquema iterativo que aproxima la solución de un problema de valor inicial de la forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

La solución aproximada está dada por la iteración

$$y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k)\,\Delta t,$$

donde Δt es el tamaño del paso y y_0 es el valor inicial $y(t_0)$. Hay una relación simple entre el tamaño del paso Δt, la longitud del intervalo sobre el cual queremos aproximar la solución y el número de pasos implicados en los cálculos. En particular, si deseamos que dicha aproximación se lleve a cabo sobre el intervalo de t_0 a t_n (usando n pasos), dividimos la longitud total del intervalo en n subintervalos de igual longitud. En otras palabras,

$$\Delta t = \frac{t_n - t_0}{n}.$$

La regla empírica vista en la sección 1.4 es que entre menor es el tamaño del paso, más exacta es la solución aproximada. Sin embargo, entre menor es el tamaño del paso, mayor es el número de éstos y más tiempo le toma a la computadora aproximar la solución. Resulta útil poder predecir, incluso burdamente, qué tan grande debe ser un tamaño de paso para lograr una exactitud particular.

Comenzaremos por estudiar cómo cambia la exactitud del método de Euler con el tamaño del paso para un ejemplo particular. Cuando presentamos el método de Euler para las ecuaciones de primer orden en la sección 1.4, consideramos el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = -2ty^2, \quad y(0) = 1.$$

Esta ecuación es separable y la solución es

$$y(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Como tenemos una fórmula para resolverla, podemos comparar los resultados del método de Euler para diferentes tamaños de paso con los valores exactos de la solución.

En la sección 1.4 aplicamos el método de Euler a este problema de valor inicial sobre el intervalo $0 \leq t \leq 2$ usando $\Delta t = 0.1$ (20 pasos). Para esta ecuación diferencial, el esquema de iteración del método de Euler es

$$y_{k+1} = y_k - 2t_k y_k^2 \Delta t,$$

y obtuvimos $y_{20} = 0.1933\ldots$, que es una buena aproximación del valor exacto $y(2) = 1/(1 + 2^2) = 0.2$. Incrementando el número de pasos a 2 000 ($\Delta t = 0.001$) se encuentra el valor cercano más exacto $y_{2000} = 0.199937\ldots$, que se aproxima aún más a $y(2) = 0.2$. En la sección 1.4 simplemente observamos que el hecho de aumentar el número de pasos en el cálculo total parece incrementar la exactitud. Ahora desearíamos ser más específicos acerca de cómo mejorar la exactitud cuando el número de pasos es mayor.

Primero observaremos cuidadosamente el resultado del cálculo que usó 2 000 pasos sobre el intervalo $0 \leq t \leq 2$. Denotamos el error en el cálculo por e_{2000}. Tenemos

$$e_{2000} = |0.2 - y_{2000}| = |0.2 - 0.199937| = 0.000063.$$

Supongamos que duplicamos el número de pasos. Después de comenzar con la misma condición inicial y tomar 4 000 pasos con $\Delta t = 0.0005$, obtenemos la aproximación $y_{4000} = 0.199969$. En este caso tenemos el error

$$e_{4000} = |0.2 - y_{4000}| = |0.2 - 0.199969| = 0.000031.$$

En este ejemplo vemos que la razón de los errores es

$$\frac{e_{4000}}{e_{2000}} = \frac{0.000031}{0.000063} \approx 0.492.$$

Al duplicar el número de pasos en este ejemplo, disminuimos el error a la mitad.

Este cálculo directo nos hace preguntarnos cómo depende la exactitud de la aproximación del tamaño y del número de pasos. Como el método de Euler es fácil de imple-

mentar, podemos ensayar varios valores para ver qué sucede. Con la computadora calculamos primero el valor de y_n para varias opciones del número n de pasos. Luego determinamos el error e_n para esos valores. En la figura 7.1 graficamos los resultados para $n = 100, 200, 300, \ldots, 6\,000$. Esta gráfica da la exactitud del método de Euler aplicado al problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = -2ty^2, \quad y(0) = 1,$$

como función del tamaño del paso. Si ignoramos de momento las escalas sobre los ejes, notamos que esta gráfica tiene un aspecto familiar. De hecho, se parece a la gráfica de $1/n$, cuando n denota el número total de pasos. En la figura 7.2 trazamos una gráfica de una función de la forma K/n. (En realidad $K = 0.126731$, pero no es importante cómo llegamos a este número.) Observe la concordancia entre los puntos calculados en la gráfica de esta función. El resto de esta sección se dedicará a explicar por qué son comunes esos resultados.

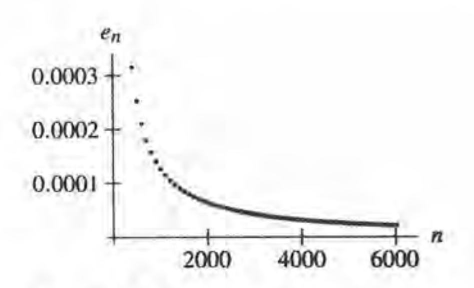


Figura 7.1
El error en el método de Euler como función del número n de pasos usados en la aproximación. Este método se aplica a $dy/dt = -2ty^2$, $y(0) = 1$, sobre el intervalo $0 \leq t \leq 2$.

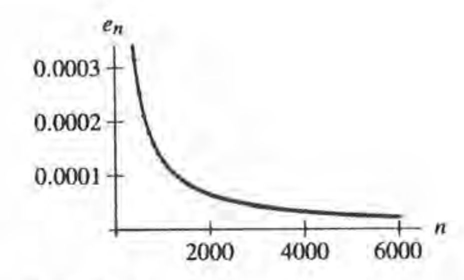


Figura 7.2
El error en el método de Euler de la figura 7.1 ajustado a la función $0.126731/n$. Observe que es casi imposible distinguir la gráfica de $0.126731/n$ de los puntos dato e_n.

El error en el primer paso del método

Dado un problema de valor inicial de la forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

y un tamaño de paso Δt, sabemos que el valor de y_1 en el primer paso de Euler está determinado, suponiendo que la gráfica de la solución es un segmento de línea que empieza en (t_0, y_0) y tiene pendiente $f(t_0, y_0)$. Primero necesitamos estimar el error cometido en este paso inicial. La herramienta que nos permite lograrlo es el teorema de Taylor con residuo.

El teorema de Taylor dice que

$$y(t_1) = y(t_0) + y'(t_0)\,\Delta t + y''(\xi_1)\frac{(\Delta t)^2}{2}$$

para algún número ξ_1 entre t_0 y t_1. Como sabemos que $y(t)$ es una solución al problema de valor inicial, tenemos $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$ y $y(t_0) = y_0$. En otras palabras,

$$y(t_1) = y_0 + f(t_0, y_0)\,\Delta t + y''(\xi_1)\frac{(\Delta t)^2}{2}.$$

El método de Euler corresponde a cancelar el término $(\Delta t)^2$, es decir, tomar la aproximación lineal de la solución de t_0 a t_1. La diferencia $|y(t_1) - y_1|$ entre la primera aproximación de Euler y_1 y el valor verdadero $y(t_1)$ de la solución es

$$\left| y''(\xi_1)\frac{(\Delta t)^2}{2} \right|.$$

Es conveniente tener alguna notación para este término, por lo que lo denotaremos por τ_1 para representar el error de **truncamiento**. Se llama así porque resulta de un "truncamiento" de la serie de Taylor para $y(t_1)$. El método de Euler se basa en la aproximación de Taylor de $y(t_1)$, pero cancela todos los términos no lineales (los de segundo grado o mayores).

Para el primer paso del método de Euler, el error de truncamiento es el error, pero esto no aplicará para los pasos subsecuentes. Introducimos entonces una notación para el **error total** después de k pasos. Por definición, el error total después de k pasos es la diferencia entre la aproximación k-ésima de Euler y el valor verdadero $y(t_k)$ en el tiempo t_k, y lo denotamos por e_k. De manera más precisa,

$$e_k = |y(t_k) - y_k|.$$

Note que para el primer paso ($k = 1$), el error total y el de truncamiento son idénticos. Es decir,

$$e_1 = \tau_1.$$

Por lo común el error de truncamiento y el error total concuerdan sólo en el primer paso.

En este momento es natural que nos preguntemos si la fórmula

$$\tau_1 = \left| y''(\xi_1)\frac{(\Delta t)^2}{2} \right|$$

es algo que podamos calcular realmente si no conocemos de antemano la solución $y(t)$. Lo que debemos tener en mente es que $y(t)$ es una solución de la ecuación diferencial. Como sabemos que $dy/dt = f(t, y)$, podemos calcular la segunda derivada de $y(t)$ usando la *regla de la cadena* de variables múltiples. Como

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)),$$

tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f(t, y).\end{aligned}$$

Por tanto, podemos limitar el error e_1 usando un límite superior M_1 para la cantidad

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f(t, y)$$

a lo largo de la gráfica de $y(t)$ entre $y(t_0)$ y $y(t_1)$. Como se nos da $f(t, y)$, podemos calcular las cantidades en esta expresión.

Supongamos que M_1 es una constante suficientemente grande tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f(t, y) \right| < M_1$$

a lo largo de la gráfica de $y(t)$ (o por lo menos la parte de la gráfica que estamos considerando). Si podemos encontrar este límite M_1, entonces el error en el primer paso queda definido de acuerdo con la desigualdad

$$e_1 = \tau_1 \leq M_1 \frac{(\Delta t)^2}{2}$$

(vea la figura 7.3).

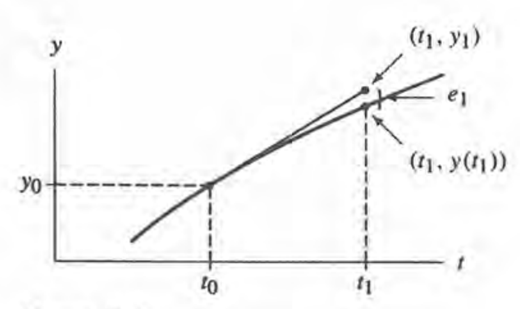


Figura 7.3
El error e_1 en el primer paso del método de Euler.

El error en el segundo paso

Desafortunadamente, una vez que tomamos el primer paso, ya no estamos sobre la gráfica de $y(t)$ y en consecuencia nuestro análisis del error se vuelve más complicado. Básicamente hay dos fuentes de error en el segundo paso. Si conociéramos el valor exacto de $y(t_1)$, entonces el error e_2 en el segundo paso sería de nuevo el de truncamiento τ_2. En otras palabras, del teorema de Taylor tenemos

$$y(t_2) = y(t_1) + y'(t_1)\,\Delta t + y''(\xi_2)\frac{(\Delta t)^2}{2}$$

para algún número ξ_2 entre t_1 y t_2 y usando la ecuación diferencial para reemplazar $y'(t_1)$ por $f(t_1, y(t_1))$, tendríamos

$$y(t_2) = y(t_1) + f(t_1, y(t_1))\,\Delta t + y''(\xi_2)\frac{(\Delta t)^2}{2}.$$

Por consiguiente, el error de truncamiento en este paso es

$$\tau_2 = \left| y''(\xi_2) \frac{(\Delta t)^2}{2} \right|.$$

Comparando la fórmula

$$y(t_2) = y(t_1) + f(t_1, y(t_1))\,\Delta t + y''(\xi_2)\frac{(\Delta t)^2}{2}$$

del teorema de Taylor con la fórmula

$$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1)\,\Delta t$$

para la segunda aproximación y_2 del método de Euler, vemos que no sólo estamos perdiendo el término cuadrático, sino que dicho procedimiento emplea la pendiente $f(t_1, y_1)$ en (t_1, y_1) en vez de la pendiente $f(t_1, y(t_1))$ en $(t_1, y(t_1))$ (vea la figura 7.4). Por tanto, cuando estimamos el error e_2, tenemos

$$\begin{aligned} e_2 &= |y(t_2) - y_2| \\ &\leq |y(t_1) - y_1| + |f(t_1, y(t_1)) - f(t_1, y_1)|\,\Delta t + |y''(\xi_2)|\frac{(\Delta t)^2}{2} \\ &\leq e_1 + |f(t_1, y(t_1)) - f(t_1, y_1)|\,\Delta t + M_1\frac{(\Delta t)^2}{2} \end{aligned}$$

si podemos encontrar un límite M_1 sobre la segunda derivada, como lo hicimos cuando estimamos τ_1. En otras palabras, el error total del segundo paso está limitado por el error total del primer paso, por el error de truncamiento τ_2 asociado con el segundo paso y por un tercer término, $|f(t_1, y(t_1)) - f(t_1, y_1)|\,\Delta t$, que toma en cuenta que estamos usando la pendiente $f(t_1, y_1)$ en el punto (t_1, y_1) en lugar de la pendiente $f(t_1, y(t_1))$ en el punto $(t_1, y(t_1))$ sobre la curva solución real. La figura 7.4 ilustra la contribución de cada uno de esos tres términos al error total.

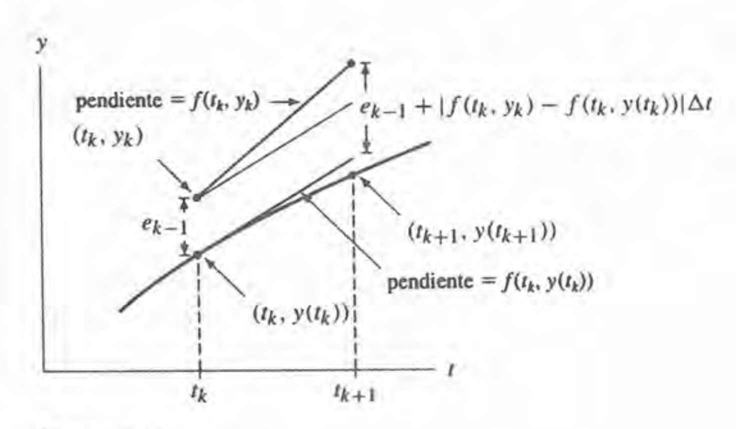


Figura 7.4
La relación entre el error e_{k-1} y el error e_k.

Para obtener una estimación del error e_2 en una forma relativamente conveniente, necesitamos limitar la diferencia entre $f(t_1, y(t_1))$ y $f(t_1, y_1)$. Como esos dos valores de f provienen de puntos situados en la línea $t = t_1$, tenemos la estimación

$$|f(t_1, y(t_1)) - f(t_1, y_1)| \leq M_2 \cdot e_1,$$

donde M_2 es el máximo de la derivada parcial $\partial f / \partial y$ del segmento entre $(t_1, y(t_1))$ y (t_1, y_1). Por tanto, obtenemos la estimación

$$e_2 \leq e_1 + M_2 e_1 \Delta t + M_1 \frac{(\Delta t)^2}{2} = (1 + M_2 \Delta t) e_1 + M_1 \frac{(\Delta t)^2}{2}.$$

El análisis del error e_k en el k-ésimo paso es esencialmente el mismo que el que acabamos de completar para el segundo paso. Si M_1 es un límite para la segunda derivada a lo largo de la gráfica de la solución y si M_2 es un límite para la derivada parcial $\partial f / \partial y$, entonces el error e_k está limitado por

$$e_k \leq (1 + M_2 \Delta t) e_{k-1} + M_1 \frac{(\Delta t)^2}{2}.$$

Note que esta fórmula es recursiva ya que expresa e_k en términos de e_{k-1} (es realmente un sistema dinámico discreto). El término

$$M_1 \frac{(\Delta t)^2}{2}$$

toma en cuenta el error de truncamiento τ_k en el k-ésimo paso y el término

$$(1 + M_2 \Delta t) e_{k-1}$$

representa la amplificación del error en el $(k - 1)$-ésimo paso por un factor debido a que estamos calculando el lado derecho de la ecuación diferencial en la aproximación de Euler (t_k, y_k), en lugar de hacerlo en el punto real $(t_k, y(t_k))$ sobre la solución.

El error después de *n* pasos

Si vamos a aproximar la solución $y(t)$ usando n pasos, sería adecuado tener una fórmula compacta para el error e_n expresada en términos de cantidades fáciles de calcular a partir de la ecuación diferencial, es decir, directamente del lado derecho $f(t, y)$. La fórmula recursiva que acabamos de derivar no se ajusta a estos criterios. Sin embargo, en el ejercicio 11 mostramos que, si encontramos máximos para las expresiones

$$M_1 = \left| \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f(t, y) \right| \quad \text{y} \quad M_2 = \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$$

que aparecen en las estimaciones, entonces podemos usar esta fórmula recursiva para limitar el error total en el método de Euler. Sobre el intervalo $t_0 \leq t \leq t_n$, podemos derivar un límite de la forma

$$e_n \leq C \cdot \Delta t,$$

donde C es una constante determinada por los valores de M_1 y M_2, y la longitud total del intervalo t sobre el cual la solución es aproximada. No pierda de vista que el valor de C

no depende del número de pasos utilizados en el método de Euler. Además, como $\Delta t = (t_n - t_0)/n$, podemos reescribir esta estimación como

$$e_n \leq \frac{K}{n},$$

donde K es el producto de la constante C y la longitud del intervalo total $t_0 \leq t \leq t_n$. Desde nuestro punto de vista, K es justamente otra constante que no depende del número de pasos usados en el método de Euler.

Lo más importante es que tenemos límites teóricos que pueden expresarse como

$$e_n \leq C \cdot \Delta t \quad \text{o como} \quad e_n \leq \frac{K}{n}.$$

De manera aproximada, si dividimos Δt entre dos, entonces el error en el método de Euler se divide entre dos. Expresada en términos del número de pasos, esta estimación dice que si duplicamos el número de pasos, entonces duplicamos la exactitud de la aproximación.

El problema de valor inicial $dy/dt = -2ty^2$, $y(0) = 1$

Al principio de esta sección comparamos los resultados del método de Euler con la solución analítica del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = -2ty^2, \quad y(0) = 1.$$

Vimos que el error era casi proporcional al tamaño del paso Δt. Esto es consistente con las estimaciones teóricas que acabamos de analizar. Sin embargo, por lo general es excesivo emplear dichas estimaciones (desarrolladas con más detalle en el ejercicio 11) para escoger el tamaño de paso apropiado que garantice un error deseado específico.

Para saber por qué, observemos con detalle el método de Euler aplicado al problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = -2ty^2, \quad y(0) = 1,$$

Hemos estado estimando la solución sobre el intervalo $0 \leq t \leq 2$. Aun sin tratar de obtener una solución analítica del problema, sabemos que la solución es decreciente y que nunca es cero. ¿Por qué llegamos a esta conclusión? Porque $y(t) = 0$ para toda t es una solución de equilibrio. Por tanto, sabemos que la gráfica de la solución verdadera permanece en el rectángulo

$$\{(t, y) \mid 0 \leq t \leq 2, \ 0 \leq y \leq 1\}$$

en el plano t-y. Usando ideas similares a las que acabamos de estudiar, podemos determinar que los valores aproximados $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ producidos por el método de Euler también deben encontrarse en el mismo rectángulo. En teoría, ahora podemos estimar las expresiones M_1 y M_2 que contienen las derivadas parciales relevantes sobre este rectángulo y obtenemos un límite sobre el error total de la aproximación. De hecho, esto es lo que hacemos en el ejercicio 12. Finalmente obtenemos el límite

$$e_n \leq (16, 661, 456)\, \Delta t.$$

En otras palabras, necesitamos tomar alrededor de 34 millones de pasos para garantizar una exactitud de 1 sobre este intervalo de longitud 2. Observando los datos de nuestros

experimentos al principio de la sección, vemos que ésta es una estimación abrumadora. Con diez pasos obtenemos un error menor que 0.015.

¿Por qué es tan ineficaz la estimación teórica? El problema proviene de tratar de estimar el error total e_n usando límites superiores sobre M_1 y M_2 que son válidos en todo el rectángulo, aun cuando la solución real y las aproximaciones de Euler permanecen cercanas y sus gráficas evitan los lugares en que los valores de M_1 y M_2 son grandes. En general, el problema es que no tenemos una idea muy buena de dónde estará la gráfica de la solución sino hasta que hacemos una aproximación exacta.

En la práctica, los límites teóricos para el error total se reemplazan por estimaciones del error que pueden introducirse a cada paso. Aunque este análisis no es 100% confiable, tiende a dar una mejor indicación de la exactitud de nuestra aproximación.

Para ilustrar el punto, volvemos al problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = -2ty^2, \quad y(0) = 1,$$

y estimamos la solución sobre el intervalo $0 \le t \le 2$ con 100 pasos. Como en este caso tenemos la solución analítica, podemos calcular el error $e_k = |y(t_k) - y_k|$ en cada paso. Los resultados de este cálculo se muestran en la figura 7.5. Además, la estimación del error total se calcula con base en la fórmula recursiva

$$e_k \le (1 + M_2\Delta t)\, e_{k-1} + M_1\frac{(\Delta t)^2}{2}$$

derivada con anterioridad. Sin embargo, en cada paso estimamos

$$M_1 = \left|\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f(t, y)\right| \quad \text{y} \quad M_2 = \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$$

basándonos en el valor corriente de y_k. Es decir, después de calcular y_k a partir de (t_{k-1}, y_{k-1}), determinamos M_1 en el punto $(t_{k-1} + \Delta t/2, (y_{k-1} + y_k)/2)$ y M_2 en el punto $(t_{k-1}, (y_{k-1} + y_k)/2)$. (Ésos son puntos "medios" en el conjunto de todas las posibilidades.) Luego, dados los valores resultantes para M_1 y M_2, usamos la aproximación

$$e_k \approx (1 + M_2\Delta t)\, e_{k-1} + M_1\frac{(\Delta t)^2}{2}.$$

Esto nos da una estimación corriente para el error total e_k, fundamentada en los mismos principios que justifican nuestros resultados teóricos. En la figura 7.6 se muestra una grá-

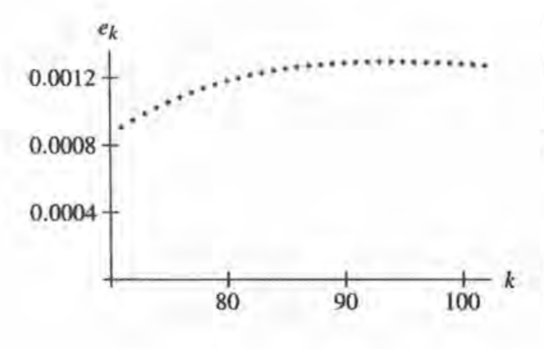


Figura 7.5
El error acumulativo e_k después del k-ésimo paso en la aproximación de Euler para el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = -2ty^2, \quad y(0) = 1,$$

sobre el intervalo $0 \le t \le 2$ con $n = 100$ pasos.

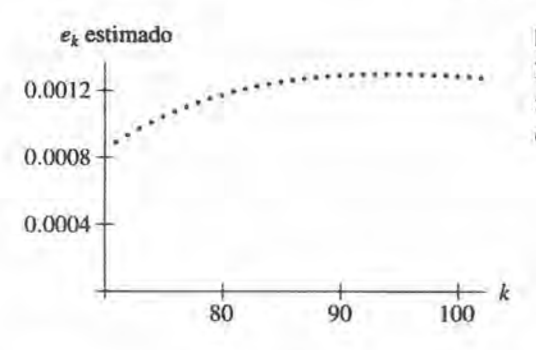


Figura 7.6
Estimaciones de los errores e_k como se muestran en la figura 7.5, con base en la evaluación de derivadas parciales relevantes.

fica de esas estimaciones. Note que esta gráfica es casi idéntica a la del error real, como se muestra en la figura 7.5.

En general, este tipo de estimación local de los errores implicados en el cálculo es mucho más fácil de lograr. De hecho, éste puede dejarse a la computadora y las estimaciones de los errores e_k pueden ser uno de los resultados del cálculo.

El orden del método de Euler

La lección más importante de esta sección es que el tamaño del error en el método de Euler para un problema de valor inicial sobre un tiempo fijo está en proporción al tamaño del paso, o, en otras palabras, es inversamente proporcional al número de pasos que usamos sobre un intervalo fijo. Decimos que el método de Euler es un método de **primer orden** porque el error es, en el peor de los casos, proporcional a la primera potencia del tamaño del paso; note el 1 en el exponente del límite

$$e_n \leq C \cdot (\Delta t)^1.$$

En las dos secciones siguientes presentamos métodos que tienen órdenes superiores. Los métodos de orden superior son los algoritmos numéricos más comunes escritos profesionalmente.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 7.1

1. Reproduzca la figura 7.1 efectuando los siguientes cálculos:

(a) Resuelva el problema de valor inicial $dy/dt = -2ty^2$, $y(0) = 1$.

(b) Dado el intervalo $0 \leq t \leq 2$ y $n = 20$, calcule la aproximación de Euler y_{20} a $y(2)$. (Revise de nuevo sus cálculos comparando sus resultados con los que se proporcionaron al principio de la sección.)

(c) Calcule el error total e_{20} implicado en su aproximación.

(d) Repita los cálculos en los incisos (b) y (c) usando $n = 1\,000$, $2\,000$, hasta $6\,000$.

(e) Si su computadora tiene capacidad para hacerlo, calcule e_n para valores intermedios adicionales de n. (La figura 7.1 fue elaborada con n variando de 100 a 6 000 en pasos de 100.)

(f) Algunos sistemas matemáticos para computadora pueden determinar el mejor ajuste de estos datos para una función de la forma K/n. Si su computadora puede hacerlo, calcule el valor de K más conveniente para este problema de valor inicial. Trace los datos y la gráfica de K/n sobre los mismos ejes.

En los ejercicios 2-5, repita los pasos en el ejercicio 1 para llegar a gráficas como las de las figuras 7.1 y 7.2 para el problema de valor inicial e intervalo especificado.

2. $\dfrac{dy}{dt} = 1 - y, \quad y(0) = 0, \quad 0 \le t \le 1$

3. $\dfrac{dy}{dt} = ty, \quad y(0) = 1, \quad 0 \le t \le \sqrt{2}$

4. $\dfrac{dy}{dt} = -y^2, \quad y(0) = 1/2, \quad 0 \le t \le 2$

5. $\dfrac{dy}{dt} = 1 - t + 3y, \quad y(0) = 1, \quad 0 \le t \le 1$

6. En esta sección establecemos que el error e_{2000} es 0.000063 para la aproximación de Euler al problema de valor inicial $dy/dt = -2ty^2$, $y(0) = 1$ sobre el intervalo $0 \le t \le 2$. Estime cuántos pasos n son necesarios para obtener una aproximación y_n que tenga un error e_n no mayor que 0.000001.

7. Reproduzca la figura 7.6 efectuando los siguientes cálculos:
   (a) Calcule las expresiones

$$M_1 = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f(t, y) \quad \text{y} \quad M_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$$

   para $f(t, y) = -2ty^2$.

   (b) Dado el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = -2ty^2, \quad y(0) = 1,$$

   el intervalo $0 \le t \le 2$ y $n = 100$ pasos, determine el punto (t_1, y_1) que corresponde al primer paso del método de Euler. Evalúe la cantidad M_1 en el punto $(t_0 + \Delta t/2, (y_0 + y_1)/2)$, y utilice este valor para estimar el error e_1. ¿Cómo se compara su estimación con el error verdadero e_1?

   (c) Calcule el punto (t_2, y_2) que corresponde al segundo paso del método de Euler. Evalúe M_1 en el punto $(t_1 + \Delta t/2, (y_1 + y_2)/2)$ y M_2 en el punto $(t_1, (y_1 + y_2)/2)$. Use esos valores para estimar el error e_2. ¿Cómo se compara su estimación con el error verdadero e_2?

   (d) Repita el inciso (c) para los 98 pasos restantes.

   (e) Haga dos gráficas, una que grafique los errores verdaderos e_k *versus* k y otra para el error estimado *versus* k.

En los ejercicios 8-9, repita los incisos (b) al (d) del ejercicio 7 para estimar los errores e_k para el problema de valor inicial e intervalo especificado. ¿Por qué no pedimos una comparación de esta estimación de e_k con el valor verdadero de e_k?

8. $\dfrac{dy}{dt} = t - y^3, \quad y(0) = 1, \quad 0 \le t \le 1$

9. $\dfrac{dy}{dt} = \operatorname{sen} ty, \quad y(0) = 3, \quad 0 \le t \le 3$

10. Usando sus conocimientos de cálculo, demuestre que $1 + \alpha < e^{\alpha}$ si $\alpha > 0$.

11. En este ejercicio obtenemos los límites teóricos mencionados en la sección. Sea R un rectángulo $\{(t, y) \mid a \leq t \leq b, c \leq y \leq d\}$ en el plano t-y, suponga que $f(t, y)$ es continuamente diferenciable sobre R. Dado un problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

y un intervalo $t_0 \leq t \leq t_n$ tal que el punto (t_0, y_0) esté en R y $t_n \leq b$, entonces podemos acotar el error e_n implícito en la aproximación de Euler suponiendo que todos los valores aproximados de Euler $y_1, y_2, \ldots, y_n$ se encuentran entre c y d. Para hacerlo así,

$$M_1 = \text{máx} \left| \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f \right| \text{ sobre } R$$

y sea

$$M_2 = \text{máx} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \text{ sobre } R.$$

(a) Demuestre que

$$e_1 \leq M_1 \frac{(\Delta t)^2}{2}.$$

(b) Compruebe que

$$e_2 \leq e_1 + M_2 e_1 \Delta t + M_1 \frac{(\Delta t)^2}{2}$$

y dé su interpretación acerca de cada uno de esos tres términos.

(c) Explique por qué

$$e_{k+1} \leq (1 + M_2 \Delta t) e_k + M_1 \frac{(\Delta t)^2}{2}.$$

(d) Sea $K_1 = 1 + M_2 \Delta t$ y $K_2 = M_1 (\Delta t)^2 / 2$. Demuestre que

$$e_3 \leq (K_1^2 + K_1 + 1) K_2.$$

(e) Confirme que

$$e_n \leq \left(K_1^{n-1} + K_1^{n-2} + \cdots + K_1 + 1 \right) K_2.$$

(f) Explique por qué

$$K_1^{n-1} + K_1^{n-2} + \cdots + K_1 + 1 = \frac{K_1^n - 1}{K_1 - 1},$$

y entonces

$$e_n \leq \left(\frac{K_1^n - 1}{K_1 - 1} \right) K_2.$$

(g) Usando las definiciones de K_1 y K_2, compruebe que

$$e_n \leq \frac{M_1}{2M_2} \left((1 + M_2 \Delta t)^n - 1 \right) \Delta t.$$

(h) Use el resultado del ejercicio 10 para resumir que

$$e_n \leq \frac{M_1}{2M_2}\left(e^{(M_2 \Delta t)n} - 1\right)\Delta t.$$

(i) Finalmente, concluya que

$$e_n \leq \frac{M_1}{2M_2}\left(e^{M_2(t_n - t_0)} - 1\right)\Delta t.$$

(j) Explique por qué esto justifica la desigualdad $e_n \leq C \cdot \Delta t$ dada en esta sección.

(k) ¿De qué manera es diferente este límite para el error total con respecto de las "estimaciones" mostradas en la figura 7.6 y calculadas en los ejercicios 7-9?

12. Dado el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = -2ty^2, \quad y(0) = 1,$$

y el intervalo $0 \leq t \leq 2$, determine el límite teórico sobre e_n dado por los resultados del ejercicio 11 como sigue:

(a) Sea R el rectángulo $\{(t, y) \mid 0 \leq t \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$. Defina los valores máximos para M_1 y M_2 sobre R.

(b) Usando los resultados del ejercicio 11, obtenga la constante C para la cual se cumple la desigualdad $e_n \leq C \cdot \Delta t$.

(c) Con el valor de C determinado en el inciso (b), encuentre K tal que $e_n \leq K/n$.

(d) Explique por qué cree que esas dos estimaciones son tan conservadoras en comparación con lo que sabemos de los cálculos dados al principio de la sección.

7.2 CÓMO MEJORAR EL MÉTODO DE EULER

El método de Euler es un algoritmo numérico conveniente desde muchos puntos de vista. Es fácil de entender y llevar a cabo. Sin embargo, para trabajos numéricos donde es esencial un alto grado de exactitud, el método de Euler no es el algoritmo más adecuado. Existen algoritmos que son usualmente más precisos y requieren menos cálculos para alcanzar esa exactitud. En esta sección y en la siguiente presentaremos dos de ellos para ilustrar cómo podemos deducir e implementar algoritmos más exactos.

Algoritmos de orden superior

Como mencionamos en la última sección, podemos interpretar el método de Euler en términos de la aproximación de Taylor. Dada una solución al problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

entonces su serie de Taylor

$$y(t_1) = y_0 + y'(t_0)\Delta t + \frac{y''(t_0)}{2}(\Delta t)^2 + \ldots$$

puede reescribirse como

$$y(t_1) = y_0 + f(t_0, y_0)\Delta t + \frac{y''(t_0)}{2}(\Delta t)^2 + \dots.$$

El método de Euler puede interpretarse como la aproximación que resulta de truncar esta serie en el término lineal. Es decir,

$$y(t_1) \approx y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)\Delta t.$$

Una manera de mejorar la exactitud del método de Euler es usar más términos de la serie de Taylor. En vez de truncar en el término lineal, incluimos el término cuadrático y obtenemos una aproximación más exacta. En otras palabras, podemos aproximar $y(t_1)$ por una nueva y_1 donde

$$y(t_1) \approx y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)\Delta t + \frac{y''(t_0)}{2}(\Delta t)^2.$$

Para hacerlo necesitamos conocer la segunda derivada $y''(t_0)$ de la solución. La única información que tenemos sobre la solución y es que satisface la ecuación diferencial $dy/dt = f(t, y)$. Podemos diferenciar ambos lados para obtener una expresión para $y''(t_0)$, es decir

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f(t, y).\end{aligned}$$

En principio no hay problema en efectuar este cálculo y usar los resultados para implementar un algoritmo numérico que sea más exacto que el método de Euler. En la práctica esto rara vez se hace porque el cálculo requiere el conocimiento de las derivadas parciales de f, y si quisiéramos programar una "caja negra" en un lenguaje tradicional de computación como Fortran o C, tendríamos que proporcionar esas derivadas parciales así como la función original f de la ecuación diferencial. Actualmente existen lenguajes de computación que pueden calcular esas derivadas, por lo que esta restricción ya no constituye un problema. Sin embargo, se han desarrollado algoritmos muy ingeniosos que proporcionan esquemas de aproximación con una exactitud equivalente, sin utilizar las derivadas parciales de f, los cuales son comúnmente usados. En ellos centraremos nuestra atención en este capítulo.

Aproximación e integración numéricas

Para entender cómo se desarrollaron esos procedimientos, es útil pensar acerca del método de Euler en términos de los procedimientos de integración numérica que se usan para aproximar la integral definida. Por el teorema fundamental del cálculo, sabemos que la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

satisface la ecuación

$$y(t_1) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(\tau, y(\tau))\, d\tau$$

porque $dy/dt = f(t, y)$. En otras palabras,

$$y(t_1) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f(\tau, y(\tau))\, d\tau.$$

Ésta es la "ecuación integral" equivalente a la ecuación diferencial original. En el método de Euler aproximamos esta diferencia por el paso

$$y_1 - y_0 = f(t_0, y_0)\,\Delta t.$$

Geométricamente, ésta es realmente la aproximación de la integral (es decir, el "área" bajo la gráfica de $f(t, y(t))$, por medio del área de un rectángulo con altura $f(t_0, y_0)$ y ancho Δt (vea la figura 7.7). Empleamos el valor de la derivada $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$ en el punto extremo izquierdo del intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$ para aproximar el valor de $y(t_1)$. El método de Euler es entonces análogo a determinar la aproximación de una integral de Riemann por sumas izquierdas.

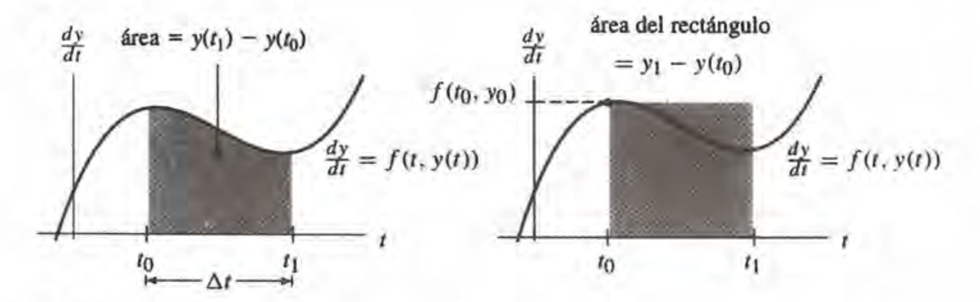


Figura 7.7
El primer paso del método de Euler interpretado como una aproximación de Riemann a un área.

Recordará que en cálculo las sumas izquierdas de Riemann convergen en el valor de la integral cuando el número de subdivisiones crece, pero que hay mejores maneras de aproximarla. Una simple variación de la aproximación izquierda es la trapezoidal. En este caso tratamos el área bajo la gráfica de $f(t, y(t))$ por medio de trapezoides. El ancho de cada trapezoide es Δt y las alturas están dadas por los valores $f(t_0, y(t_0))$, $f(t_1, y(t_1))$, $f(t_2, y(t_2))$, etc. (vea la figura 7.8). El área del k-ésimo trapezoide es

$$\left(\frac{f(t_{k-1}, y(t_{k-1})) + f(t_k, y(t_k))}{2}\right)\Delta t.$$

Se infiere que

$$y(t_k) \approx y(t_{k-1}) + \left(\frac{f(t_{k-1}, y(t_{k-1})) + f(t_k, y(t_k))}{2}\right)\Delta t.$$

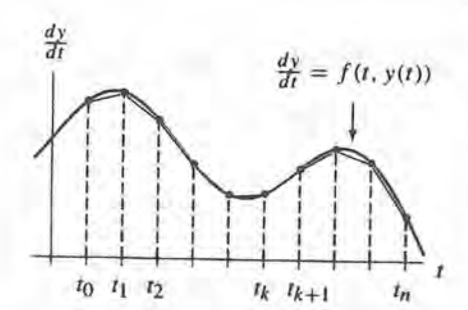


Figura 7.8
Aproximación (trapezoidal) del área bajo la gráfica de $dy/dt = f(t, y(t))$.

Esta fórmula para $y(t_k)$ sugiere el esquema de aproximación

$$y_k = y_{k-1} + \left(\frac{f(t_{k-1}, y_{k-1}) + f(t_k, y_k)}{2} \right) \Delta t.$$

Sólo hay una cosa errónea con este esquema: el número y_k aparece en ambos lados de la ecuación. En otras palabras, necesitaríamos conocer y_k para calcular y_k. (Pero si conociéramos su valor no requeriríamos la fórmula.) Tenemos que deshacernos de la y_k en el lado derecho del esquema de aproximación.

Una manera de convertir esta ecuación en un esquema útil de aproximación es reemplazar la y_k en el lado derecho por algún otro valor razonable. En este momento, la única manera que conocemos para aproximar y_k es el método de Euler, y ése es el que aplicaremos. En otras palabras, sustituimos y_k en el lado derecho por la aproximación de Euler para y_k. Esto da el esquema

$$y_k = y_{k-1} + \left(\frac{f(t_{k-1}, y_{k-1}) + f(t_k, y_{k-1} + f(t_{k-1}, y_{k-1})\Delta t)}{2} \right) \Delta t.$$

Esta complicada fórmula puede entenderse más fácilmente si la vemos como una secuencia de pasos.

Método de Euler mejorado

Dada la condición inicial $y(t_0) = y_0$ y el tamaño de paso Δt, calcule el punto (t_{k+1}, y_{k+1}) a partir de (t_k, y_k):

1. Use la ecuación diferencial para determinar la pendiente $m_k = f(t_k, y_k)$.
2. Calcule el valor $\tilde{y}_{k+1}$ que resulta de la aplicación del método de Euler. Es decir,
$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k)\Delta t.$$
3. Calcule $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ y use la ecuación diferencial para calcular la pendiente $n_k = f(t_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})$ en el punto $(t_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})$.
4. Calcule y_{k+1} por medio de
$$y_{k+1} = y_k + \left(\frac{m_k + n_k}{2} \right) \Delta t.$$

Método de Euler mejorado para $f(t, y) = -2ty^2$, $y(0) = 1$

En la sección 1.4 aplicamos el método de Euler al problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = -2ty^2, \quad y(0) = 1,$$

y en la última sección usamos este ejemplo para ilustrar los errores más comunes implícitos en el método de Euler. Ahora compararemos nuestros resultados previos con los obtenidos en el método de Euler mejorado.

Comenzamos con $\Delta t = 0.1$. En este ejemplo, la función $f(t, y) = -2ty^2$ y su valor en la condición inicial es $f(0, 1) = 0$. Por tanto, la pendiente inicial es $m_0 = 0$. Un paso del método de Euler da el punto $(t_1, \tilde{y}_1) = (0.1, 1.0)$. El método mejorado usa el valor de $f(t, y)$ en este nuevo punto para ayudar a determinar el valor de y_1. Dicho de otra manera, calculamos $n_0 = f(0.1, 1.0) = -0.2$ y promediamos esta pendiente con m_0 a fin de obtener la pendiente que usamos para calcular y_1. En este caso, el promedio es

$$\frac{m_0 + n_0}{2} = \frac{0.0 - 0.2}{2} = -0.1.$$

Por consiguiente, la emplearemos para calcular y_1, con lo que tenemos

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + (-0.1)\Delta t \\ &= 1.0 + (-0.1)(0.1) = 0.99. \end{aligned}$$

Antes de calcular manualmente otro paso, compararemos este resultado con el que proporciona el método de Euler. En la condición inicial, la ecuación diferencial da el valor 0 para la pendiente. Por tanto, el método de Euler supone que la pendiente sobre el subintervalo $0 \leq t \leq 0.1$ desaparece y entonces $y_1 = y_0 = 1.0$. Por otra parte, el método de Euler mejorado considera la pendiente en el punto (0.1, 1.0) y en (0.0, 1.0). Cuando ambas se promedian, obtenemos un (pequeño) valor negativo para la pendiente por usarse sobre el subintervalo $0 \leq t \leq 0.1$. Tiene sentido emplear este promedio, puesto que a partir de la ecuación diferencial podemos observar que $f(t, y) = -2ty^2$ es negativa para toda t diferente de cero en todo el subintervalo. Por supuesto, no hay razón para creer que el promedio de ambas pendientes sea una mejor selección que la pendiente del método de Euler, pero es una buena idea ensayar este promedio.

El proceso es básicamente el mismo para el siguiente paso. El primer paso dio el punto $(t_1, y_1) = (0.1, 0.99)$. En consecuencia, usamos la ecuación diferencial para producir la pendiente que emplea el método de Euler. Tenemos

$$m_1 = f(t_1, y_1) = f(0.1, 0.99) = -0.19602.$$

Entonces, comenzando en (0.1, 0.99), tomamos un paso del método de Euler por medio de

$$\begin{aligned} \tilde{y}_2 &= y_1 + m_1\,\Delta t \\ &= 0.99 + (-0.19602)(0.1) \\ &= 0.970398. \end{aligned}$$

Así, para nuestra pendiente n_1, calculamos $n_1 = f(t_2, \tilde{y}_2) = -0.37669$. Promediamos esas dos pendientes y obtenemos

$$\frac{m_1 + n_1}{2} = \frac{(-0.19602) + (-0.37669)}{2} = -0.286344.$$

Con este promedio podemos determinar el segundo paso

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + (-0.286344)\,\Delta t \\ &= 0.99 + (-0.286344)(0.1) \\ &= 0.961366. \end{aligned}$$

Por el momento, son suficientes los cálculos a mano. Con la computadora obtenemos los resultados mostrados en la tabla 7.1.

Tabla 7.1
Método de Euler mejorado para $dy/dt = -2ty^2$ con $\Delta t = 0.1$

k	t_k	y_k
0	0	1
1	0.1	0.99
2	0.2	0.961366
3	0.3	0.917246
⋮	⋮	⋮
19	1.9	0.217670
20	2.0	0.200695

Recuerde que conocemos la solución exacta $y(t) = 1/(1 + t^2)$ para este problema y su valor en $t = 2$ es $y(2) = 0.2$. El error en este cálculo es entonces

$$|0.2 - 0.200695| = 0.000695.$$

Cuando usamos el método de Euler con el mismo tamaño de paso, obtuvimos la aproximación $y(2) \approx 0.193342$. El error en aquella aproximación fue

$$|0.2 - 0.193342| = 0.00658.$$

Note que el método de Euler mejorado es aproximadamente diez veces más exacto que el método de Euler en este ejemplo.

Costo

Para un tamaño de paso dado, usar el método de Euler mejorado en lugar del método de Euler simple conduce a una mejor exactitud. Lo malo es que cada paso del método mejorado implica dos pasos, el doble de aritmética, del método simple. El primer paso se utiliza para obtener el valor de $\tilde{y}_{k+1}$, y con el segundo se calcula y_{k+1}.

En el ejemplo anterior, ganamos diez veces en exactitud al usar el método de Euler mejorado respecto al método de Euler al costo de duplicar la aritmética. Ésta es una buena inversión (particularmente si una computadora lleva a cabo las operaciones.)

El orden del método de Euler mejorado

En la sección anterior vimos que el método de Euler tiene orden 1. En otras palabras, el error es poco más o menos proporcional al recíproco del número de subdivisiones empleadas en la aproximación. Para comparar los dos métodos, necesitamos saber cómo se comporta la exactitud del método de Euler mejorado en función del tamaño del paso. Igual que en la sección previa, consideramos el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = -2ty^2, \quad y(0) = 1,$$

cuya solución exacta es $y(t) = 1/(1 + t^2)$. Usando la computadora aproximamos el valor $y(2) = 0.2$ dos veces. Primero lo calculamos con 1 000 pasos. El error e_{1000} en esta aproximación es

$$e_{1000} = 2.59 \times 10^{-7}.$$

Luego repetimos el cálculo utilizando el doble de pasos. En este caso obtenemos una respuesta más exacta con un error de

$$e_{2000} = 6.48 \times 10^{-8}.$$

Estos errores definitivamente son pequeños, pero para tener una idea de cómo depende este método del tamaño del paso, calculamos la razón

$$\frac{e_{1000}}{e_{2000}} \approx 4.003.$$

Vemos que si duplicamos el número de pasos (es decir, dividimos entre dos el tamaño del paso), disminuimos el error por un factor de 4 ($= 2^2$). En consecuencia, decimos que el método de Euler mejorado es un método numérico de orden 2.

Cuando empleamos estimaciones como las que estudiamos en la última sección, puede demostrarse que, dados límites apropiados sobre f y sus derivadas, el error para el método de Euler mejorado se comporta como una función cuadrática respecto al tamaño de su paso. Es decir, el error en una aproximación dada usando el método de Euler mejorado es proporcional a $(\Delta t)^2$. Como Δt es simplemente la longitud del intervalo t considerado dividido entre el número de pasos n, también podemos expresar el error como

$$e_n = \frac{K}{n^2}.$$

para alguna constante K. En la figura 7.9 graficamos el error como una función del número de pasos para el método de Euler simple y para el mejorado. Esta gráfica ilustra la ventaja de un procedimiento de segundo orden sobre uno de primer orden.

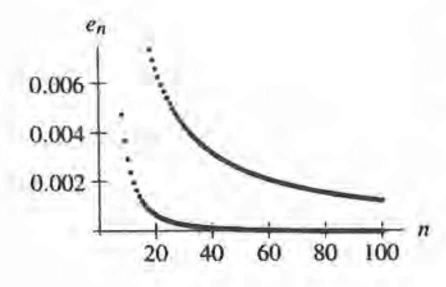


Figura 7.9
Los errores relativos al método de Euler y al método de Euler mejorado para el problema de valor inicial $dy/dt = -2ty^2$, $y(0) = 1$, sobre el intervalo $0 \leq t \leq 2$.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 7.2

En los ejercicios 1-8, usamos el método de Euler mejorado con el número n dado de pasos para aproximar la solución al problema de valor inicial especificado. Su respuesta incluirá una tabla de valores aproximados de la variable dependiente. También debe trazar la gráfica de la solución aproximada. Estos problemas de valor inicial son los mismos que los ejercicios 1-8 de la sección 1.4. Compare las gráficas que obtenga con el método de Euler mejorado contra las que obtenga con el método simple. Si su computadora cuenta con una rutina impresa para la solución numérica de ecuaciones diferenciales, compare esas gráficas con las de su computadora.

1. $\dfrac{dy}{dt} = 2y + 1, \quad y(0) = 3, \quad 0 \le t \le 2, \quad n = 4$

2. $\dfrac{dy}{dt} = t - y^2, \quad y(0) = 1, \quad 0 \le t \le 1, \quad n = 4$

3. $\dfrac{dy}{dt} = y^2 - 2y + 1, \quad y(0) = 2, \quad 0 \le t \le 2, \quad n = 4$

4. $\dfrac{dy}{dt} = \operatorname{sen} y, \quad y(0) = 1, \quad 0 \le t \le 3, \quad n = 6$

5. $\dfrac{dw}{dt} = (3 - w)(w + 1), \quad w(0) = 4, \quad 0 \le t \le 5, \quad n = 5$

6. $\dfrac{dw}{dt} = (3 - w)(w + 1), \quad w(0) = 0, \quad 0 \le t \le 5, \quad n = 10$

7. $\dfrac{dy}{dt} = e^{2/y}, \quad y(0) = 2, \quad 0 \le t \le 2, \quad n = 4$

8. $\dfrac{dy}{dt} = e^{2/y}, \quad y(1) = 2, \quad 1 \le t \le 3, \quad n = 4$

En los ejercicios 9-12, use el método de Euler mejorado para aproximar la solución al problema de valor inicial sobre el intervalo especificado. Para cada problema de valor inicial,

(a) determine una solución analítica (vea los ejercicios 2-5 en la sección 7.1); y

(b) usando el método de Euler mejorado con $n = 4$, calcule un valor aproximado y_4 y el error total e_4.

(c) ¿Cuántos pasos del método de Euler mejorado esperaría utilizar para obtener una aproximación en la que $e_n \le 0.0001$?

9. $\dfrac{dy}{dt} = 1 - y, \quad y(0) = 0, \quad 0 \le t \le 1$

10. $\dfrac{dy}{dt} = ty, \quad y(0) = 1, \quad 0 \le t \le \sqrt{2}$

11. $\dfrac{dy}{dt} = -y^2, \quad y(0) = 1/2, \quad 0 \le t \le 2$

12. $\dfrac{dy}{dt} = 1 - t + 3y, \quad y(0) = 1, \quad 0 \le t \le 1$

13. En esta sección mostramos que el error total e_{20} en la aproximación del problema de valor inicial $dy/dt = -2ty^2$, $y(0) = 1$, sobre el intervalo $0 \leq t \leq 2$ es

$$e_{20} = 0.000695.$$

(a) ¿Cuántos pasos deberá usar para obtener un valor aproximado y_n que tenga un error asociado e_n no mayor que 0.0001?

(b) Calcule ese valor aproximado y_n.

(c) Determine el error total en ese caso.

En los ejercicios 14-17, trace una gráfica como la de la figura 7.9 para el problema de valor inicial sobre el intervalo especificado. Vea las instrucciones al ejercicio 1 en la sección 7.1 para más detalles. Sin embargo, restrinja los valores de n a números en el intervalo $10 \leq n \leq 100$.

14. $\dfrac{dy}{dt} = 1 - y, \quad y(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$

15. $\dfrac{dy}{dt} = ty, \quad y(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq \sqrt{2}$

16. $\dfrac{dy}{dt} = -y^2, \quad y(0) = 1/2, \quad 0 \leq t \leq 2$

17. $\dfrac{dy}{dt} = 1 - t + 3y, \quad y(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1$

7.3 EL MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

El método de Euler mejorado nos muestra que si modificamos inteligentemente el método de Euler y efectuamos un poco más de trabajo en cada paso, podemos conseguir una aproximación mucho más exacta para nuestra solución. Esta observación nos hace preguntarnos si existe un método "estándar" para la aproximación numérica de soluciones de ecuaciones diferenciales. Queremos un algoritmo que minimice el número de cálculos por efectuar mientras se maximiza la exactitud.

De hecho, para la mayor parte de los fines prácticos existe este algoritmo. Se llama el método (de cuarto orden) de Runge-Kutta. Se llama así en honor de los dos matemáticos alemanes que desarrollaron el método hace aproximadamente 100 años. Existen algoritmos más complejos requeridos para problemas especializados, pero el de Runge-Kutta es a menudo el método numérico usado para la aproximación numérica de soluciones.

El método de Runge-Kutta

En el método de Euler mejorado aplicado a la ecuación diferencial $dy/dt = f(t, y)$, usamos un promedio de dos pendientes para determinar cada valor. En otras palabras, para calcular y_k a partir de y_{k-1}, empleamos el promedio de valores del lado derecho $f(t, y)$ en $t = t_{k-1}$ y $t = t_k$. Por analogía con la integración numérica, el método de Euler mejorado es similar a la regla trapezoidal.

Para la integración numérica existen algoritmos que por lo general son más eficientes que la regla trapezoidal. La regla de Simpson aproxima el área bajo la gráfica usando la interpolación parabólica y permite una mejor estimación para la integral. De hecho, la

regla de Simpson puede interpretarse como un promedio ponderado de valores donde se da una importancia doble a los valores de la función en los puntos medios de los subintervalos, en comparación a la que se otorga a los puntos extremos. El método de Runge-Kutta es similar a la regla de Simpson en tanto que considera un promedio ponderado.

Empezaremos con una descripción del algoritmo y luego ilustraremos su implementación y exactitud utilizando el ejemplo de las secciones previas. Remítase a la figura 7.10 para ver cómo se obtienen las diversas pendientes usadas en el procedimiento.

Para calcular el valor y_{k+1} a partir de y_k, empleamos cuatro pendientes dadas por la función $f(t, y)$ que define la ecuación diferencial. Esas pendientes se denominan m_k, n_k, q_k y p_k. También necesitamos diversas variables intermedias. El control de la nomenclatura resulta en este caso más delicado que en el método de Euler mejorado, por lo que esas variables adquieren muchos tipos diferentes de signos de acentuación.

Las cuatro pendientes se determinan sucesivamente como sigue:

1. La primera pendiente m_k se calcula igual que en el método de Euler; es decir, $m_k = f(t_k, y_k)$.
2. En el método de Euler mejorado usamos m_k para producir una segunda pendiente correspondiente a un punto con $t = t_{k+1} = t_k + \Delta t$. El método de Runge-Kutta hace casi lo mismo excepto que va sólo a la mitad del camino a lo largo del eje t hasta

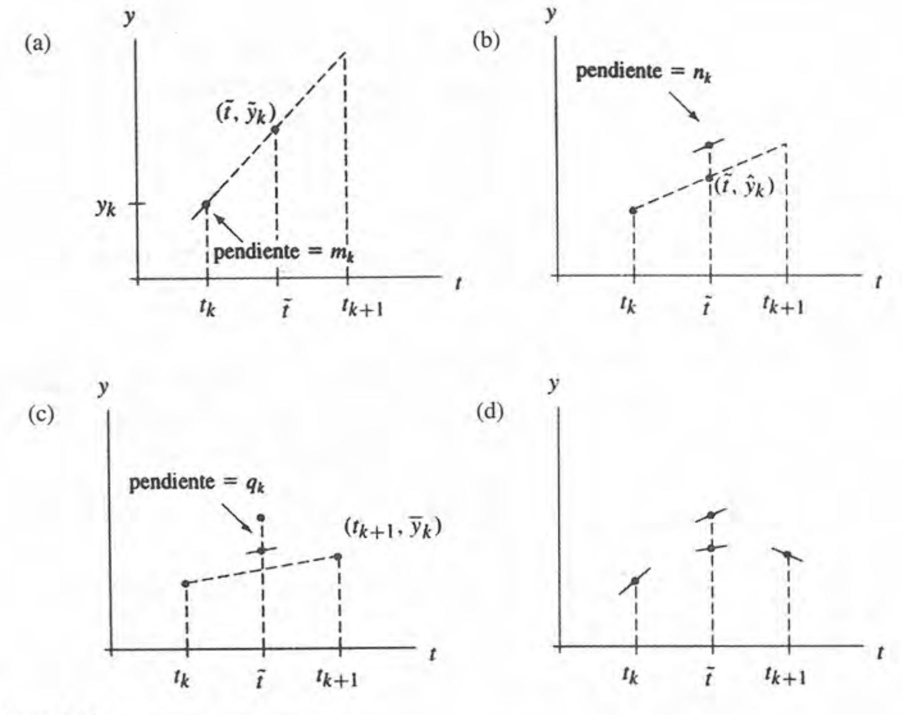


Figura 7.10
La parte (d) ilustra las cuatro pendientes usadas en el método de Runge-Kutta. Las partes (a)-(c) ilustran cómo se determinan los puntos en los que se evalúan las pendientes.

$\tilde{t} = t_k + \Delta t/2$. Esto significa que utilizamos m_k para producir un punto $\tilde{t}, \tilde{y}_k$, donde

$$\tilde{y}_k = y_k + m_k \frac{\Delta t}{2}$$

[vea la figura 7.10(a)]. Una vez que hemos determinado este punto, usamos la función $f(t, y)$ para determinar la segunda pendiente n_k por medio de

$$n_k = f(\tilde{t}, \tilde{y}_k).$$

3. Ahora repetimos el paso previo del algoritmo donde empleamos la pendiente n_k en lugar de m_k. En otras palabras, pasamos de (t_k, y_k) a la línea $t = \tilde{t}$ a lo largo de una línea de pendiente n_k. Obtenemos entonces un nuevo número $\hat{y}_k$, donde

$$\hat{y}_k = y_k + n_k \frac{\Delta t}{2}$$

[vea la figura 7.10(b)]. Dado este punto sobre la línea $t = \tilde{t}$, calculamos la tercera pendiente q_k mediante

$$q_k = f(\tilde{t}, \hat{y}_k).$$

4. Finalmente, obtenemos nuestra cuarta pendiente usando q_k para producir un punto sobre la línea $t = t_{k+1}$. Obtenemos

$$\overline{y}_k = y_k + q_k \Delta t$$

[vea la figura 7.10(c)]. Una vez que tenemos este cuarto punto, calculamos ahí la pendiente con

$$p_k = f(t_{k+1}, \overline{y}_k).$$

5. Ahora que tenemos las cuatro pendientes [vea la figura 7.10(d)], tomamos un promedio ponderado y con éste calculamos el siguiente paso. Ponderamos al doble cada una de las pendientes que provienen de los puntos con $t = \tilde{t}$, respecto a las otras dos pendientes. En otras palabras, nuestro promedio ponderado es

$$\frac{m_k + 2n_k + 2q_k + p_k}{6}.$$

Por tanto, el paso que realmente tomamos es

$$y_{k+1} = y_k + \left(\frac{m_k + 2n_k + 2q_k + p_k}{6} \right) \Delta t.$$

Esta expresión se ve complicada, pero funciona bien. Básicamente, las pendientes se escogen de manera que aproximamos la solución hasta términos de orden 4. Como veremos, esto nos da un algoritmo muy eficiente.

El problema de valor inicial $dy/dt = -2ty^2$, $y(0) = 1$

Ilustremos un par de pasos del algoritmo usando nuestra vieja ecuación conocida

$$\frac{dy}{dt} = -2ty^2, \quad y(0) = 1.$$

En la sección previa, aproximamos la solución a este problema de valor inicial usando el método de Euler mejorado con $\Delta t = 0.1$. Ahora emplearemos el mismo Δt con el método de Runge-Kutta.

Comenzamos con la pendiente inicial

$$m_0 = f(t_0, y_0) = f(0, 1) = 0.$$

Esta pendiente determina

$$\tilde{y}_0 = y_0 + m_0 \frac{\Delta t}{2} = 1 + 0\left(\frac{0.1}{2}\right) = 1.$$

Dado $\tilde{y}_0$ y $\tilde{t} = t_0 + \Delta t/2 = 0 + 0.05 = 0.05$, obtenemos la segunda pendiente que necesitamos por medio de

$$n_0 = f(\tilde{t}, \tilde{y}_0) = f(0.05, 1.0) = -0.1.$$

A su vez, esta pendiente determina el valor y-$\hat{y}_0$ por medio de

$$\begin{aligned}\hat{y}_0 &= y_0 + n_0 \frac{\Delta t}{2} \\ &= 1.0 + (-0.1)(0.05) \\ &= 0.995.\end{aligned}$$

Aplicando $f(t, y)$ al punto $(\tilde{t}, \hat{y}_0)$, determinamos una tercera pendiente

$$q_0 = f(\tilde{t}, \hat{y}_0) = -0.0990025,$$

y con ésta obtenemos el cuarto punto con valor y-$\overline{y}_0$ por medio de

$$\overline{y}_0 = y_0 + q_0 \Delta t = 1.0 + (-0.0990025)(0.1) = 0.9901.$$

Dado este cuarto punto, calculamos ahí la pendiente con

$$p_0 = f(t_{k+1}, \overline{y}_0) = -0.19606.$$

Ahora que tenemos esas cuatro pendientes, podemos estimar el promedio ponderado que nos permitirá calcular la pendiente que determina el primer paso. Tenemos

$$\begin{aligned}\frac{m_0 + 2n_0 + 2q_0 + p_0}{6} &= \left(\frac{0 + 2(-0.1) + 2(-0.0990025) + -0.19606}{6}\right) \\ &= -0.0990108.\end{aligned}$$

Este promedio ponderado da el primer paso

$$y_1 = y_0 - 0.0990108\,\Delta t = 1.0 + (-0.0990108)(0.1) = 0.990099.$$

(No se preocupe si trata de reproducir en su calculadora esos cálculos y obtiene usted una respuesta ligeramente diferente, puesto que aquélla puede incluir un número distinto de dígitos significativos en las operaciones y esta diferencia puede afectar un poco sus cálculos.)

Definitivamente hacer esos cálculos a mano no es la mejor manera de proceder ahora que tenemos fácil acceso a las calculadoras programables, a hojas de cálculo y a sistemas generales para hacer matemática mediante instrumentos como Maple, *Mathematica* y MATLAB. En esta sección proporcionaremos después códigos que pueden usarse en varios ambientes de computación para implementar el Runge-Kutta. No son muy complicados y usarlos es más ventajoso que realizarlos manualmente.

Al calcular 20 pasos con el método de Runge-Kutta se obtienen los resultados mostrados en la tabla 7.2. Observe que la aproximación de $y(2) = 0.2$ es muy buena, en especial si consideramos el tamaño relativamente grande de paso que hemos utilizado. Compare esos resultados con los encontrados en la tabla 7.1. El error con el método de Euler mejorado fue de 0.000658, mientras que aquí es de 0.000001. Emplear el método de Runge-Kutta en este ejemplo mejora la exactitud por un factor de 658. (En realidad, la mejora es más bien del orden de 1000, pero esto no es claro en la tabla 7.2 porque mostramos los resultados sólo con seis dígitos significativos.)

Tabla 7.2
Método de Runge-Kutta para $dy/dt = -2ty^2$ con $\Delta t = 0.1$

k	t_k	y_k
0	0	1
1	0.1	0.990099
2	0.2	0.961538
3	0.3	0.917431
⋮	⋮	⋮
19	1.9	0.216920
20	2.0	0.200001

El orden del método de Runge-Kutta

El método de Euler tiene orden 1 y el método de Euler mejorado tiene orden 2. Veamos si estamos en lo cierto acerca del orden del Runge-Kutta. Para encontrar el orden del método de Runge-Kutta, recordamos que la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = -2ty^2, \quad y(0) = 1$$

es $y(t) = 1/(1 + t^2)$. Si aproximamos esta solución sobre el intervalo $0 \leq t \leq 2$ usando el método de Runge-Kutta con diez pasos, encontramos que el error en esta aproximación es

$$e_{10} = 1.095 \times 10^{-5},$$

y si aproximamos la solución empleando 20 pasos, el error es de

$$e_{20} = 6.541 \times 10^{-7}.$$

La razón

$$\frac{e_{10}}{e_{20}} = 16.75$$

indica que si duplicamos el número de pasos, el error mejora aproximadamente por un factor de 16 ($= 2^4$). Esto es lo que esperamos de un procedimiento numérico que tiene orden 4.

Programación del Runge-Kutta

Aunque el método de Runge-Kutta al principio parece algo complicado, realmente no es difícil de programar. Aquí proporcionamos tres manera de implementarlo: una para una

calculadora gráfica, otra para *Mathematica* y otra más en el lenguaje de programación C. Algunos de los ejercicios al final de esta sección requieren que el método se ejecute con cualquier medio disponible. Esas tres implementaciones le darán alguna idea de cómo proceder.

El calculador graficador TI

Este código supone que el valor t inicial está almacenado en A, el valor final en B, que el número de pasos está en N, que el valor y está almacenado en Y y que $Y_1 = f(X, Y)$. El código usa X para simbolizar t, y Y para representar y en nuestra notación.

```
:(B - A)/N -> H
:A -> X
:0 -> I
:Lbl 1
:Disp Y
:Pause
:Y -> Z
:Y1 -> C
:X + H/2 -> X
:Z + C*H/2 -> Y
:Y1 -> D
:Z + D*H/2 -> Y
:Y1 -> E
:X + H/2 -> X
:Z + E*H -> Y
:Y1 -> F
:Z + (C + 2*D + 2*E + F)*H/6 -> Y
:IS>(I,N)
:Goto 1
```

Código *Mathematica*

El código *Mathematica* es más compacto, pero para usarlo en forma eficiente se requiere el conocimiento de comandos como el `ListPlot` y el `NestList`. Comenzaremos definiendo una función que toma un paso del método de Runge-Kutta.

```
RungeKuttaStep[f_, vars_, {tk_, yk_}, deltat_]:=
 Module[{k1, k2, k3, k4, tmiddle, tend},
    k1 = f /. {vars[[1]] -> tk, vars[[2]] -> yk};
    tmiddle = tk + deltat/2;
    k2 = f /. {vars[[1]] -> tmiddle,
               vars[[2]] -> yk + k1 deltat/2};
    k3 = f /. {vars[[1]] -> tmiddle,
               vars[[2]] -> yk + k2 deltat/2};
    tend = tk + deltat;
    k4 = f /. {vars[[1]] -> tend,
               vars[[2]] -> yk + k3 deltat};
    {tend, yk + (k1 + 2 k2 + 2 k3 + k4) deltat/6}
    ]
```

Por ejemplo, el comando

```
RungeKuttaStep[-2 t y^2, {t, y}, {0,1}, 0.1]
```

devuelve

```
{0.1, 0.990099}
```

Luego aproximamos la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = -2ty^2, \quad y(0) = 1$$

sobre el intervalo $0 \leq t \leq 2$ usando 20 pasos por el comando

```
RKresults =
    NestList[RungeKuttaStep[-2 t y^2, {t, y}, #, 0.1]&,
             {0, 1}, 20]
```

Este comando almacena los puntos resultantes en la variable `RKresults`, y por tanto podemos graficar la solución aproximada usando `ListPlot`. Por ejemplo,

```
ListPlot[RKresults,
      PlotJoined -> True,
      AxesOrigin -> {0,0}]
```

Código C para el Runge-Kutta

El siguiente es un programa C que aplica el método de Runge-Kutta al problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = -2ty^2, \quad y(0) = 1.$$

Efectúa la aproximación sobre el intervalo $0 \leq t \leq 2$ con 20 pasos. Deben cambiarse los valores de `T0`, `Tn`, `NUMSTEPS`, y `Y0` en la parte superior de la definición de $f(t, y)$, en el enunciado de retorno, para aplicar el código a un problema diferente de valor inicial.

```
/*
                    Runge-Kutta approximation of
                              dy/dt = f(t,y)
*/

/* need to set these values and the function f(t,y) below
   before compilation */

#define T0 0.0
#define Tn 2.0
#define NUMSTEPS 20
#define Y0 1.0

#include <stdio.h>
#include <math.h>
```

```
/*
   this subroutine contains the formula for the
   first-order differential equation,
   that is, dy/dt = f(t,y)
*/

double f(t,y)
     double t,y;
{
  return(-2.0 * t * y * y);
}


main()
{
  double tk = T0, tmid, yk = Y0,
        k1, k2, k3, k4,
         deltat = (double)(Tn - T0)/NUMSTEPS,
         f();

  printf("%f %f\n", tk, yk);
  while (tk < Tn){
   k1 = f(tk, yk);
   tmid = tk + deltat/2.0;
   k2 = f(tmid, yk + k1 * deltat/2.0);
   k3 = f(tmid, yk + k2 * deltat/2.0);
   tk = tk + deltat;
   k4 = f(tk, yk + k3 * deltat);
   yk = yk + (k1 + 2.0 * k2 + 2.0 * k3 + k4) * deltat/6.0;
   printf("%f %f\n", tk, yk);
  }
}
```

El método de Runge-Kutta para sistemas

La generalización del método de Runge-Kutta hacia los sistemas de primer orden es directa si aprovechamos nuestra notación vectorial para sistemas. Una vez que tengamos implementado el Runge-Kutta, tendremos también un método eficiente para el estudio numérico de ecuaciones diferenciales de orden superior, ya que éstas pueden ser reescritas como sistemas de primer orden.

Consideremos el sistema de primer orden

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}), \quad \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0.$$

Para aplicar el método de Runge-Kutta a este sistema, necesitamos calcular cuatro vectores $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}_3$ y $\mathbf{K}_4$ en cada paso del algoritmo. Éstos son análogos a las cuatro pendientes que calculamos para ecuaciones de primer orden y se definen esencialmente de la mis-

ma manera. Cada uno de esos vectores depende también del índice k, pero no indicaremos esta dependencia para hacer más comprensibles las fórmulas. Supongamos que tenemos el punto $(t_k, \mathbf{Y}_k)$. Los vectores son entonces

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{F}(t_k, \mathbf{Y}_k)$$
$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{F}(t_k + \Delta t/2, \mathbf{Y}_k + (\Delta t/2)\mathbf{K}_1)$$
$$\mathbf{K}_3 = \mathbf{F}(t_k + \Delta t/2, \mathbf{Y}_k + (\Delta t/2)\mathbf{K}_2)$$
$$\mathbf{K}_4 = \mathbf{F}(t_k + \Delta t, \mathbf{Y}_k + \Delta t\, \mathbf{K}_3).$$

Con ellos podemos formar un promedio ponderado como en el caso de las ecuaciones de primer orden. Obtenemos el vector

$$\mathbf{K} = \left(\frac{\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4}{6}\right),$$

y utilizamos $\mathbf{K}$ para formar el paso de $(t_k, \mathbf{Y}_k)$ a

$$(t_{k+1}, \mathbf{Y}_{k+1}) = (t_k + \Delta t, \mathbf{Y}_k + \Delta t\, \mathbf{K}).$$

Si estamos trazando las curvas solución en el plano fase, entonces graficamos simplemente los puntos $\mathbf{Y}_k$.

Las figuras 7.11 y 7.12 ilustran los resultados del método de Euler *versus* el de Runge-Kutta para el sistema depredador-presa que analizamos ampliamente en la sección 2.1. Observe que aunque el método de Euler no es suficientemente exacto para captar las órbitas cerradas en el plano fase, el procedimiento de Runge-Kutta hace un buen trabajo al capturar la naturaleza periódica de este sistema.

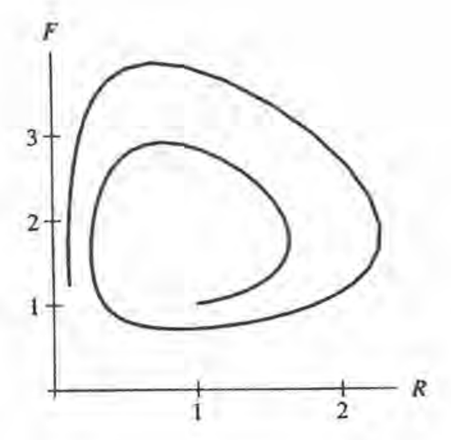


Figura 7.11
Método de Euler para la solución con condición inicial $\mathbf{Y}(0) = (1, 1)$ con $\Delta t = 0.1$ y 80 pasos para el sistema depredador-presa.

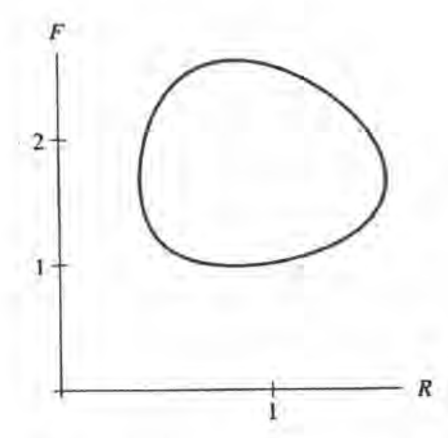


Figura 7.12
El método de Runge-Kutta aplicado a la solución con condición inicial $\mathbf{Y}(0) = (1, 1)$ con $\Delta t = 0.1$ y 80 pasos para el mismo sistema que en la figura 7.11.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 7.3

En los ejercicios 1-5 use el método de Runge-Kutta con el número n dado de pasos para aproximar la solución del problema de valor inicial especificado. Su respuesta debe incluir una tabla de valores aproximados de la variable dependiente. Trace también la gráfica de la solución aproximada. Esos problemas de valor inicial aparecen en la sección 7.2. Haga una comparación entre las gráficas que obtenga con el método de Runge-Kutta con las obtenidas con los métodos de Euler y de Euler mejorado. Si su computadora tiene una rutina impresa para la solución numérica de ecuaciones diferenciales, compare también las gráficas anteriores con las proporcionadas por la computadora.

1. $\dfrac{dy}{dt} = 2y + 1, \quad y(0) = 3, \quad 0 \le t \le 2, \quad n = 4$

2. $\dfrac{dy}{dt} = t - y^2, \quad y(0) = 1, \quad 0 \le t \le 1, \quad n = 4$

3. $\dfrac{dy}{dt} = (3 - y)(y + 1), \quad y(0) = 0, \quad 0 \le t \le 5, \quad n = 10$

4. $\dfrac{dy}{dt} = e^{2/y}, \quad y(0) = 2, \quad 0 \le t \le 2, \quad n = 4$

5. $\dfrac{dy}{dt} = e^{2/y}, \quad y(1) = 2, \quad 1 \le t \le 3, \quad n = 4$

6. Considere el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = -2ty^2, \quad y(0) = 1$$

sobre el intervalo $0 \le t \le 2$.

(a) Calcule la aproximación de Runge-Kutta para la solución con $n = 4$ pasos.

(b) Encuentre el error total e_4 asociado con esta aproximación.

(c) ¿Cuántos pasos son necesarios para aproximar la solución con un error menor de 0.0001?

7. Considere el sistema depredador-presa

$$\frac{dR}{dt} = 2R - 1.2RF$$
$$\frac{dF}{dt} = -F + 1.2RF$$

y la condición inicial $(R_0, F_0) = (1.0, 1.0)$.

(a) Calcule la aproximación de Runge-Kutta para este sistema con cinco pasos de $\Delta t = 1.0$. Grafique los resultados en el plano fase.

(b) Con ayuda de una computadora o una calculadora, repita el cálculo del inciso (a) con $\Delta t = 0.1$ y $n = 80$ pasos. Grafique el resultado en el plano fase.

(c) Usando los resultados del inciso (b), trace las gráficas $R(t)$ y $F(t)$ para esta solución.

8. Use el Runge-Kutta para aproximar la solución de la ecuación de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (y^2 - 3)\frac{dy}{dt} + 5y = 0$$

que satisface la condición inicial $(y(0), y'(0)) = (1, 0)$. Utilice $\Delta t = 0.1$ y $n = 100$. Trace sus resultados en el plano fase yv (donde $v = y'$) y como la gráfica de $y(t)$.

7.4 LOS EFECTOS DE LA ARITMÉTICA FINITA

En teoría, los errores implicados en el uso de los procedimientos de aproximación numérica decrecen cuando los tamaños de paso disminuyen, y nuestra preferencia por el método de Runge-Kutta proviene de que es un procedimiento de cuarto orden y no es muy difícil su implementación. Es tentador suponer que la computadora o la calculadora están haciendo exactamente lo que se les pidió. Desafortunadamente, éste no es el caso. La aritmética de punto flotante tiene sólo una cantidad finita de exactitud y esta limitación introduce otra fuente de error en cada paso del método numérico.

En esta sección revisaremos brevemente un par de ejemplos informativos para alertarlo frente a los escollos asociados con la aritmética computacional. Como siempre, comenzaremos con nuestro ejemplo favorito del cual ya conocemos la solución exacta y luego analizaremos qué debe hacerse cuando no se conoce la solución. Por supuesto, este último caso es la situación en la que típicamente empleamos esos algoritmos.

Otra vez el problema de valor inicial $dy/dt = -2ty^2$, $y(0) = 1$

En la sección anterior encontramos que el método de Runge-Kutta nos da una aproximación muy exacta para la solución de $y(t) = 1/(1 + t^2)$ sobre el intervalo $0 \leq t \leq 2$ usando sólo el tamaño de paso $\Delta t = 0.1$, el cual es bastante grande. En teoría podemos hacer el error tan pequeño como queramos disminuyendo el tamaño del paso. Para ver si esto funciona en la práctica, haremos un experimento. (Tales experimentos son un uso exce-

Tabla 7.3
El error en el valor de $y(2)$ asociado con el método de Runge-Kutta para $dy/dt = -2ty^2$, $y(0) = 1$ para 2^n subdivisiones del intervalo $0 \leq t \leq 2$

n	2^n	e_{2^n}	n	2^n	e_{2^n}
1	2	0.01741182739635213639	10	1024	0.00000000000008953949
2	4	0.00040567218499903968	11	2048	0.00000000000000552336
3	8	0.00002714430679354174	12	4096	0.00000000000000080491
4	16	0.00000161801719431032	13	8192	0.00000000000000024980
5	32	0.00000009769105269175	14	16384	0.00000000000000094369
6	64	0.00000000598843688526	15	32768	0.00000000000000072164
7	128	0.00000000037049122104	16	65536	0.00000000000000077716
8	256	0.00000000002303576774	17	131072	0.00000000000000144329
9	512	0.00000000000143582368	18	262144	0.00000000000000355271

lente para las computadoras personales, y un uso mucho mejor que para los dibujos de tostadores voladores.)

Comenzaremos por subdividir el intervalo $0 \leq t \leq 2$ en dos subintervalos (habrá entonces dos pasos y $\Delta t = 1.0$) y calculamos el error e_2. El método de Runge-Kutta con $\Delta t = 1.0$ da la aproximación $y_2 = 0.182588$ para el valor exacto $y(2) = 0.2$, y por tanto el error es

$$e_2 = |0.2 - 0.182588| = 0.0174118.$$

Es sorprendente que este método dé una aproximación tan exacta con ese tamaño de Δt.

La teoría dice que si duplicamos el número de pasos en el método de Runge-Kutta, el error debe decrecer por un factor de 16. En consecuencia, aumentamos al doble el número de pasos (y dividimos entre dos su tamaño) y recalculamos la solución aproximada. Repitiendo este procedimiento, obtenemos los datos mostrados en la tabla 7.3.

Observe que, como lo esperábamos, el error mejora en las primeras 10 duplicaciones. Note que, para $n = 13$, tenemos una aproximación que concuerda con el valor exacto con 15 lugares decimales. Entonces, en $n = 14$, el error empieza a crecer. Aparentemente no ayuda calcular más pasos (vea la tabla 7.4).

Tabla 7.4

El error asociado con el método de Runge-Kutta para $dy/dt = -2ty^2$ para 2^n subdivisiones

n	2^n	e_{2^n}	n	2^n	e_{2^n}
12	4096	0.00000000000000080491	20	1048576	0.00000000000000224820
13	8192	0.00000000000000024980	21	2097152	0.00000000000000621725
14	16384	0.00000000000000094369	22	4194304	0.00000000000001271205
15	32768	0.00000000000000072164	23	8388608	0.00000000000001187939
16	65536	0.00000000000000077716	24	16777216	0.00000000000001057487
17	131072	0.00000000000000144329	25	33554432	0.00000000000002037259
18	262144	0.00000000000000355271	26	67108864	0.00000000000000949241
19	524288	0.00000000000000130451			

Los efectos de la aritmética finita

En un cierto punto la eficiencia del método numérico es vencida por los efectos del redondeo en la aritmética de la computadora. A menos que por alguna razón tengamos suerte, no podemos esperar una respuesta que sea más exacta que lo que la aritmética permite. Esto es como el concepto de dígitos significativos en las ciencias.

Hay varias maneras de modelar la exactitud de la aritmética de la computadora y, al igual que nuestros modelos, conducen a predicciones algo diferentes acerca de los efectos de la aritmética finita. Para nuestros fines adoptaremos uno de los modelos estándar que dice que el error total, denotado por $e(\Delta t)$ como función del tamaño de paso Δt para el método de Runge-Kutta, es aproximadamente

$$e(\Delta t) = c_1(\Delta t)^4 + \frac{c_2}{\Delta t},$$

donde c_1 y c_2 son constantes determinadas por la ecuación diferencial, por su condición inicial y por el intervalo en el que se está aproximando la solución. El primer término, $c_1(\Delta t)^4$, expresa que el Runge-Kutta es un método de cuarto orden. El segundo término, $c_2/(\Delta t)$, es el que mide los errores de redondeo para valores pequeños de Δt. Supuestamente, la constante c_2 es muy pequeña y por tanto Δt debe serlo también antes de que los efectos de este término sean apreciables.

Podemos observar los efectos del redondeo si repetimos los cálculos anteriores con aritmética de simple precisión (vea la tabla 7.5). Note que, en este caso, nos va mejor con 128 subdivisiones que con millones de ellas. De hecho, cuando llegamos a 16 millones de subdivisiones, nuestra aproximación es tan exacta como era con 2.

Tabla 7.5

El error asociado con el método de Runge-Kutta implementado en precisión simple para $dy/dt = -2ty^2$ para 2^n subdivisiones

n	2^n	e_{2^n}	n	2^n	e_{2^n}
1	2	0.01741183	13	8192	0.00000031
2	4	0.00040567	14	16384	0.00000002
3	8	0.00002714	15	32768	0.00000001
4	16	0.00000161	16	65536	0.00000035
5	32	0.00000012	17	131072	0.00000324
6	64	0.00000002	18	262144	0.00000173
7	128	0.00000001	19	524288	0.00002292
8	256	0.00000007	20	1048576	0.00000132
9	512	0.00000001	21	2097152	0.00062698
10	1024	0.00000005	22	4194304	0.00052327
11	2048	0.00000012	23	8388608	0.00506006
12	4096	0.00000004	24	16777216	0.01590731

Qué hacer en la práctica

En la práctica empleamos esos procedimientos numéricos cuando no conocemos las representaciones analíticas para las soluciones de una ecuación diferencial. Como por lo general es imposible llevar a cabo estimaciones significativas de la teoría, ¿cómo decidimos cuál es la estrategia razonable a seguir? Si aceptamos que el error es aproximadamente determinado por una expresión de la forma

$$e(\Delta t) = c_1(\Delta t)^4 + \frac{c_2}{\Delta t},$$

entonces utilizamos un valor de Δt que minimice el primer término tanto como sea posible antes de que el segundo empiece a tener efecto. Sin embargo, puesto que no conocemos el valor verdadero de la solución, ¿cómo podemos predecir dónde va a presentarse este mínimo?

Calculamos aproximaciones múltiples donde duplicamos el número de pasos y buscamos aquellas que "converjan" en un cierto valor. Por ejemplo, si aplicamos el Runge-Kutta al problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = y^2 - t, \quad y(1) = 1,$$

sobre el intervalo $1 \leq t \leq 3$ con varios números de subdivisiones, obtenemos los resultados dados en la tabla 7.6.

Note que tenemos la aproximación $y(3) \approx -1.49389744$ con 64 y 128 subdivisiones. Dada la repetición, calculamos otra más con 256 subdivisiones y tenemos la certeza de que el valor real de la solución con cinco decimales es -1.49389. Es relativamente seguro que el siguiente dígito decimal es 7, pero si necesitamos una respuesta más exacta, repetimos los cálculos usando más precisión.

Tabla 7.6
El método de Runge-Kutta aplicado al problema de valor inicial $dy/dt = y^2 - t$, $y(1) = 1$

n	$y_n \approx y(3)$
2	−1.39687991
4	−1.47455096
8	−1.49300539
16	−1.49384940
32	−1.49389482
64	−1.49389744
128	−1.49389744
256	−1.49389791
512	−1.49389756

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 7.4

En los ejercicios 1-3, use el método Runge-Kutta para producir una tabla similar a la tabla 7.6 que aproxime el valor de la solución en el punto extremo derecho del intervalo especificado. ¿Qué número de pasos corresponden a la aproximación óptima?

1. $\frac{dy}{dt} = t - y^3, \quad y(0) = 2, \quad 0 \leq t \leq 1$

2. $\frac{dy}{dt} = \operatorname{sen} ty, \quad y(0) = 3, \quad 0 \leq t \leq 3$

3. $\frac{dy}{dt} = (\cos y)(t^2 - y), \quad y(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 2$

LABORATORIO 7.1 Errores de las aproximaciones numéricas

En este capítulo estudiamos tres métodos diferentes para encontrar aproximaciones numéricas de soluciones de ecuaciones diferenciales: Euler, Euler mejorado y Runge-Kutta. La exactitud de esos métodos depende del tamaño del paso Δt. En este laboratorio obtendremos información adicional sobre la relación entre el error en las aproximaciones numéricas y el tamaño del paso, mediante el estudio de algunas ecuaciones y soluciones especiales.

En su reporte trate los siguientes temas:

1. Use el método de Euler para aproximar la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = y^2 - 4ty + 4t^2y - 4y + 8t - 3, \qquad y(0) = -1.$$

¿Cómo cambia la aproximación cuando se modifica el tamaño del paso? Interprete sus resultados. [*Sugerencia:* Observe el campo de pendientes para esta ecuación. Vea también la sección 1.9.]

2. Use el método de Euler, el método de Euler mejorado y el de Runge-Kutta para aproximar la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2\sqrt{y}, \qquad y(0) = 1.$$

Encuentre la fórmula para la solución y evalúe el error como función del tamaño del paso en cada uno de los métodos. ¿Son los métodos mejores o peores de lo que había esperado? [*Sugerencia:* La geometría del campo de pendientes no será muy útil aquí, pero sí lo será la forma especial de la fórmula de la solución.]

3. Repita la parte 2 para el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = y + t^3 - 6, \qquad y(0) = 0.$$

Sobre su reporte: En su reporte deberá tratar cada uno de los incisos anteriores. *No* deberá incluir las tablas de las soluciones numéricas. Puede anexar un número limitado de tablas y/o gráficas de cómo el error en sus soluciones aproximadas depende del tamaño del paso. El objetivo de este laboratorio es interpretar por qué el error depende del tamaño del paso.

LABORATORIO 7.2 Perdidos en el espacio

El movimiento de los planetas y satélites en el espacio está regido por las leyes del movimiento de Newton y la atracción gravitatoria. La ley del movimiento de Newton establece que la fuerza total es igual al producto de la masa y la aceleración, y la ley de la gravitación de Newton expresa que la fuerza debida a la gravedad entre dos cuerpos es inversamente proporcional a la distancia que existe entre ellos. Ésta es una fuerza de atracción que jala a cada cuerpo directamente hacia el otro. Como en el caso del oscilador armóni-

co del capítulo 2 y del péndulo del capítulo 5, esas leyes dan lugar a ecuaciones diferenciales de segundo orden para las posiciones de los cuerpos en función del tiempo.

Suele afirmarse que las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de la Luna y los planetas fueron las primeras que se estudiaron. La posibilidad de calcular la posición de los cuerpos celestes (como la Luna) fue de gran importancia financiera durante el tiempo de Newton. Conocer la localización precisa de la Luna y los planetas en cualquier momento era esencial para la navegación en mar abierto. Esas ecuaciones aún poseen trascendencia teórica para el desarrollo de procedimientos para el estudio de las ecuaciones diferenciales. También tienen gran importancia práctica para la navegación espacial. El tipo de procedimientos de aproximación numérica que hemos analizado se emplean para calcular órbitas de satélites a la Luna y planetas (y de regreso; vea la película *Apolo 13*).

En este laboratorio suponga que está en una misión en el espacio profundo y que después de un malentendido, su compañero de viaje lo deja solo en su traje espacial y sin combustible, pero le deja una cápsula de escape. Sin embargo, usted y la cápsula de escape están separados 100 metros y sin moverse. "No hay por qué preocuparse. Como dos objetos se atraen entre sí por la fuerza de la gravedad, entonces al final nos juntaremos la cápsula de escape y yo", piensa usted. Suponga que su masa (en el traje espacial) es de 150 kg y la de la cápsula de escape es de 10^6 kg, y que usted debe estar a 1 metro de la cápsula para asirla. ¿Cuánto tiempo le tomará alcanzarla?

Primero necesitamos las ecuaciones diferenciales. Puesto que ambos inician su movimiento desde el reposo y la única fuerza es la gravedad que actúa a lo largo de la línea que lo conecta con la cápsula, tanto usted como ésta permanecerán sobre esa línea. En consecuencia, necesitamos sólo un número para denotar sus posiciones relativas. Sea $x_1(t)$ la posición de la cápsula en el tiempo t, y $x_2(t)$ la posición de usted en el tiempo t. Suponemos que las coordenadas han sido escogidas de manera que $x_2 > x_1$. Nos interesa especialmente la distancia entre usted y la cápsula; hagamos entonces $x(t) = x_2(t) - x_1(t)$. Por las leyes de Newton sabemos que el producto de su masa y su aceleración es igual a la fuerza de gravedad entre usted y la cápsula, y que esta fuerza es proporcional al producto de sus masas dividido entre el cuadrado de la distancia entre los dos. Es decir,

$$150\frac{d^2x_2}{dt^2} = -G\frac{150 \times 10^6}{|x_2 - x_1|^2},$$

donde el signo menos indica que la fuerza está tirando en la dirección de x_2 decreciente y G es la "constante gravitatoria". Esto es lo mismo que

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -G\frac{10^6}{|x_2 - x_1|^2}.$$

De modo similar, la aceleración de la cápsula está dada por

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = G\frac{150}{|x_2 - x_1|^2}.$$

Restando esas ecuaciones y usando $x = x_2 - x_1$, obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -G\frac{10^6 + 150}{x^2}$$

para $x(t)$. Ésta es una ecuación diferencial no lineal de segundo orden. La constante gravitatoria G se ha calculado minuciosamente a partir de experimentos y está dada por $G \approx 6.67 \times 10^{-17}$. (Las unidades son kg m^3/s^2.)

En su reporte, considere los siguientes temas:

1. Convierta la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -G\frac{10^6 + 150}{x^2}$$

en un sistema de primer orden.

2. Usando procedimientos numéricos, aproxime el tiempo necesario para que llegue usted a 1 metro de la cápsula de escape, considerando que al principio ambos se encuentran a 100 m de distancia y que su velocidad inicial es nula. ¿Qué velocidad han adquirido usted y la cápsula cuando están a 1 m de distancia? (Use el método numérico que prefiera.)

3. Verifique que su cálculo del tiempo cuando usted está a 1 metro de la cápsula de escape es de 1 segundo.

Sobre su reporte: En su reporte deberá tratar esos tres incisos. No deje de explicar sus métodos, particularmente el que use para la parte 3. Puede usar gráficas o diagramas para ilustrar sus métodos, pero no entregue grandes listas de números.

8 SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS

En este capítulo estudiaremos un tipo completamente diferente de modelo para procesos que evolucionan en el tiempo, es decir, los sistemas dinámicos discretos o ecuaciones en diferencias. En contraste con las ecuaciones diferenciales, esos modelos se adaptan bien a situaciones donde ocurren cambios en tiempos específicos en vez de continuamente. Por ejemplo, solemos medir el crecimiento de una población en tiempos específicos, tales como el final anual de un ciclo reproductivo.

El estudio de los sistemas dinámicos discretos implica a menudo el proceso de iteración. *Iterar* significa repetir un procedimiento muchas veces. En la dinámica discreta, el proceso repetitivo involucra la aplicación de una función matemática. Hemos visto muchos de ellos. Por ejemplo, el método de Euler para resolver una ecuación diferencial implica iteración.

En el caso de las ecuaciones diferenciales, vimos que rara vez es posible encontrar las soluciones exactas de los sistemas discretos. Como es usual, dependemos de una combinación de procedimientos numéricos, analíticos y gráficos para entender esos sistemas. Aun con esos complejos procedimientos, no somos capaces de describir iteraciones no lineales unidimensionales por completo. La razón es que muchos sistemas discretos no lineales se comportan de manera compleja e impredecible. Este fenómeno, llamado caos por los matemáticos, se analiza con detalle en las secciones 8.4 y 8.5.

8.1 LA ECUACIÓN LOGÍSTICA DISCRETA

Los modelos de población que hemos estudiado hasta ahora, tienen la propiedad de que la razón de cambio de la población es continua. Ésta es una hipótesis razonable para especies que se reproducen muy rápido con respecto a la escala de tiempo que estamos considerando. Sin embargo, para algunas especies todos los nacimientos ocurren en la primavera y la mayor parte de las muertes durante el invierno; por consiguiente, la hipótesis de un cambio continuo de la población no es válida. Más bien, debemos considerar el tiempo como discreto. Si medimos la población una vez en el verano, entonces tendremos una estimación exacta de la población durante todo el año.

Nuestro estudio se inicia con los sistemas discretos en el tiempo, reformulando varios de los modelos de población que vimos en el capítulo 1 como sistemas dinámicos discretos.

Modelo de crecimiento exponencial

El modelo de **crecimiento exponencial** es simple, pero no representativo del incremento poblacional. Será el primero que analizaremos porque ilustra las ideas principales detrás de la dinámica discreta. En este modelo suponemos que la población de una cierta especie en la próxima generación (o en otro periodo) es directamente proporcional a la población en la generación actual. Sea P_n la población de la especie al término del n-ésimo periodo. La suposición es que, para cada tiempo n, la población al final del paso $(n + 1)$-ésimo de tiempo, P_{n+1}, es proporcional a la población al final del paso de tiempo anterior, P_n. Es decir,

$$P_{n+1} = kP_n,$$

donde k es la constante de proporcionalidad que determina la razón de crecimiento. Esta ecuación es un ejemplo de un **sistema dinámico discreto** o de una **ecuación en diferencias.** Comparada con la ecuación diferencial para un crecimiento ilimitado de la población

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

que nos da la razón de cambio de la población, esta ecuación en diferencias nos da directamente la cifra P_{n+1} en la generación siguiente, siempre y cuando conozcamos P_n. Entonces, si sabemos cuál es la población inicial P_0, podemos determinarla en cada generación siguiente con sólo calcular la expresión kP_n en cada etapa. No hay que evaluar integrales y no se tienen que aproximar curvas solución. Todo lo que debemos hacer es calcular repetidamente el lado derecho de la ecuación, usando la salida del cálculo previo como entrada para el siguiente. Esta repetición es lo que llamamos **iteración**. Entonces, si conocemos la población inicial P_0, calculamos

$$\begin{aligned} P_1 &= kP_0 \\ P_2 &= kP_1 = k^2 P_0 \\ P_3 &= kP_2 = k^3 P_0 \\ &\vdots \\ P_n &= kP_{n-1} = k^n P_0. \end{aligned}$$

Vemos que la población en la generación n está determinada por la fórmula $P_n = k^n P_0$. Por tanto, si $P_0 > 0$, concluimos lo siguiente: Si $k > 1$, habrá una sobrepoblación, ya que

$$\lim_{n\to\infty} k^n = \infty.$$

Por otra parte, si $k < 1$, la población se extingue, ya que

$$\lim_{n\to\infty} k^n = 0.$$

Por último, si $k = 1$, la población nunca cambia y $P_n = P_0$.

Este modelo tiene los mismos inconvenientes que la versión de la ecuación diferencial. Aunque funciona bien para poblaciones pequeñas en grandes ambientes, si éstas se incrementan, entonces el modelo predice un crecimiento ilimitado. Por ello, modificamos este modelo para tomar en cuenta que el ambiente es limitado.

La ecuación logística en diferencias

Para hacer el modelo del crecimiento exponencial algo más real, agregaremos algunas consideraciones que incluyan la sobrepoblación, tal como lo hicimos con la ecuación diferencial logística en el capítulo 1. Las suposiciones que haremos son:

- La población al final de la generación siguiente es proporcional a la que encontraremos al final de la generación actual cuando su número es muy pequeño.
- Si la población es demasiado grande, entonces se agotarán todos los recursos y la población entera morirá en la próxima generación.

Esta última suposición es ligeramente distinta de la que hicimos para la ecuación diferencial logística. Aquí suponemos que hay un nivel de población máximo M que, al ser alcanzado, da como resultado la extinción de la población en la próxima generación. A M se le llama el **parámetro de aniquilación**. Cuando el crecimiento de la población llega al valor M, la especie está condenada a desaparecer.

Un modelo que refleja esas suposiciones es

$$P_{n+1} = kP_n\left(1 - \frac{P_n}{M}\right).$$

Igual que antes, P_n denota la población al final de la generación n y P_0 es la población inicial. Note que si P_n es pequeña, el término $(1 - P_n/M)$ es aproximado a 1. Entonces la ecuación en diferencias se convierte en $P_{n+1} \approx kP_n$, que es el modelo del crecimiento exponencial. Por otra parte, si $P_n \geq M$, entonces $P_{n+1} \leq 0$; es decir, el incremento de la población es no positiva. Esto lo interpretamos como que la especie está extinta.

En vez de tratar con los grandes números que a menudo aparecen en los modelos poblacionales, supondremos que P_n representa el porcentaje o fracción de esta población máxima viva en la generación n. Es decir, supondremos que $M = 1$ y que P_n se encuentra entre 0 y 1, por lo que $P_n = 0$ (o P_n negativa) simbolizará la extinción y $P_n = 1$, el nivel máximo de población. El modelo toma entonces la forma

$$P_{n+1} = kP_n(1 - P_n),$$

que llamamos la **ecuación logística discreta** o **ecuación logística en diferencias.** Igual que antes, k es un parámetro que depende de la especie específica bajo investigación.

Como siempre, debemos advertir que éste es un modelo extremadamente ingenuo para el crecimiento de población. Hemos despreciado todo tipo de factores que afectan P_n, incluso los efectos de los depredadores, las enfermedades cíclicas y la naturaleza variable del suministro de comida. Sin embargo, este modelo incluye muchas más situaciones para cambios en la población que la ecuación diferencial logística.

Algunas predicciones del modelo

Como ejemplo de las diversas posibilidades que encontramos en el modelo logístico discreto, veremos la salida de este modelo para unos cuantos valores k. Comenzaremos exactamente con la mitad de la población máxima permitida, es decir, $P_0 = 0.5$. Entonces, dependiendo de k, encontramos resultados muy diferentes cuando calculamos valores sucesivos de P_n. La tabla 8.1 lista las poblaciones (usando sólo 4 dígitos significativos) cuando $k = 0.5$, 1.5, 2, 3.2, 3.5 y 3.9. Note que los valores diferentes de k dan comportamientos muy diferentes para la población. Cuando $k = 0.5$, la población tiende gradualmente hacia la extinción. Si $k = 1.5$, la especie parece nivelarse y alcanzar un estado de equilibrio. Cuando $k = 2$, la población nunca cambia y permanece fija en 0.5. Pero si $k = 3.2$,

Tabla 8.1
Poblaciones sucesivas del modelo logístico con $P_0 = 0.5$ y $k = 0.5$, 1.5, 2, 3.2, 3.5 y 3.9

n	$k = 0.5$	$k = 1.5$	$k = 2$	$k = 3.2$	$k = 3.5$	$k = 3.9$
1	0.1250	0.3750	0.5000	0.8000	0.8750	0.9750
2	0.0546	0.3515	0.5000	0.5120	0.3828	0.0950
3	0.0258	0.3419	0.5000	0.7995	0.8269	0.3355
4	0.0125	0.3375	0.5000	0.5128	0.5008	0.8694
5	0.0062	0.3354	0.5000	0.7995	0.8749	0.4426
6	0.0030	0.3343	0.5000	0.5130	0.3828	0.9621
7	0.0015	0.3338	0.5000	0.7995	0.8269	0.1419
8	7.7×10^{-4}	0.3335	0.5000	0.5130	0.5008	0.4750
9	3.8×10^{-4}	0.3334	0.5000	0.7995	0.8749	0.9725
10	1.9×10^{-4}	0.3333	0.5000	0.5130	0.3828	0.1040
11	9.6×10^{-5}	0.3333	0.5000	0.7995	0.8269	0.3634
12	4.8×10^{-5}	0.3333	0.5000	0.5130	0.5008	0.9022
13	2.4×10^{-5}	0.3333	0.5000	0.7995	0.8749	0.3438
14	1.2×10^{-5}	0.3333	0.5000	0.5130	0.3828	0.8799
15	6.0×10^{-6}	0.3333	0.5000	0.7995	0.8269	0.4120
16	3.0×10^{-6}	0.3333	0.5000	0.5130	0.5008	0.9448
17	1.5×10^{-6}	0.3333	0.5000	0.7995	0.8749	0.2033
18	7.5×10^{-7}	0.3333	0.5000	0.5130	0.3828	0.6316
19	3.7×10^{-7}	0.3333	0.5000	0.7995	0.8269	0.9073
20	1.9×10^{-7}	0.3333	0.5000	0.5130	0.5008	0.3278

vemos un resultado diferente: la población oscila entre dos valores diferentes. Un año se incrementa, aproximadamente 0.7995; baja el siguiente, alrededor de 0.513 y luego se repite cíclicamente. Cuando $k = 3.5$, observamos un comportamiento cíclico similar, pero en este caso las poblaciones se repiten cada cuatro años en lugar de cada dos. Finalmente, cuando $k = 3.9$, no hay ningún patrón aparente para las poblaciones sucesivas.

Iteración

Para el modelo logístico discreto, encontrar poblaciones sucesivas es lo mismo que iterar una función cuadrática de la forma

$$L_k(x) = kx(1-x).$$

Ésta depende del parámetro k y suele llamarse la **función logística**. Para iterarla, comenzamos con una población inicial P_0 y luego calculamos de manera sucesiva

$$\begin{aligned} P_1 &= L_k(P_0) \\ P_2 &= L_k(P_1) \\ P_3 &= L_k(P_2) \\ &\vdots \\ P_n &= L_k(P_{n-1}) \end{aligned}$$

etc. La lista de números $P_0, P_1, P_2, \ldots$ que resulta de esta iteración se llama la **órbita** de P_0 bajo la función L_k.

En dinámica discreta, el objetivo básico es predecir el destino de las órbitas para una función dada. Aquí la pregunta principal es: ¿Qué sucede con los números que constituyen la órbita cuando n tiende a infinito?

A veces es muy sencillo predecir el destino de la órbita. Por ejemplo, si $F(x) = x^2$, entonces podemos determinar fácilmente qué pasa a todas las órbitas. Por ejemplo, $x_0 = 0$ y $x_0 = 1$ son **puntos fijos**, ya que $F(0) = 0$ y $F(1) = 1$. Es decir, la órbita de 0 es la secuencia constante $0, 0, 0, 0, \ldots$ como lo es la de 1: $1, 1, 1, \ldots$ La órbita de -1 bajo $F(x) = x^2$ es un poco diferente: Esta órbita **tiende a ser fija** ya que $F(-1) = 1$, que es un punto fijo. La órbita de -1 es $-1, 1, 1, 1, \ldots$

Para cualquier otro x_0, hay sólo dos posibilidades para la órbita de x_0: que tienda a un punto fijo en 0 o al infinito. Por ejemplo, si $x_0 = 1/2$, la órbita es

$$\begin{aligned} x_0 &= 1/2 \\ x_1 &= 1/4 \\ x_2 &= 1/16 \\ x_3 &= 1/256 \\ &\vdots \\ x_n &= 1/2^{2^n}, \end{aligned}$$

que se aproxima a 0 cuando n tiende a infinito. El destino de la órbita es el mismo para cualquier otro x_0 con $|x_0| < 1$.

Si $|x_0| > 1$, las aplicaciones sucesivas de la función cuadrática $F(x) = x^2$ dan resultados cada vez más grandes. Por ejemplo, si $x_0 = 2$, tenemos

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 \\ x_1 &= 4 \\ x_2 &= 16 \\ x_3 &= 256 \\ &\vdots \\ x_n &= 2^{2^n}, \end{aligned}$$

y vemos que la órbita de x_0 tiende a infinito.

Ciclos

En un sistema dinámico discreto típico, a menudo encontraremos muchos tipos de órbitas. Por ejemplo, si $G(x) = x^2 - 1$, entonces la órbita de 0 se encuentra sobre un **ciclo de periodo** 2 o una **órbita periódica de periodo** 2, ya que

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= -1 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= -1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Esta órbita es la secuencia repetida $0, -1, 0, -1, \ldots$

Si escogemos $x_0 = \sqrt{2}$, en ese caso la órbita **tiende a ser periódica** ya que tenemos

$$\begin{aligned} x_0 &= \sqrt{2} \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= -1 \\ x_4 &= 0 \\ x_5 &= -1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

que entra en ciclo después de la segunda iteración.

En contraste, si escogemos $x_0 = 0.5$, la órbita tiende al ciclo de periodo 2 ya que

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.5 \\ x_1 &= (0.5)^2 - 1 = -0.75 \\ x_2 &= -0.4375 \\ x_3 &= -0.8086\ldots \\ &\vdots \\ x_{20} &= 0.00000\ldots \\ x_{21} &= -1.00000\ldots \\ x_{22} &= 0.00000\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Es importante observar que esta órbita nunca alcanza el ciclo en 0 y en -1. Más bien, llega arbitrariamente cerca de esos dos números, pero debido al error de redondeo, la calculadora o la computadora exhibe los números 0 y -1 en sucesión. En conclusión, la órbita no tiende a ser periódica, sino que sólo tiende al ciclo de periodo 2. Este comportamiento es técnicamente diferente al de una órbita que tiende a ser periódica, aunque en la práctica el destino de esas órbitas es, en esencia, el mismo.

Los sistemas dinámicos discretos pueden tener órbitas que describen ciclos con cualquier periodo. Por ejemplo, la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = -\tfrac{3}{2}x_n^2 + \tfrac{5}{2}x_n + 1$$

admite un ciclo de periodo 3, ya que para $x_0 = 0$, calculamos

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Así entonces, la órbita es la secuencia repetida 0, 1, 2, 0, 1, 2, ... En general, la órbita de x_0 se encuentra sobre un ciclo de periodo n, si $x_n = x_0$ y n es el entero positivo más pequeño para que esto ocurra. Un punto fijo no se consideraría como un ciclo de periodo 10, aun cuando $x_{10} = x_0$, ya que 10 no es el entero más pequeño para el que se repite la órbita. De modo similar, si x_0 tiene periodo 5, tenemos también $x_{10} = x_0$, pero tampoco llamaríamos a ésta una órbita de periodo 10.

Como la órbita de un punto fijo es una secuencia constante $x_0, x_0, x_0, \ldots$, los puntos fijos para sistemas dinámicos discretos pueden considerarse como los análogos de puntos de equilibrio para ecuaciones diferenciales. Ambos representan soluciones constantes en los que el sistema dado está en reposo. De igual manera, los ciclos para un sistema discreto son análogos a las soluciones periódicas de las ecuaciones diferenciales, ya que ambos retornan a sus posiciones originales después de cierto tiempo.

Serie de tiempo e histogramas

Un método conveniente de describir las órbitas de manera geométrica es por medio de una **serie de tiempo.** En esos diagramas trazamos el conteo de iteración sobre el eje horizon-

tal y los valores numéricos de la órbita sobre el eje vertical. Para tener una mejor visualización, podemos dibujar líneas rectas que conecten los puntos sucesivos de la serie de tiempo. En la figura 8.1 graficamos la serie de tiempo correspondiente a la órbita de -0.5 bajo $G(x) = x^2 - 1$. Note que ésta tiende a un ciclo de periodo 2. En la figura 8.2 graficamos la serie de tiempo correspondiente a la órbita de 0 bajo $H(x) = x^2 - 1.3$. Aquí observamos que esta órbita tiende a un ciclo de periodo 4. Esas series de tiempo son análogas a las gráficas $x(t)$ y $y(t)$ que con frecuencia trazamos para las ecuaciones diferenciales.

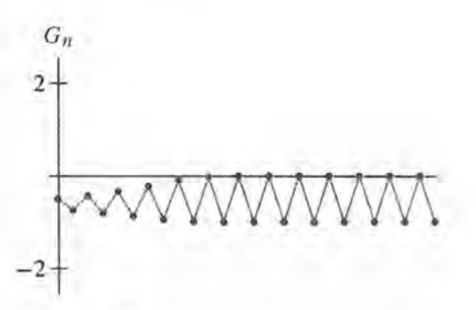


Figura 8.1
Serie de tiempo para la órbita de -0.5 bajo $G(x) = x^2 - 1$.

Figura 8.2
Serie de tiempo para la órbita de 0 bajo $H(x) = x^2 - 1.3$.

La figura 8.3 muestra la serie de tiempo para la órbita de 0.5 bajo iteración de la función logística $L_{3.9}(x) = 3.9x(1 - x)$. Ésta no es ni fija ni de comportamiento periódico; es difícil ver cualquier otro patrón coherente. Estudiaremos este tipo de series de tiempo en la sección 8.5.

Otra manera de visualizar las órbitas es por medio de un **histograma**. Éstos subdividen un intervalo que contiene los puntos de una órbita en muchos subintervalos pequeños de igual longitud. Cada vez que la órbita entra en uno de éstos, el histograma se incrementa en una unidad sobre ese subintervalo. Las figuras 8.4 y 8.5 exhiben los histogramas correspondientes a la órbita de 0.123 bajo iteración de las funciones logísticas $L_{3.83}(x) = 3.83x(1 - x)$ y $L_{3.9}(x) = 3.9x(1 - x)$. En el primer caso la órbita se estabiliza muy rápido en un ciclo de periodo 3. En el segundo caso vemos una vista diferente de la figura 8.3. La órbita aparentemente nunca se estabiliza, sino más bien visita todos los subintervalos, unos más que otros.

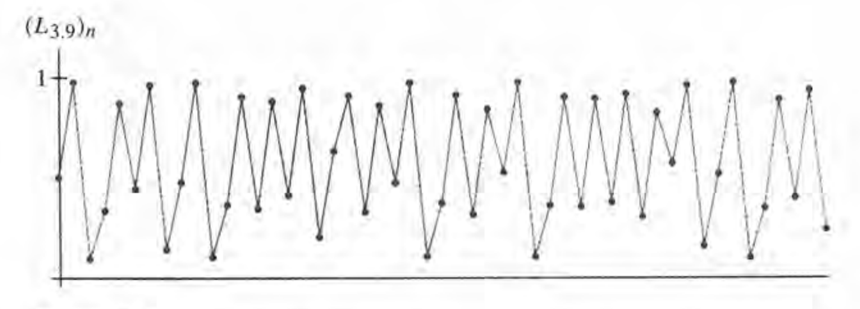


Figura 8.3
Serie de tiempo para la órbita de 0.5 bajo $L_{3.9}(x) = 3.9x(1 - x)$.

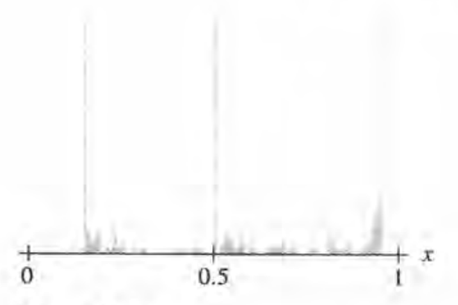


Figura 8.4
Histograma para la órbita de 0.123 bajo $L_{3.83}(x) = 3.83x(1 - x)$.

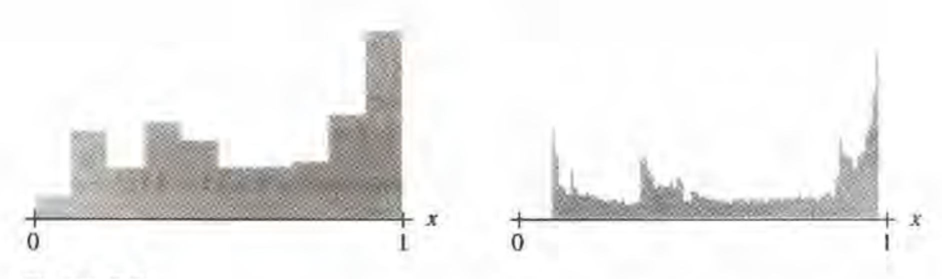


Figura 8.5
Dos histogramas para la órbita de 0.123 bajo $L_{3.9}(x) = 3.9x(1 - x)$. En la primera figura subdividimos el intervalo unitario en diez subintervalos de longitud 0.1, mientras que en la segunda hay 100 subintervalos de longitud 0.01.

Localización de puntos fijos

Como vimos en los ejemplos anteriores, hay muchos tipos diferentes de órbitas para un sistema dinámico discreto. Los puntos fijos son las más simples y son, a menudo, los tipos más importantes de órbitas en dicho sistema. Como en el caso de las ecuaciones diferenciales, empleamos tres métodos distintos para encontrar esas órbitas especiales: analítico, cualitativo y procedimientos numéricos.

El método analítico implica resolver ecuaciones. Para encontrar los puntos fijos de una determinada función F, sólo necesitamos solucionar la ecuación $F(x) = x$. Por ejemplo, si $F(x) = x^2 - 2$, entonces encontramos que los puntos fijos son las soluciones de la ecuación

$$x^2 - 2 = x,$$

que puede escribirse como

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Factorizando obtenemos

$$(x + 1)(x - 2) = 0,$$

y los puntos fijos para F son -1 y 2.

Geométricamente podemos ver los puntos fijos superponiendo la gráfica de la línea diagonal $y = x$ sobre la de F. Note que la diagonal $y = x$ corta la gráfica de $F(x) = x^2 - 2$

directamente sobre -1 y 2, como se muestra en la figura 8.6. Como otro ejemplo, $K(x) = x^3$ tiene 3 puntos fijos, que ocurren en las raíces de $x^3 - x = 0$ o en 0, -1 y $+1$ (vea la figura 8.7).

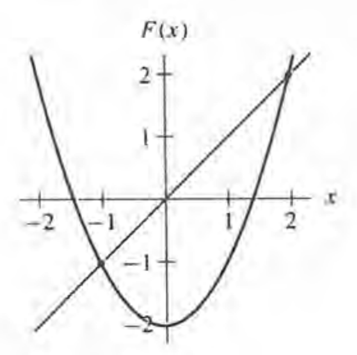


Figura 8.6
Los puntos fijos de $F(x) = x^2 - 2$ son $x = -1, 2$.

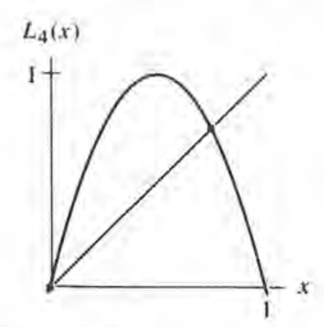
Figura 8.7
Los puntos fijos de $K(x) = x^3$ son $x = 0, -1, +1$.

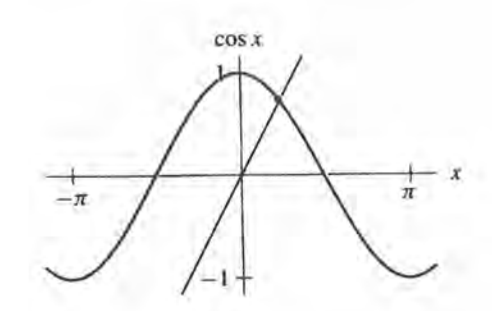
Para la ecuación logística $L_k(x) = kx(1 - x)$, encontramos los puntos fijos resolviendo

$$kx(1 - x) = x,$$

que da las soluciones $x = 0$ y $x = (k - 1)/k$. Recuerde que para nuestro modelo de población supusimos que $0 \leq x \leq 1$, por lo que este segundo punto fijo es positivo sólo si $k > 1$. (Cuando $k < 1$, este punto fijo es negativo, por lo que, en términos de crecimiento, no es biológicamente interesante.) Además $(k - 1)/k < 1$ para toda $k > 1$. El punto fijo en $x = 0$ representa la extinción de la población y el punto fijo no nulo representa una población que nunca cambia de una generación a otra. La figura 8.8 muestra la gráfica para $k = 4$, con puntos fijos en 0 y en 0.75.

Dada una función F, la determinación de los puntos fijos resolviendo analíticamente $F(x) = x$ puede ser difícil o imposible. Si necesitamos un valor más exacto para el punto fijo que el que puede obtenerse por procedimientos gráficos, entonces podemos recurrir a los numéricos. Podemos usar el método de Newton para encontrar valores de x donde $F(x) - x = 0$. Por ejemplo, de la figura 8.9 vemos que $C(x) = \cos x$ tiene un solo punto fijo que podemos determinar numéricamente igual a 0.73908. . . (vea los ejercicios).





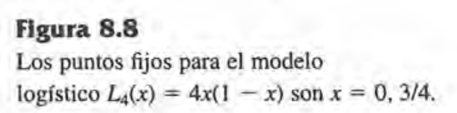


Figura 8.8
Los puntos fijos para el modelo logístico $L_4(x) = 4x(1 - x)$ son $x = 0, 3/4$.

Figura 8.9
El punto fijo para cos x ocurre en $x = 0.73908\ldots$

Notación para la iteración

Para simplificar la notación, introducimos la expresión F^n para denotar la n-ésima iteración de F. Por ejemplo, si $F(x) = x^4$, entonces

$$F^2(x) = F(F(x)) = F(x^4) = (x^4)^4 = x^{16},$$

y del mismo modo $F^3(x) = x^{64}$. Es importante ver que $F^n(x)$ *no* significa $F(x)$ elevada a la n-ésima potencia, sino más bien que F debe iterarse primero n veces y luego evaluar esta nueva función en x.

Determinación de ciclos

Para encontrar los ciclos de un sistema dinámico discreto, procedemos de la misma manera que para los puntos fijos. Por ejemplo, si $H(x) = -x^3$, el único punto fijo de H es 0, puesto que la ecuación para los puntos fijos es $-x^3 = x$ o $x(1 + x^2) = 0$. Para los ciclos de periodo 2, tenemos que calcular

$$H(H(x)) = H^2(x) = -(-x^3)^3 = x^9$$

y luego resolver $x^9 = x$. Las soluciones aquí son el punto fijo $x = 0$ y dos nuevas soluciones, $x = 1$ y $x = -1$. Esos últimos dos puntos forman un ciclo de periodo 2, ya que $H(1) = -1$ y $H(-1) = 1$.

Por lo general, es más difícil calcular ciclos que puntos fijos. Por ejemplo, para determinar los ciclos de periodo 2 para $F(x) = x^2 - 2$, debemos encontrar valores de x para los cuales $F(F(x)) = x$. Tenemos

$$F^2(x) = (x^2 - 2)^2 - 2 = x^4 - 4x^2 + 2,$$

por lo que debemos resolver

$$x^4 - 4x^2 + 2 = x.$$

Es decir, debemos calcular las raíces de la ecuación de cuarto grado

$$x^4 - 4x^2 - x + 2 = 0.$$

Por fortuna ya conocemos dos soluciones de esta ecuación puesto que previamente vimos que -1 y 2 son puntos fijos, y una característica de éstos es que tienen órbitas que se repiten tanto en una como en cada dos iteraciones. Podemos entonces dividir esta expresión entre $(x + 1)(x - 2)$ para encontrar

$$\frac{x^4 - 4x^2 - x + 2}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{x^4 - 4x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2} = x^2 + x - 1 = 0.$$

Esta ecuación cuadrática tiene raíces $(-1 \pm \sqrt{5})/2$. Esos puntos se encuentran sobre un ciclo de periodo 2 ya que tenemos

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

y

$$\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

En general, para encontrar ciclos de periodo n, primero debemos iterar la función F un total de n veces. Por ejemplo, si $L_3(x) = 3x(1 - x)$, calculamos

$$L_3^2(x) = 3[3x(1-x)][1-3x(1-x)] = -27x^4 + 54x^3 - 36x^2 + 9x$$

y

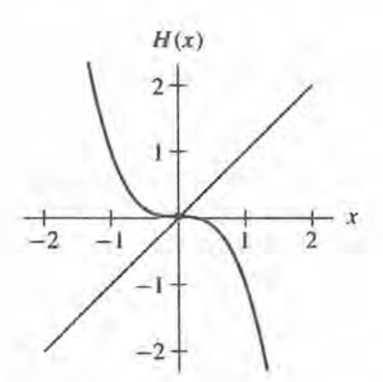
$$\begin{aligned} L_3^3(x) &= L_3(L_3^2(x)) \\ &= 3\left[-27x^4 + 54x^3 - 36x^2 + 9x\right]\left[1 - (-27x^4 + 54x^3 - 36x^2 + 9x)\right], \end{aligned}$$

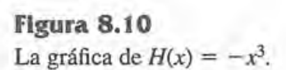
que no simplificaremos. Note que al desarrollarlo, $L_3^3(x)$ tiene términos que contienen x^8, por lo que L_3^3 es un polinomio de octavo grado. Por lo tanto, determinar las soluciones de $L_3^3(x) = x$ no es una tarea agradable.

Determinación geométrica de ciclos

Por lo común, encontrar ciclos de periodo n implica resolver la ecuación $F^n(x) = x$. Aun para funciones logísticas de la forma $L_k(x) = kx(1 - x)$, $L_k{}^n(x)$ es un polinomio de grado 2^n, por lo que tenemos pocas posibilidades de encontrar soluciones explícitas. Sin embargo, es relativamente fácil obtener información geométrica. En general, podemos descubrir alguna información sobre el número de ciclos de periodo n esbozando la gráfica de F^n y localizando los lugares en que esta gráfica cruza la línea diagonal $y = x$.

Por ejemplo, si $H(x) = -x^3$, la gráfica de H muestra que H tiene un solo punto fijo en 0. Pero $H^2(x) = x^9$ tiene una gráfica que encuentra la diagonal tres veces en el punto fijo y también en un ciclo de periodo 2, que como ya vimos está dado por ± 1 (vea las figuras 8.10 y 8.11).




Figura 8.10
La gráfica de $H(x) = -x^3$.

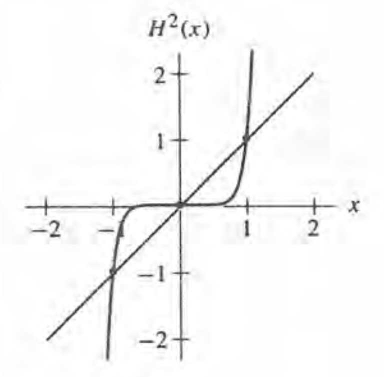


Figura 8.11
La gráfica de $H^2(x) = x^9$.

En las figuras 8.12-8.14 trazamos la gráfica de $F(x) = x^2 - 2$, así como las de F^2 y F^3. Note que se ven dos puntos fijos para F y cuatro puntos fijos para F^2. Dos de ellos son puntos fijos para F y los otros dos se encuentran sobre un ciclo de periodo 2. Para F^3 hay ocho puntos donde la gráfica de $y = F^3(x)$ cruza $y = x$. Nuevamente, dos son los puntos fijos de F, pero los otros seis deben ser cíclicos con periodo 3. El ciclo de periodo 2 no aparece en la gráfica de F^3, ya que esas órbitas no se repiten después de tres iteraciones.

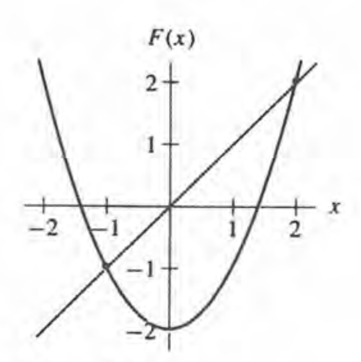


Figura 8.12
La gráfica de $F(x) = x^2 - 2$.

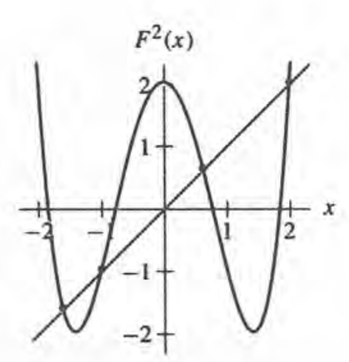


Figura 8.13
La gráfica de $F^2(x)$.

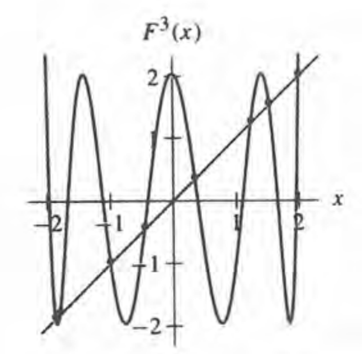


Figura 8.14
La gráfica de $F^3(x)$.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 8.1

En los ejercicios 1-8, calcule la órbita de $x_0 = 0$ para cada una de las ecuaciones en diferencias. Determine si esta órbita es fija, cíclica con algún periodo, tiende a ser periódica, tiende a infinito, o no es ninguno de estos tipos. (Use una calculadora cuando se requiera.)

1. $x_{n+1} = x_n^2 - 2$
2. $x_{n+1} = \text{sen}(x_n)$
3. $x_{n+1} = e^{x_n}$
4. $x_{n+1} = x_n^2 + 1$
5. $x_{n+1} = -x_n^2 + x_n + 2$
6. $x_{n+1} = \cos(x_n)$
7. $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n) + 1$
8. $x_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n^2 + 1$

En los ejercicios 9-21, encuentre todos los puntos fijos y puntos de periodo 2 para cada una de las funciones dadas. Si no puede determinar esos valores explícitamente, use la gráfica de F o F^2 para determinar cuántos puntos fijos y cuántos de periodo 2 tiene F.

9. $F(x) = -x + 2$
10. $F(x) = x^4$

11. $F(x) = x^2 + 1$

12. $F(x) = x^2 - 3$

13. $F(x) = \operatorname{sen} x$

14. $F(x) = 1/x$

15. $F(x) = -2x - x^2$

16. $F(x) = e^x$

17. $F(x) = -e^x$

18. $F(x) = x^3$

19. $F(x) = -x$

20. $F(x) = -2x + 1$

21. $F(x) = 2$

22. Describa el destino de la órbita de cualquier x_0 bajo iteración de $F(x) = x^3$.

23. Prediga hacia dónde se dirigirá la órbita de cualquier x_0 bajo iteración de $F(x) = -x + 4$.

En los ejercicios 24-35, describa el destino de la órbita de cada una de los siguientes x_0 bajo iteración de la función

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x < 1/2; \\ 2 - 2x, & \text{si } x \geq 1/2. \end{cases}$$

24. 2/3

25. 1/6

26. 2/5

27. 2/7

28. 3/14

29. 1/8

30. 1/9

31. 6/11

32. 2/9

33. 0

34. 1/4

35. 1/2

36. Analice el destino de la órbita de 0 bajo iteración de $F(x) = x^2 + c$ para cada uno de los valores de c: 0.4, 0.3, 0.2, 0.1. Use la gráfica y dispositivos técnicos necesarios para explicar lo que encuentre. ¿Hay un cambio en el destino de la órbita de 0 cuando c cambia? Redáctelo en una o dos oraciones.

37. Considere la familia de funciones $F_c(x) = x^2 + c$ que depende de un parámetro c. ¿Para qué valores de c tiene esta función puntos fijos reales? ¿Cuántos?

38. Analice el destino de 0 bajo iteración de $F(x) = x^2 + c$ para cada uno de los valores de c: -0.6, -0.7, -0.8, -0.9. Use la gráfica de F y F^2 y los dispositivos técnicos necesarios para explicar lo que encuentre. ¿Hay un cambio en el destino de la órbita de 0 cuando c cambia? Abréviela en una o dos oraciones.

39. Considere la familia de funciones $F_c(x) = x^2 + c$ que depende de un parámetro c. ¿Para qué valores de c tiene esta función puntos de periodo 2? ¿Cuántos?

8.2 PUNTOS FIJOS Y PUNTOS PERIÓDICOS

Como ocurre en el caso de los puntos de equilibrio para las ecuaciones diferenciales, también los puntos fijos y ciclos para ecuaciones en diferencias se presentan en diversas variedades, dependiendo de lo que sucede en las órbitas cercanas. En esta sección veremos algunos métodos analíticos y cualitativos para distinguir los diferentes tipos de puntos fijos y ciclos.

Iteración gráfica

En la sección previa vimos que la gráfica de una función y la línea diagonal $y = x$ nos dan un método geométrico para encontrar puntos fijos y ciclos. En esta sección veremos que la gráfica de F junto con la línea diagonal $y = x$ también proporcionan una manera conveniente de esbozar otras órbitas geométricamente.

Dada la función F y un x_0, describimos la órbita de x_0 como sigue: comenzamos en el punto (x_0, y_0) sobre la diagonal y dibujamos una línea vertical de este punto a la gráfica de F; tocamos la gráfica en (x_0, x_1), donde $x_1 = F(x_0)$. Ahora trazamos una línea horizontal desde este punto, de regreso a la diagonal. A lo largo de esta línea, los valores y permanecen constantes en $y = x_1$, por lo que tocamos la diagonal en (x_1, x_1). Interpretamos éste, como el segundo punto sobre la órbita.

Continuamos de la misma manera. Trazamos una línea vertical de (x_1, x_1) a la gráfica de F y tocamos la gráfica en (x_1, x_2), donde $x_2 = F(x_1)$. Luego dibujamos una línea horizontal de regreso a la diagonal, alcanzando esta línea en (x_2, x_2). Éste es el segundo punto sobre la órbita.

Siguiendo el mismo procedimiento, la órbita de x_0 se muestra como una secuencia de puntos a lo largo de la diagonal (vea la figura 8.15). La figura resultante, que a veces parece una escalera y otras una telaraña, suele llamarse un **diagrama de red.** El proceso de dibujar líneas verticales a la gráfica y luego líneas horizontales a la diagonal se llama **análisis gráfico** o **iteración gráfica.** En ocasiones agregamos flechas al diagrama para indicar la dirección de la iteración.

La figura 8.16 muestra el diagrama de red para $G(x) = x^2 - 0.7$, usando $x_0 = 1.4$. Aquí observamos claramente dos puntos fijos para G, dados por los puntos en que la gráfica de G cruza la diagonal. Note que la órbita de $x_0 = 1.4$ tiende a alejarse de uno de esos puntos fijos y acercarse al otro.

Otro tipo importante de órbita para sistemas discretos es el ciclo u órbita periódica. Recuerde que para una función F, x_0 se encuentra sobre un ciclo u órbita de periodo n si

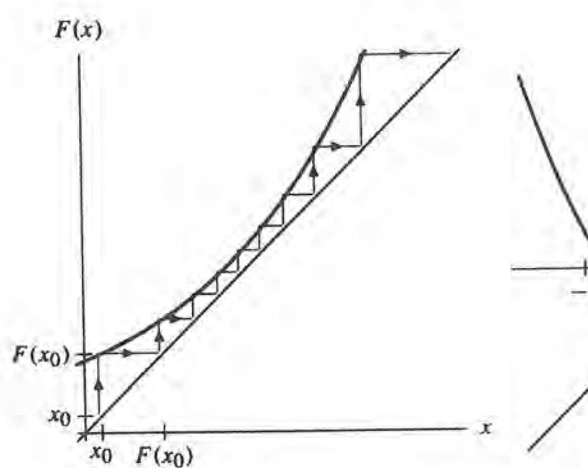


Figura 8.15
Análisis gráfico que muestra la órbita de x_0.

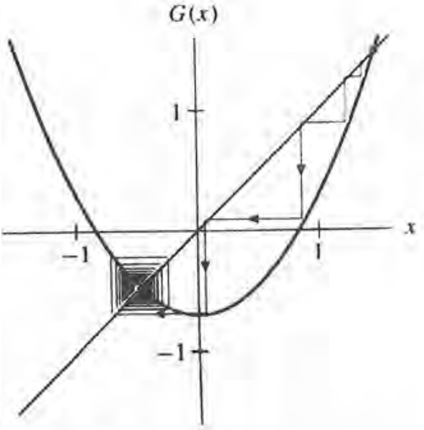


Figura 8.16
Diagrama de red de $G(x) = x^2 - 0.7$ usando la $x_0 = 1.4$.

$F^n(x_0) = x_0$. (Recuerde que F^n indica la n-ésima iteración de F, no la potencia n-ésima.) De modo similar, x_0 se encuentra sobre un ciclo de periodo n si la órbita de x_0 es una secuencia repetida de longitud n de la forma

$$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, \ldots .$$

La iteración gráfica nos permite visualizar ciclos sin tener que calcular la gráfica de F^n. Por ejemplo, 0 y -1 se encuentran sobre un ciclo de periodo 2 para $F(x) = x^2 - 1$, ya que $F(0) = -1$ y $F(-1) = 0$. En la figura 8.17 notamos que este ciclo está representado geométricamente por un cuadrado en el diagrama de red y también vemos que una órbita tiende a este ciclo.

Como vimos en la sección previa, la ecuación logística en diferencias admite ciclos de muchos periodos. Las figuras 8.18 y 8.19 exhiben algunos de ellos usando la iteración gráfica.

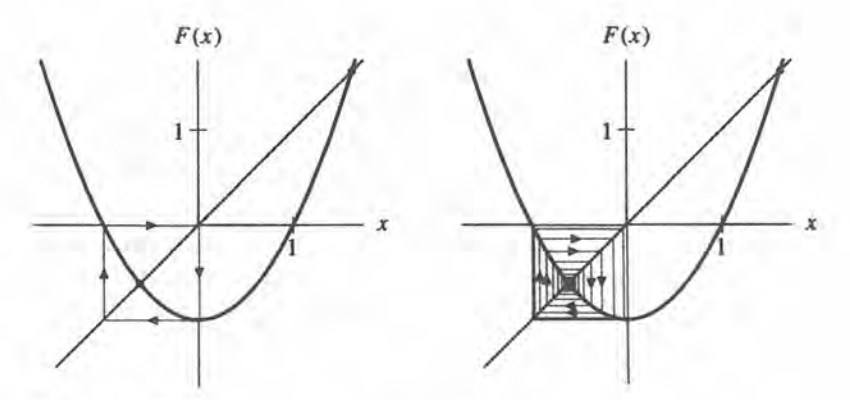


Figura 8.17
Un ciclo 2 para $F(x) = x^2 - 1$ y una órbita que tiende al ciclo 2.

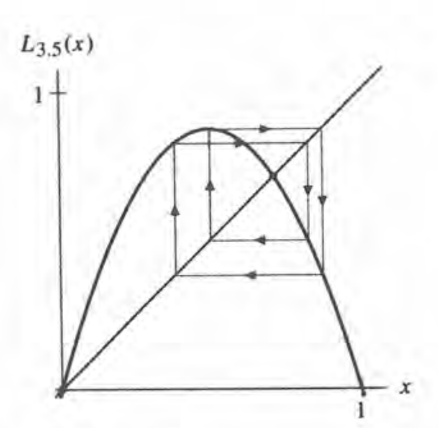


Figura 8.18
Un ciclo 4 para $L_{3.5}(x) = 3.5x(1 - x)$.

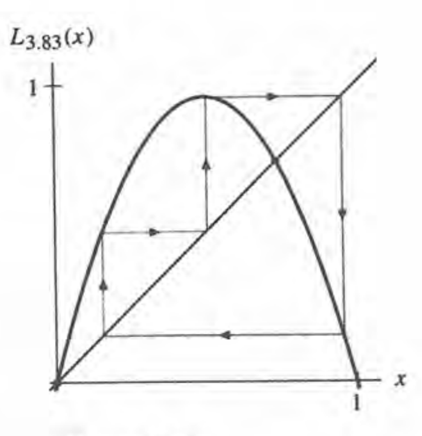


Figura 8.19
Un ciclo 3 para $L_{3.83}(x) = 3.83x(1 - x)$.

Puntos fijos atractores y repulsores

Las figuras 8.20 y 8.21 muestran el análisis gráfico de dos funciones logísticas adicionales, $L_{2.8}(x) = 2.8x(1-x)$ y $L_{3.2}(x) = 3.2x(1-x)$. En el primer caso, observe que la órbita mostrada tiende a un punto fijo; sin embargo, cuando el parámetro se cambia a 3.2, ya no ocurre así. La órbita mostrada se acerca al punto fijo, pero después tiende hacia un ciclo 2. Éste es un ejemplo de una bifurcación, tema que estudiaremos después. Por ahora no pierda de vista que hay una diferencia importante entre el comportamiento de órbitas cerca del punto fijo no nulo en esos dos casos. En el primer caso la órbita es atraída al punto fijo no nulo, mientras que en el segundo la órbita parece ser repelida. Igual que con los puntos de equilibrio de una ecuación diferencial, existen diferentes tipos de puntos fijos y ciclos.

DEFINICIÓN Un punto fijo x_0 de una función F se llama **atractor** si existe un intervalo alrededor de x_0, con la propiedad de que cualquier otro x_1 que permanezca en este intervalo tenga una órbita en éste y tienda a x_0 bajo iteración de F. El punto fijo se llama **repulsor** si existe un intervalo alrededor de x_0, con la propiedad de que cualquier otro x_1 en este intervalo (excepto x_0) tenga una órbita que salga del intervalo bajo iteración de F. Un punto fijo que no es ni atractor ni repulsor se llama **neutro**. ■

Los puntos fijos atractores son los análogos de los sumideros para las ecuaciones diferenciales unidimensionales mientras que los puntos fijos repulsores corresponden a las fuentes.

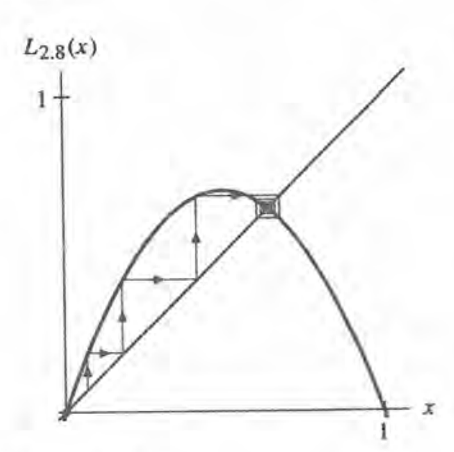


Figura 8.20
Un punto fijo atractor para $L_{2.8}(x) = 2.8x(1 - x)$.

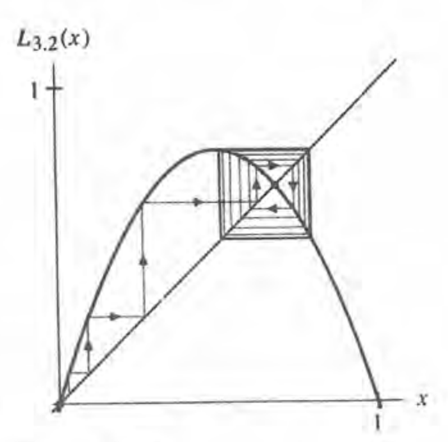


Figura 8.21
Un punto fijo repulsor para $L_{3.2}(x) = 3.2x(1 - x)$.

Puntos fijos de funciones lineales

Para ver qué hace a ciertos puntos fijos atractores y a otros repulsores, consideremos primero las funciones lineales. Para $F(x) = mx$, $x_0 = 0$ es siempre un punto fijo. El análisis gráfico muestra que mientras $|m| < 1$, x_0 atraerá a todas las órbitas (vea la figura 8.22). Note que si $-1 < m < 0$, las órbitas saltarán alrededor de 0 conforme tienden al punto fijo.

Cuando $|m| > 1$, la situación es bastante diferente. Aquí, todas las órbitas tienden a alejarse de 0; el origen es un punto fijo repulsor (vea la figura 8.23). Nuevamente, las órbitas saltan de lado a lado conforme salen del origen cuando $m < -1$.

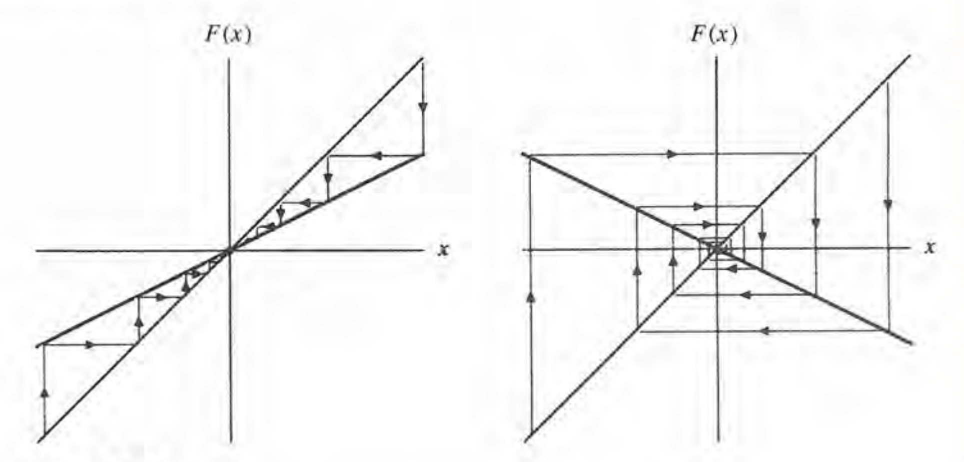


Figura 8.22
La función $F(x) = mx$ tiene un punto fijo atractor en 0 si $|m| < 1$.

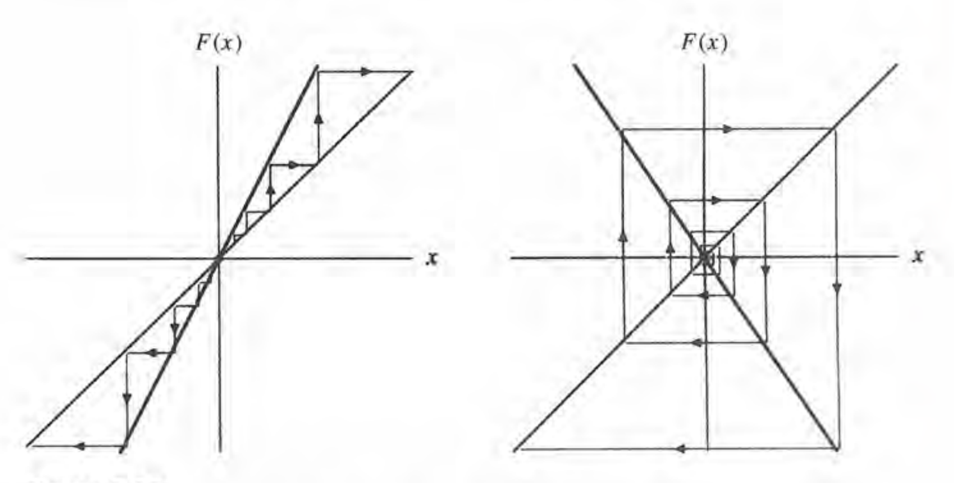


Figura 8.23
La función $F(x) = mx$ tiene un punto fijo repulsor en 0 si $|m| > 1$.

Los casos intermedios, donde $m = \pm 1$, son especiales. Cuando $m = 1$, todos los puntos son fijos, mientras que cuando $m = -1$, los puntos diferentes de cero son de periodo 2.

Clasificación de los puntos fijos

Cuando F es una función no lineal, esta situación sigue siendo cierta, por lo menos cerca de los puntos fijos. Si F tiene un punto fijo en x_0 y $|F'(x_0)| < 1$, entonces la gráfica de F es tangente a una línea recta cuya pendiente es menor que 1 en valor absoluto. Como en el caso de las funciones lineales, el análisis gráfico muestra que las órbitas cercanas deben ser atraídas a x_0. Entonces, un punto fijo x_0 es atractor para toda F donde $|F'(x_0)| < 1$ (vea la figura 8.24). Observe que este resultado es cierto sólo cerca de x_0; lejos de este punto, las órbitas pueden comportarse en forma muy diferente.

De igual manera, si $|F'(x_0)| > 1$, las órbitas cercanas son repelidas de x_0, igual que en el caso lineal. Por tanto, si $|F'(x_0)| > 1$ en el punto fijo, entonces x_0 es un punto fijo repulsor (vea la figura 8.25).

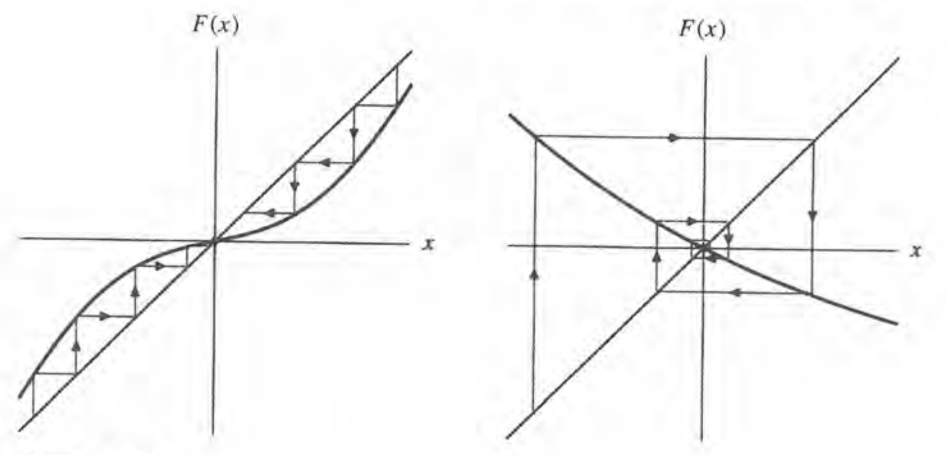


Figura 8.24
Si $|F'(x_0)| < 1$, entonces x_0 es un punto fijo atractor.

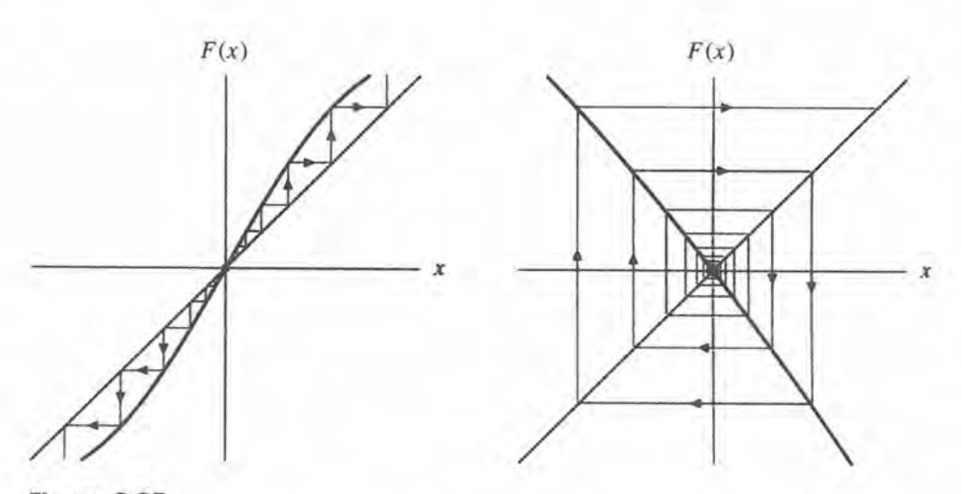


Figura 8.25
Si $|F'(x_0)| > 1$, entonces x_0 es un punto fijo repulsor.

Puntos fijos para la función logística

Considere la función logística $L_{2.8}(x) = 2.8x(1 - x)$. Los puntos fijos para $L_{2.8}$ se encuentran al resolver

$$2.8x(1 - x) = x.$$

El álgebra nos dice que esos puntos fijos son $x = 0$ y $x = 1.8/2.8 \approx 0.64$. Ahora

$$L'_{2.8}(x) = 2.8(1 - 2x),$$

por lo que $L'_{2.8}(0) = 2.8$ y $L'_{2.8}(0.64\ldots) = 2.8(-0.28\ldots) \approx -0.78$. Entonces, 0 es un punto fijo repulsor y 0.64... es un punto fijo atractor. Vimos esto cualitativamente en la figura 8.20.

Como segundo ejemplo, suponga la función logística $L_{3.2}(x) = 3.2x(1 - x)$. Despejando los puntos fijos como lo hicimos antes, los encontramos en $x = 0$ y $x = 2.2/3.2 = 0.6875$. Tenemos ahora

$$L'_{3.2}(x) = 3.2(1 - 2x).$$

Entonces, $L'_{3.2}(0) = 3.2$ y $L'_{3.2}(0.6875) = -1.2$. En este caso ambos puntos fijos son repulsores. También vimos esto en la figura 8.20.

Estos dos ejemplos son casos especiales de la ecuación logística general $L_k(x) = kx(1 - x)$. Recuerde que en la sección previa los puntos fijos de F ocurrieron en 0 y en $(k - 1)/k$, para $k > 1$. Calculamos

$$L'_k(x) = k - 2kx.$$

En ese caso $L'_k(0) = k$. Por tanto, 0 es un punto fijo atractor cuando $0 \leq k < 1$ y un punto fijo repulsor cuando $k > 1$. Además,

$$L'_k\left(\frac{k-1}{k}\right) = k - 2(k - 1) = -k + 2.$$

Entonces $(k - 1)/k$ es un punto fijo atractor cuando $-1 < -k + 2 < 1$, es decir, para $1 < k < 3$. Cuando $k > 3$, este punto fijo es repulsor (vea las figuras 8.26 y 8.27).

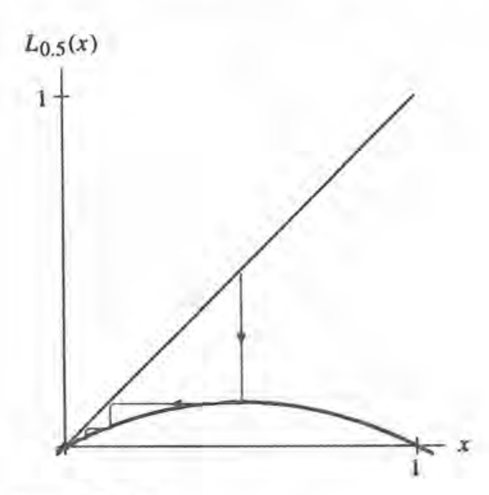


Figura 8.26
Puntos fijos para $L_k(x) = kx(1 - x)$ cuando $k = 0.5$.

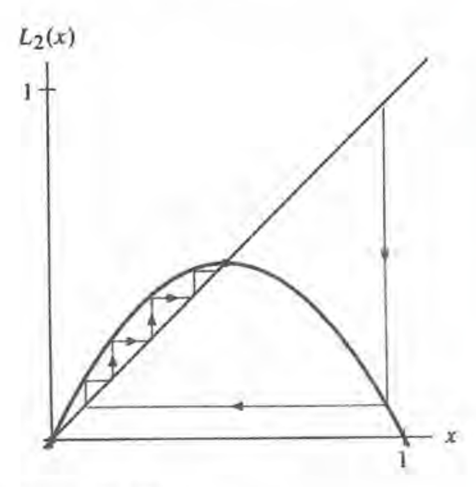


Figura 8.27
Puntos fijos para $L_k(x) = kx(1 - x)$ cuando $k = 2$.

Ejemplos de puntos fijos neutros

Los puntos fijos neutros pueden ocurrir sólo si $F'(x_0) = \pm 1$. Las órbitas cerca de puntos fijos neutros pueden comportarse de diversas maneras. Por ejemplo, considere $F(x) = -x + 4$. Tenemos $F(2) = 2$ y $F'(2) = -1$. Cualquier otro x_0 tiene órbitas que se encuentran sobre ciclos de periodo 2, puesto que $F^2(x) = -(-x + 4) + 4 = x$.

Como otro ejemplo, $G(x) = x + x^2$ tiene un punto fijo en $x = 0$. Vea que $G'(0) = 1$. La gráfica de G muestra que 0 atrae por la izquierda, pero repele por la derecha. Por tanto, 0 es un punto fijo neutro (vea la figura 8.28). Si en vez de esto consideramos $H(x) = x + x^3$, entonces de nuevo 0 es un punto fijo y $H'(0) = 1$. Sin embargo, esta ocasión, $x = 0$ es un punto fijo repulsor, como lo vemos de la iteración gráfica (vea la figura 8.29).

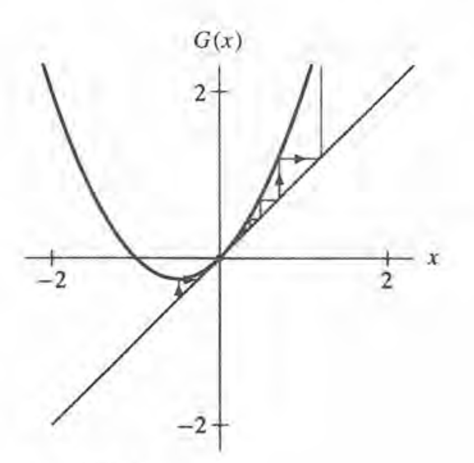


Figura 8.28
$G(x) = x + x^2$ tiene un punto fijo neutro en $x = 0$ y $G'(0) = 1$.

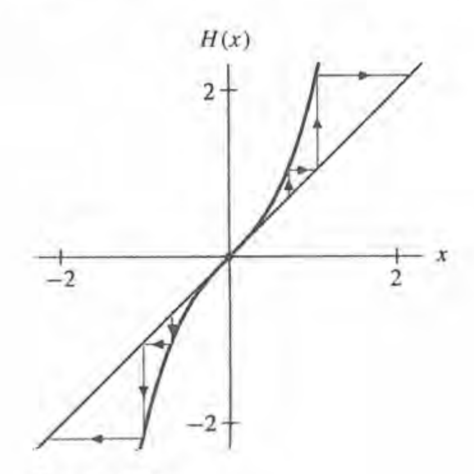


Figura 8.29
$H(x) = x + x^3$ tiene un punto fijo repulsor en $x = 0$, a pesar del hecho de que $H'(0) = 1$.

Clasificación de los puntos periódicos

Los puntos periódicos también pueden clasificarse como atractores, repulsores y neutros. Si x_0 se encuentra sobre un ciclo n de una función dada F, en ese caso la gráfica de F^n encuentra la diagonal en (x_0, x_0). Es decir, F^n tiene un punto fijo en x_0. Por tanto, es natural llamar el ciclo atractor, repulsor o neutro dependiendo de si el punto fijo para F^n tiene esta propiedad.

Por ejemplo, la función $F(x) = x^2 - 1$ tiene un ciclo 2 en 0 y en -1. Como $F^2(x) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$, tenemos

$$(F^2)'(x) = 4x^3 - 4x.$$

Por consiguiente, $(F^2)'(0) = 0$, y 0 se encuentra sobre un ciclo 2 atractor, como vimos en la figura 8.17. Note también que $(F^2)'(-1) = 0$.

El hecho de que $(F^2)'(x_0)$ sea la misma en ambos puntos sobre el ciclo de este ejemplo no es accidental. La regla de la cadena nos dice por qué. Suponga que x_0 y x_1 se encuentran sobre un ciclo 2 para F. De ser así, $F(x_0) = x_1$ y $F(x_1) = x_0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(F^2)'(x_0) &= F'(F(x_0)) \cdot F'(x_0) \\ &= F'(x_1) \cdot F'(x_0).\end{aligned}$$

Es decir, la derivada de F^2 en x_0 es justamente el producto de las derivadas a lo largo de la órbita de x_0. Lo mismo es válido para x_1. De manera más general, si $x_0 \ldots, x_{n-1}$ se encuentran sobre un ciclo de periodo n para F, entonces

$$\begin{aligned}(F^n)'(x_0) &= F'(F^{n-1}(x_0)) \cdot F'(F^{n-2}(x_0)) \cdots F'(x_0) \\ &= F'(x_{n-1}) \cdot F'(x_{n-2}) \cdots F'(x_0),\end{aligned}$$

que es de nuevo el producto de las derivadas a lo largo del ciclo.

Como verificación, para $F(x) = x^2 - 1$ tenemos $F'(0) = 0$ y $F'(-1) = -2$. En consecuencia,

$$(F^2)'(0) = F'(0) \cdot F'(-1) = 0(-2) = 0$$

igual que antes.

Como ejemplo final, consideremos la función

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x < 1/2; \\ 2 - 2x, & \text{si } x \geq 1/2. \end{cases}$$

$x_0 = 2/7$ conduce a un ciclo de periodo 3 para T con órbita 2/7, 4/7, 6/7, 2/7. . . . Calculamos

$$T'(2/7) = 2$$
$$T'(4/7) = -2$$
$$T'(6/7) = -2.$$

Por tanto, tenemos

$$(T^3)'(2/7) = T'(2/7) \cdot T'(4/7) \cdot T'(6/7) = 8,$$

y este ciclo es repulsor. Note que cualquier ciclo para esta función es repulsor ya que la derivada será siempre un producto de números 2 y -2.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 8.2

En los ejercicios 1-11, para cada una de las funciones dadas, encuentre todos los puntos fijos y determine si son atractores, repulsores o neutros.

1. $F(x) = x^2 - 2x$
2. $F(x) = x^5$
3. $F(x) = \operatorname{sen} x$
4. $F(x) = x^3 - x$
5. $F(x) = \arctan x$
6. $F(x) = 3x(1 - x)$
7. $F(x) = (\pi/2) \operatorname{sen} x$
8. $F(x) = x^2 - 3$
9. $F(x) = 1/x$
10. $F(x) = 1/x^2$
11. $F(x) = e^x$

En los ejercicios 12-17, para cada una de las funciones dadas, 0 se encuentra sobre una órbita periódica. Primero determine el periodo de esta órbita; luego decida si este ciclo es atractor, repulsor o neutro.

12. $F(x) = -x^5 + 1$
13. $F(x) = 1 - x^2$
14. $F(x) = (\pi/2) \cos x$
15. $F(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } x < 3.5; \\ 2x - 8, & \text{si } x \geq 3.5. \end{cases}$
16. $F(x) = 1 - x^3$
17. $F(x) = |x - 2| - 1$

En los ejercicios 18-25, cada una de las funciones dadas tiene por lo menos un punto fijo con derivada ± 1. Primero calcule esos puntos fijos. Luego, usando análisis gráfico con una gráfica exacta u otros medios, determine si este punto fijo es atractor, repulsor o neutro.

18. $F(x) = x - x^2$

19. $F(x) = 1/x$

20. $F(x) = \operatorname{sen} x$

21. $F(x) = \tan x$

22. $F(x) = -x + x^3$

23. $F(x) = -x - x^3$

24. $F(x) = e^{x-1}$ (el punto fijo es 1)

25. $F(x) = -e \cdot e^x$ (el punto fijo es -1)

26. Encuentre todos los puntos fijos para $F_c(x) = x^2 + c$ para todos los valores de c. Determine para qué valores de c cada punto fijo es atractor, repulsor y neutro.

27. ¿Cuántos puntos fijos tiene $F(x) = \tan x$? ¿Son atractores, repulsores o neutros? ¿Por qué?

28. ¿Qué puede decir acerca de los puntos fijos para $F_c(x) = ce^x$ con $c > 0$? ¿Qué le dice la gráfica de F_c acerca de esos puntos fijos? Note que cuando $c = 1/e$, $F_c(1) = 1$.

29. Considere la función

$$T(x) = \begin{cases} 4x, & x < 1/2; \\ 4 - 4x, & x \geq 1/2. \end{cases}$$

¿Tiene T ciclos atractores? ¿Por qué sí o por qué no?

30. Recuerde que en cálculo, el método de Newton es un procedimiento iterativo para encontrar las raíces de una función dada P. La iteración de este método se expresa como

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}.$$

(a) Demuestre que una raíz de P para la cual $P'(x) \neq 0$ es un punto fijo para la iteración de Newton.

(b) Suponga que $P(x) = x^3 - x$. Determine si los puntos fijos para la correspondiente iteración de Newton son atractores o repulsores.

8.3 BIFURCACIONES

Igual que las ecuaciones diferenciales, los sistemas dinámicos discretos pueden sufrir cambios en la estructura de sus órbitas cuando varían los parámetros. Esas modificaciones pueden incluir el nacimiento o muerte de puntos fijos y ciclos o transformaciones en el tipo de esas órbitas. Igual que antes, tales cambios se conocen como bifurcaciones.

Bifurcación tangente

Uno de los tipos más simples de bifurcación ocurre cuando, repentinamente, aparecen o desaparecen los puntos fijos o periódicos. Por ejemplo, considere la familia de funciones cuadráticas $F_c(x) = x^2 + c$. Estas tienen puntos fijos cuando

$$x^2 + c = x.$$

Usando la fórmula cuadrática, vemos que hay dos puntos fijos para F_c dados por

$$p_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}.$$

Esos puntos fijos son reales si $1 - 4c \geq 0$, por lo que F_c tiene puntos fijos sólo si $c \leq 1/4$. Si $c > 1/4$, F_c no los tiene. Si $c = 1/4$, los dos puntos fijos son el mismo, ya que $p_+ = p_- = 1/2$. Para $c < 1/4$, este punto se escinde en los puntos fijos distintos p_+ y p_-. Entonces ocurre una bifurcación en $c = 1/4$, puesto que cuando c decrece a través de 1/4 nace un par de puntos fijos.

Cualitativamente, la gráfica de F_c se encuentra arriba de la diagonal $y = x$ cuando $c > 1/4$, y por esa razón aquí no encontraremos puntos fijos. Cuando $c = 1/4$, la gráfica es tangente a la diagonal en un punto. Como vemos en la figura 8.30, éste es un punto fijo neutro. Cuando $c < 1/4$, la gráfica encuentra a la diagonal en dos puntos fijos distintos $p_{\pm}$.

Para determinar el carácter de esos puntos fijos, calculamos $F_c'(x) = 2x$, de manera que

$$F_c'(p_+) = 1 + \sqrt{1-4c}.$$

Ahora $\sqrt{1 - 4c} > 0$ cuando $c < 1/4$, por tanto, podemos inferir que $F_c'(p_+) > 1$ para esos valores de c. Entonces p_+ es un punto fijo repulsor para toda $c < 1/4$. Para p_-, la situación es más complicada. Tenemos

$$F_c'(p_-) = 1 - \sqrt{1-4c},$$

por consiguiente $F_c'(p_-) < 1$ para todos los valores de $c < 1/4$. Para garantizar que p_- es atractor, debe existir la condición en que $F_c'(p_-) > -1$. Esto sucede si

$$\begin{aligned} -1 &< 1 - \sqrt{1-4c} = F_c'(p_-) \\ 2 &> \sqrt{1-4c} \\ -3/4 &< c. \end{aligned}$$

Por tanto, el punto fijo p_- es atractor para $-3/4 < c < 1/4$ y repulsor para $c < -3/4$.

El análisis gráfico proporciona una vista alternativa de esta bifurcación. La figura 8.30 muestra algunas órbitas antes, en y después de la bifurcación cuando $c = 0.5$, 0.25 y

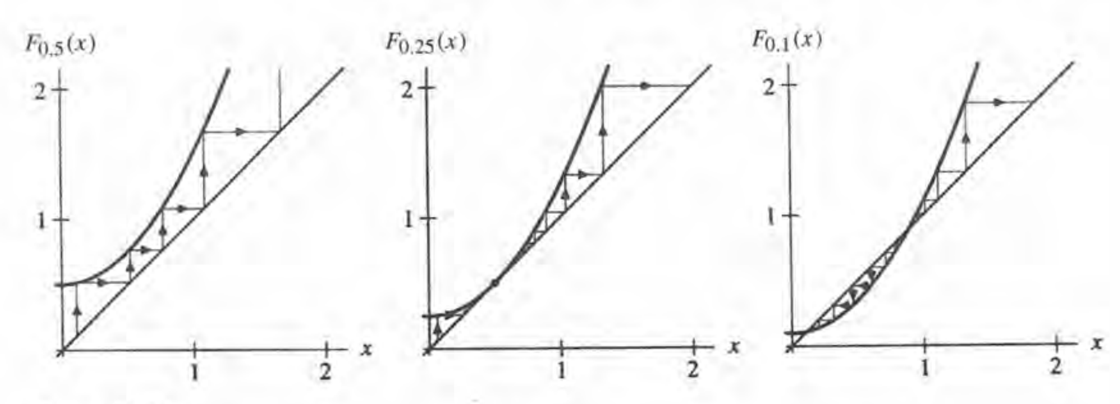


Figura 8.30
Análisis gráfico de $F_c(x) = x^2 + c$ para $c = 0.5$, 0.25 y 0.1.

0.1. Por supuesto, no hay realmente un "antes" y "después" de la bifurcación. Este cambio también puede observarse cuando c se incrementa, en cuyo caso esta bifurcación consiste en la unión y la desaparición de los dos puntos fijos cuando $c = 1/4$. Note que esta separación es bastante similar a algunas de las bifurcaciones de los puntos de equilibrio que encontramos para las ecuaciones diferenciales.

Igual que con las ecuaciones diferenciales, una figura es una manera conveniente de exhibir los cambios que ocurren en una bifurcación. La figura 8.31 muestra el diagrama correspondiente a la bifurcación anterior. Aquí los puntos fijos $p_{\pm}$ están graficados como funciones de c. El parámetro c se traza sobre el eje horizontal y los valores x de los puntos fijos, sobre el eje vertical. Cuando c disminuye a través de 1/4, vemos la bifurcación: nace un punto fijo neutro en $c = 1/4$, $x = 1/2$. Éste se escinde inmediatamente en un par de puntos fijos, uno atractor y otro repulsor. Cualquier bifurcación de puntos fijos o ciclos que proceden de esta manera se llama una **bifurcación tangente** o **bifurcación nodal de punto de silla**.

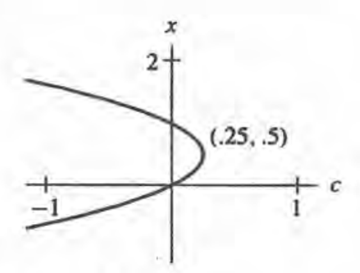


Figura 8.31
El diagrama de bifurcación tangente.

Bifurcación de tenedor

La estructura de un punto fijo de un sistema dinámico discreto también puede transformarse. Por ejemplo, considere la familia de funciones $G_\alpha(x) = x^3 - \alpha x$ que depende del parámetro α. Los puntos fijos de G_α son las soluciones de $x^3 - \alpha x = x$, que son $x = 0$, $\pm\sqrt{1 + \alpha}$. Para $\alpha \leq -1$, G_α tiene sólo un punto fijo en $x = 0$, pero cuando $\alpha > -1$, hay tres puntos fijos; por consiguiente, ocurre una bifurcación en $\alpha = -1$. Note que $G'_\alpha(0) = -\alpha$, por lo que el punto fijo en cero es atractor si $|\alpha| < 1$ y repulsor si $|\alpha| > 1$. Además, $G'_\alpha(\pm\sqrt{1 + \alpha}) = 3 + 2\alpha$. Como $\alpha > -1$, se infiere que ambos puntos fijos son repulsores y la bifurcación es como se muestra en la figura 8.32. Debido a la forma de este diagrama, esta bifurcación se llama una **bifurcación de tenedor**.

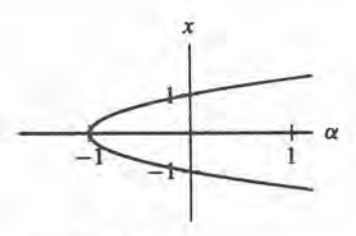


Figura 8.32
El diagrama de bifurcación de tenedor.

Note que en el punto de bifurcación ocurren dos cosas. Cuando α crece a través de -1, el punto fijo en $x = 0$ cambia de pronto de repulsor a atractor. Mientras tanto, nace un nuevo par de puntos fijos repulsores. También es posible que un punto fijo cambie de atractor a repulsor y dé nacimiento simultáneamente a un par de nuevos puntos fijos atractores. Este tipo de bifurcación se llama también una bifurcación de tenedor.

Bifurcación de duplicación del periodo

Uno de los tipos más importantes de bifurcaciones para sistemas dinámicos discretos es la *bifurcación de duplicación del periodo.* Ésta produce un nuevo ciclo con periodo doble al del ciclo original. Por ejemplo, considere de nuevo la familia $F_c(x) = x^2 + c$. Recuerde que esta función tiene dos puntos fijos dados por

$$p_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}.$$

El punto fijo p_- es atractor si $-3/4 < c < 1/4$ y repulsor si $c < -3/4$. El hecho de que $F_c'(p_-) = -1$ en $c = -3/4$ es la señal de que puede ocurrir una bifurcación. El análisis gráfico nos sugiere que sucederá. En la figura 8.33 exhibimos el diagrama de red de F_c para los valores c próximos $c = -0.6$ y $c = -0.9$. Observe que las órbitas se acercan al punto fijo atractor cuando $c = -0.6$ y que tienden a un ciclo atractor de periodo 2 cuando $c = -0.9$.

Para encontrar los ciclos de periodo 2 para F_c, debemos resolver la ecuación $F_c^2(x) = x$. Escribiendo explícitamente esta ecuación, obtenemos

$$(x^2 + c)^2 + c = x,$$

o en forma simplificada,

$$x^4 + 2cx^2 - x + c^2 + c = 0.$$

Esta ecuación parece difícil de resolver. Sin embargo, recuerde que cualquier punto fijo para F_c también debe solucionarla, porque si $F_c(x_0) = x_0$, entonces $F_c{}^2(x_0) = x_0$. Pero ya conocemos los puntos fijos; son $p_{\pm}$. De aquí que $(x - p_+)(x - p_-) = x^2 - x + c$ es un factor de $F^2(x) - x$.

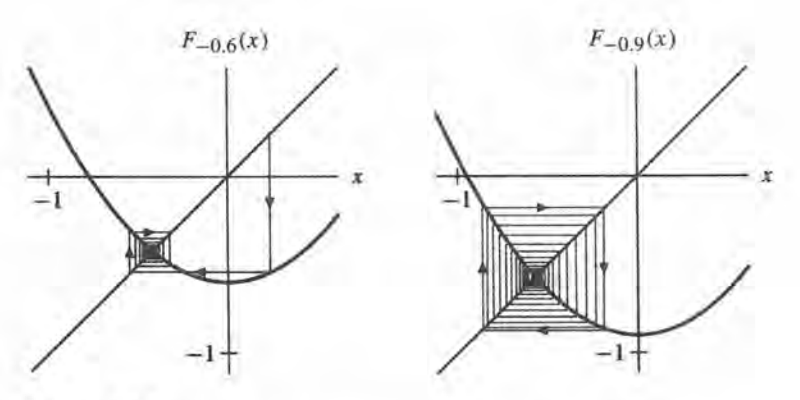


Figura 8.33
Análisis gráfico de $F_c(x) = x^2 + c$ cuando $c = -0.6$ y $c = -0.9$.

Al efectuar la división, encontramos

$$\frac{x^4 + 2cx^2 - x + c^2 + c}{x^2 - x + c} = x^2 + x + c + 1.$$

Por tanto, para encontrar los ciclos de periodo 2, sólo tenemos que resolver la ecuación cuadrática

$$x^2 + x + c + 1 = 0.$$

Las raíces de ésta son

$$q_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3 - 4c}}{2},$$

dada por la fórmula cuadrática.

Note que $q_{\pm}$ son números reales sólo si $c < -3/4$. De modo que un ciclo de periodo 2 aparece precisamente cuando c decrece a través de $c = -3/4$. Dejamos al lector que demuestre que este ciclo es atractor para c en el intervalo $-5/4 < c < -3/4$ y repulsor para $c < -5/4$ (para ello, revise los ejercicios). Hemos ampliado así el diagrama de bifurcación de la figura 8.31 al de la figura 8.34.

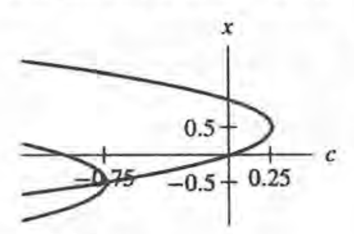


Figura 8.34
El diagrama de bifurcación para $F_c(x) = x^2 + c$ que muestra los puntos fijos y 2-ciclos.

Cualquier bifurcación en que un ciclo dado cambia de atractor a repulsor (o viceversa) con la derivada pasando por –1, y acompañada por el nacimiento de un nuevo ciclo con el doble del periodo original, se llama **bifurcación de duplicación de periodo**.

Las gráficas de la segunda iteración de F_c proporcionan una vista cualitativa de esta bifurcación de duplicación de periodo, es decir, $F_c^2(x) = x^4 + 2cx^2 + c^2 + c$. La figura 8.35 nos muestra lo anterior para valores de $c = -0.6$, $c = -0.75$ y $c = -0.9$. Note cómo la gráfica de F_c^2 se invierte sobre la diagonal en $c = -0.75$ para producir un par de nuevos puntos fijos para F_c^2 cuando $c < -0.75$.

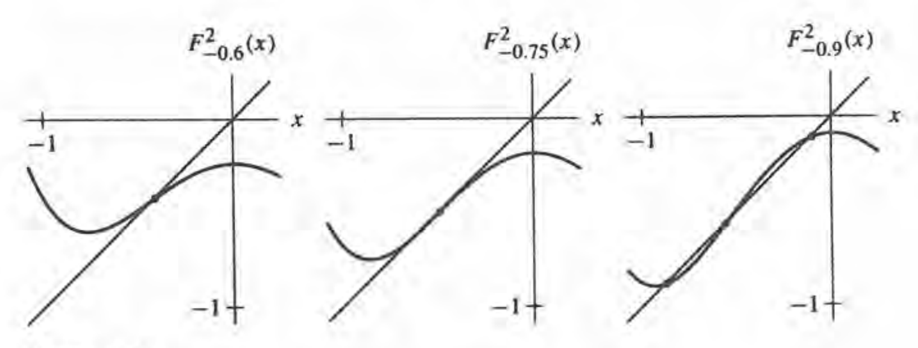


Figura 8.35
Las gráficas de $F_c^2(x)$ para $c = -0.6$, $c = -0.75$ y $c = -0.9$.

La ecuación logística

Los tipos de bifurcaciones analizados en esta sección son sólo el principio de un largo asunto acerca de cómo evolucionan los sistemas dinámicos discretos conforme varían los parámetros. Para ilustrar esto de manera concreta, volvemos a la familia logística de funciones dada por $L_k(x) = kx(1-x)$. Recuerde que x representa la fracción de la máxima población posible de una especie, por lo que sólo consideraremos valores x en el intervalo $0 \leq x \leq 1$.

Usaremos una combinación de métodos cualitativos, analíticos y numéricos para analizar esta familia de funciones. Sin embargo, el destino de las órbitas para muchos valores de los parámetros en este sistema es todavía un problema no resuelto, por lo que no seremos capaces de describir completamente lo que sucede para todo valor paramétrico y x_0.

El primer paso en el análisis de esta familia de funciones es encontrar los puntos fijos. Como hemos visto, L_k tiene algunos de éstos en 0 y en el punto $p_k = (k-1)/k$. Observe que p_k se encuentra en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ sólo si $k \geq 1$; de otra manera, p_k es negativo y no es de interés en términos de un modelo de población.

Al diferenciar L_k, encontramos $L_k'(x) = k(1-2x)$. Por tanto $L_k'(0) = k$. Concluimos que 0 es un punto fijo atractor para $0 \leq k < 1$ y un punto fijo repulsor si $k > 1$. La iteración gráfica nos da mucho más información. En la figura 8.36 vemos que, en tanto $k < 1$, la gráfica de L_k encuentra la diagonal en el punto fijo 0 y permanece debajo de esta línea para todos los otros valores de x. Esto significa que todas las órbitas tienden al punto fijo. En términos de nuestra población, concluimos que si $k < 1$, la especie se extinguirá.

En el otro punto fijo, calculamos

$$L_k'(p_k) = k\left(1 - 2\left(\frac{k-1}{k}\right)\right) = -k + 2.$$

Por tanto, p_k es atractor para $-1 < -k + 2 < 1$ o $1 < k < 3$. Usando de nuevo la iteración gráfica, vemos que en la figura 8.36 todos los puntos silla en el intervalo $0 < x < 1$ tienen órbitas que tienden a este punto fijo atractor. En términos de poblaciones, concluimos que cuando $1 < k < 3$, la población a nuestra especie se estabiliza finalmente bajo el valor constante $(k-1)/k$.

Si $k = 3$, tenemos $L_k'(p_k) = -1$, y si $k > 3$, encontramos $L_k'(p_k) < -1$. Así entonces, p_k cambia de un punto fijo atractor a uno repulsor cuando k crece a través de 3 y esperamos una bifurcación de duplicación de periodo en este punto. En el ejercicio 10 le pediremos comprobarlo en forma analítica. Como es usual, podemos usar la iteración gráfica

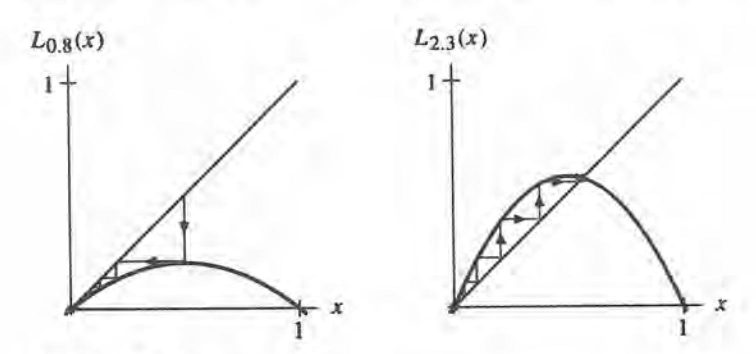


Figura 8.36
Las poblaciones se extinguen cuando $k = 0.8$, pero se nivelan cuando $k = 2.3$.

para verificarlo cualitativamente. La figura 8.37 muestra órbitas de L_k cuando $k = 2.8$ y $k = 3.2$. Tome en cuenta que esas órbitas tienden al punto fijo atractor cuando $k = 2.8$, pero a un ciclo 2 cuando $k = 3.2$. En términos de poblaciones, cuando k es ligeramente mayor que 3, esperamos que al final éstas se muevan en un ciclo bianual: un año la población será alta; el siguiente, será baja.

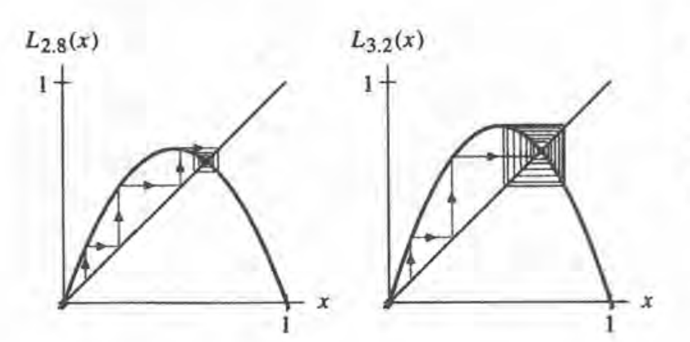


Figura 8.37
La bifurcación por duplicación del periodo en la familia logística cuando $k = 2.8$ y cuando $k = 3.2$.

La ruta de la duplicación del periodo al caos

Es imposible usar métodos analíticos para describir mucho de lo que ocurre en la familia logística cuando k continúa creciendo, por lo que recurriremos a métodos cualitativos y numéricos. En el resto de esta sección daremos sólo un vistazo a la muy complicada matemática involucrada. La figura 8.38 proporciona una "película" de la gráfica de L_k para 6 valores k en el rango $1 \leq k \leq 4$. Conforme k crece, observe cómo decrece la pendiente de la línea tangente a la gráfica de L_k en p_k, y finalmente pasa por el punto de duplicación del periodo en el que la pendiente es -1. En este punto de bifurcación podemos observar los cambios dinámicos de p_k de atractor a repulsor.

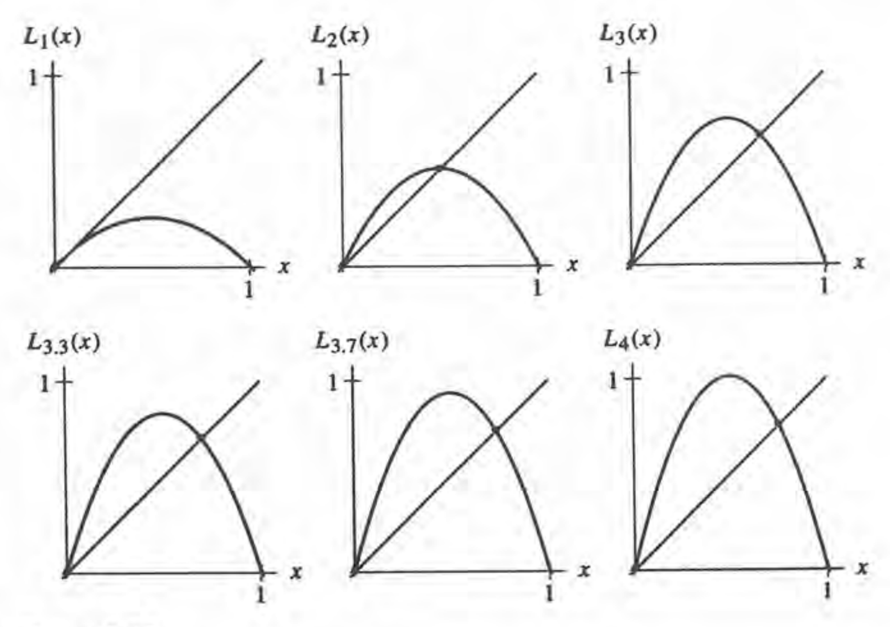


Figura 8.38
Gráficas de $L_k(x)$ para $k = 1, 2, 3, 3.3, 3.7$ y 4.

La figura 8.39 proporciona otra película, esta vez de la gráficas de L_k^2 para otros 6 valores k. Los pequeños cuadros superpuestos en cada una de esas gráficas no son diagramas de red; más bien, intentan atraer su atención a la parte de la gráfica de L_k^2 dentro de cada cuadro. Note que cada una de esas gráficas se ven exactamente como las de L_k en la figura 8.38, sólo que un poco menores y de cabeza. Al observar los cambios de k, vemos que esas partes pequeñas de la gráfica de L_k^2 se comportan como las gráficas de L_k. Por tanto, esperamos que L_k^2 experimente las mismas bifurcaciones que L_k en las imágenes previas.

Para ser más precisos, note que hay un punto fijo para L_k^2 en el borde derecho de los pequeños cuadros. Éste es en realidad un punto fijo para L_k, no un punto de periodo 2. Cuando k crece en esas figuras, lo primero que observamos es el nacimiento de un nuevo punto fijo para L_k^2 (el cual se encuentra sobre un ciclo de periodo 2 para L_k), y que llamaremos q_k. El punto q_k al principio es atractor, luego repulsor, cuando la derivada pasa de L_k^2 en q_k por -1. Esperamos entonces que L_k^2 sufra una bifurcación por duplicación del periodo cuando k crece. Es decir, para algún valor intermedio de k, el ciclo de periodo 2 que contiene a q_k dejará de ser atractor y se volverá repulsor. Mientras tanto, nacerá un nuevo ciclo atractor de periodo doble, un ciclo 4.

Otra manera de verlo sería dibujar las gráficas de L_k^4 sobre los intervalos de valores x contenidos en cada uno de los pequeños cuadros en la figura 8.39. Al hacerlo así, vemos que las gráficas de L_k^4 se parecen a las de L_k^2 en la figura 8.39, sólo que mucho más pequeñas y puestas de cabeza. Entonces, si amplificamos esas imágenes y las giramos, vemos que las partes en los cuadros de las gráficas de L_k^2 y L_k^4 se ven exactamente igual que las de L_k y L_k^2 en las figuras 8.38 y 8.39, respectivamente.

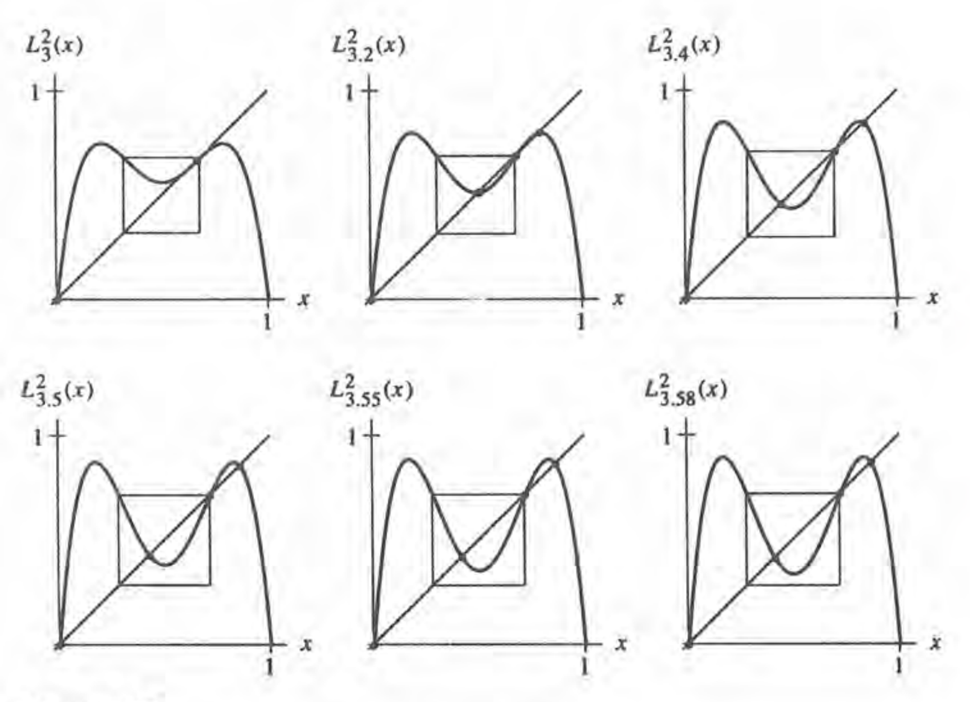


Figura 8.39
Gráficas de $L_k^2(x)$ para k = 3, 3.2, 3.4, 3.5, 3.55 y 3.58.

Este proceso de iteración y acercamiento a pequeñas porciones de una gráfica se llama **renormalización**. Tomado de la física, este proceso nos permite reconocer ciertos patrones que ocurren repetidas veces. Por ejemplo, ahora podríamos renormalizar la gráfica de L_k^4. Veríamos que, en un intervalo más pequeño de valores k, el ciclo 4 analizado antes sufriría también una bifurcación por duplicación del periodo. Es decir, el ciclo 4 atractor se volvería repulsor y surgirá un nuevo ciclo 8 atractor. Esta situación continúa con los nacimientos sucesivos de los ciclos atractores de periodos 16, 32, 64, etc. Este fenómeno ha sido llamado la "ruta al caos por duplicación del periodo".

Caos

Al continuar creciendo el parámetro k, eventualmente dejamos el intervalo de duplicación del periodo y encontramos un nuevo tipo de comportamiento, el caos (vea el laboratorio 1 al final de este capítulo). Para un gran número de valores k en el intervalo $3.57 < k \leq 4$, la familia logística exhibe el tipo de conducta mostrada para el caso $k = 3.9$ en las figuras 8.3 y 8.5. Si bien no podemos explicar de manera satisfactoria qué está sucediendo a las órbitas para valores en este régimen, sí podemos describir algunos modelos simplificados de este comportamiento caótico. Éste es el tema de la siguiente sección.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 8.3

En los ejercicios 1-7, cada función sufre una bifurcación de puntos fijos en el valor dado del parámetro. En cada caso use métodos analíticos o cualitativos para identificarla como tangente, tenedor o de duplicación del periodo, o bien ninguna de ellas. Analice el comportamiento de las órbitas cerca del punto fijo considerado antes, durante y después de la bifurcación.

1. $F_\alpha(x) = x + x^2 + \alpha, \quad \alpha = 0$

2. $F_\alpha(x) = \alpha x, \quad \alpha = -1$

3. $F_\alpha(x) = \alpha \operatorname{sen} x, \quad \alpha = 1$

4. $F_\alpha(x) = \alpha \operatorname{sen} x, \quad \alpha = -1$

5. $F_\alpha(x) = \alpha - x^2, \quad \alpha = -1/4$

6. $F_\alpha(x) = \alpha \arctan x, \quad \alpha = 1$

7. $F_\alpha(x) = \alpha(x + x^2), \quad \alpha = 0$

8. Considere la familia de funciones $F_\beta(x) = x^3 + \beta$. Encuentre todos los valores β para los cuales esta familia sufre una bifurcación de puntos fijos. Determine el tipo de bifurcación que ocurre en cada punto y luego esboce el diagrama de bifurcación para esta familia.

9. Considere la familia de funciones dada por

$$T_\mu(x) = \begin{cases} \mu x, & \text{si } x < 1/2; \\ \mu(1 - x), & \text{si } x \geq 1/2. \end{cases}$$

Analice en detalle la bifurcación de puntos fijos que ocurre en $\mu = 1$ para esta familia. Esboce el diagrama de bifurcación de punto fijo.

10. Para la familia logística $F_k(x) = kx(1 - x)$, muestre explícitamente que existe un ciclo de periodo 2 para $k > 3$.

11. Considere la familia de funciones $F_c(x) = x^2 + c$. Esboce las gráficas de F_c para $c = 0.25, 0, -0.75, -1, -1.5$ y -2 para $-2 \leq x \leq 2$. Luego esboce las gráficas de F_c^2 para $c = -0.75, -1, -1.25, -1.3, -1.35$ y -1.4. ¿Hay alguna similaridad entre esas dos familias de gráficas? Analícelo en un breve ensayo, compleméntelo con figuras.

8.4 CAOS

En esta sección comenzaremos el estudio del comportamiento caótico. Hasta hace pocos años la mayoría de los científicos y matemáticos pensaban que las ecuaciones diferenciales y en diferencias no exhibían el tipo de comportamiento que ahora llamamos caos, o bien que éste era altamente improbable en modelos matemáticos simples. Ahora sabemos que esto no es así. Hay muchos modelos cuya conducta es bastante errática y persiste cuando se cambian los parámetros. Los matemáticos han empezado a desarrollar técnicas para predecir la aparición del caos y para determinar el alcance o límites de este comportamiento. En este capítulo usaremos varios procedimientos cualitativos y numéricos para explicar e ilustrar el concepto del caos.

Un ejemplo sin caos

En cierta manera, caos significa imposibilidad de predicción. Hasta ahora, la mayor parte de las ecuaciones diferenciales y en diferencias que hemos encontrado han sido completamente predecibles. Por ejemplo, consideremos el modelo logístico simple discreto

$$P_{n+1} = 2P_n(1 - P_n).$$

Como hemos visto, este sistema tiene dos puntos fijos, en 0 y en 1/2. El análisis gráfico muestra que la órbita de cualquier x_0 en el intervalo $0 < x < 1$ tiende a 1/2 (vea la figura 8.40). El único punto adicional, $x_0 = 1$, tiene una órbita que al final queda fija. Conocemos entonces el destino de todas las órbitas.

En la vida real rara vez conocemos un x_0 para nuestra órbita de manera precisa. Por ejemplo, es muy probable que no conozcamos el valor exacto de la población en el tiempo 0; quizá dejaremos de contar unos pocos individuos en nuestro conteo inicial. Sin embargo, si nuestro modelo es el simple modelo logístico de arriba, entonces esta inexactitud no importa mucho. Una pequeña fluctuación en nuestro x_0 inicial en el intervalo $0 < x < 1$ no alterará en absoluto nuestras predicciones.

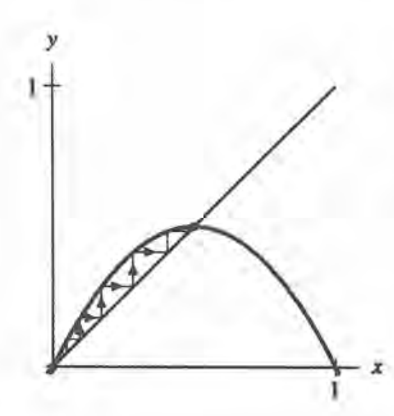


Figura 8.40
Análisis gráfico de $F(x) = 2x(1 - x)$. Este sistema tiene dos puntos fijos, en 0 y en 1/2. La órbita de cualquier x_0 en el intervalo $0 < x_0 < 1$ tiende a 1/2. El único otro punto, $x_0 = 1$, tiene una órbita que al final queda fija.

Una función logística caótica

Comparemos ahora las órbitas del modelo logístico anterior con las de

$$P_{n+1} = 4P_n(1 - P_n),$$

donde sólo hemos cambiado el parámetro de crecimiento de 2 a 4. Como siempre, estudiar este sistema es lo mismo que iterar la función $L_4(x) = 4x(1 - x)$. Esta función tiene puntos fijos en 0 y 3/4 y en 1/2 y 1. Pero consideremos el destino de virtualmente cualquier otra órbita. En la figura 8.41 calculamos el diagrama de red para los primeros 200 puntos sobre la órbita de 0.123 para esta función. Es difícil distinguir un patrón en esta figura. Un histograma y una serie de tiempo para esta órbita confirman el comportamiento errático (vea las figuras 8.42 y 8.43). En el histograma vemos que la órbita parece visitar muchas veces todo pequeño subintervalo en $0 \leq x \leq 1$.

Si repite este experimento para varios puntos silla en el intervalo $0 < x < 1$ en esencia, verá los mismos resultados en cada caso. Por supuesto, los puntos fijos y los que tienden a ser puntos fijos dan diagramas bastante diferentes. Sin embargo, virtualmente cualquier otro punto silla da figuras que se parecen a los de las figuras 8.42 y 8.43 en su complejidad.

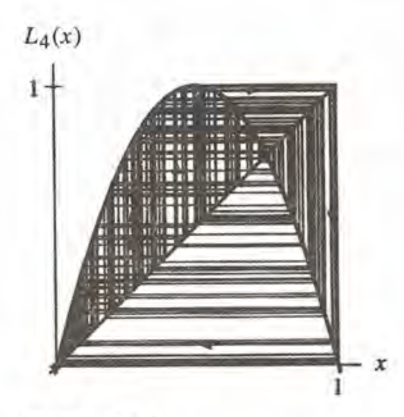


Figura 8.41
Diagrama de red de la órbita de 0.123 bajo $L_4(x) = 4x(1 - x)$.

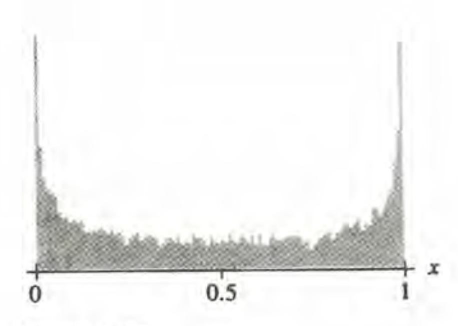


Figura 8.42
Histograma de la órbita en la figura 8.41.

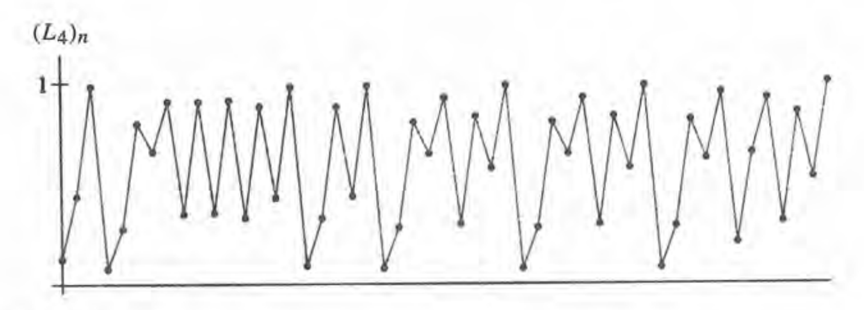
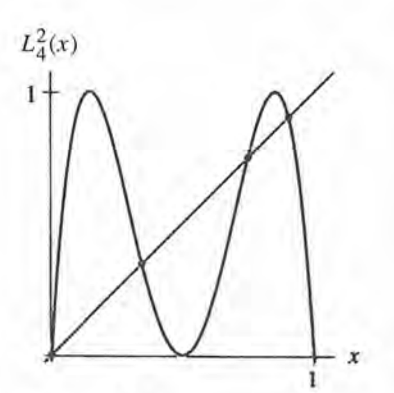
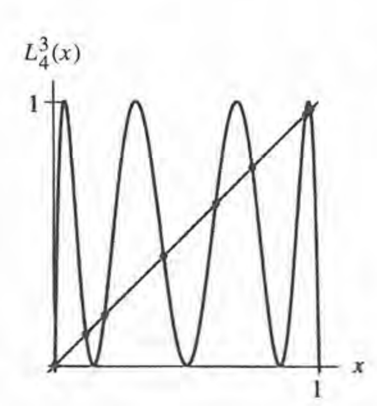


Figura 8.43
Serie de tiempo para la órbita de 0.123 bajo $L_4(x) = 4x(1 - x)$.





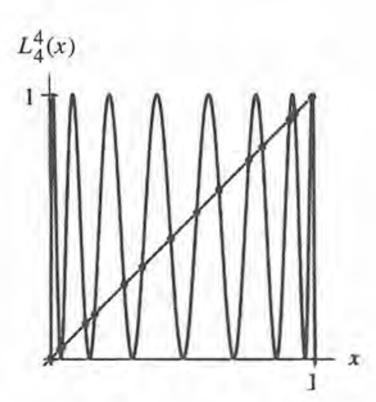


Figura 8.44
Gráficas de L_4^2, L_4^3 y L_4^4.

Esos experimentos con computadora sugieren que la mayor parte de las órbitas de $L_4(x) = 4x(1 - x)$ se comportan de manera errática. Sin embargo, también existen muchos ciclos para L_4. En la figura 8.44 están trazadas las gráficas de L_4^2, L_4^3 y L_4^4. Note que la gráfica de L_4^n parece cruzar la diagonal $y = x$ en 2^n puntos, dando un número infinito de ciclos con periodo arbitrario alto en el intervalo $0 \leq x \leq 1$.

Otro elemento importante en nuestro análisis del comportamiento caótico es la **dependencia sensitiva respecto a las condiciones iniciales**. Esto se ilustra en la figura 8.45, donde están trazadas las series de tiempo para las órbitas de 0.123 y 0.124. Observe que al principio las órbitas están muy cerradas, pero después de unas cuantas iteraciones, ellas se separan y en adelante tienen poco parecido entre sí. Un pequeño cambio en la tercera cifra decimal de nuestro x_0 ha dado lugar a un gran cambio en la órbita siguiente.

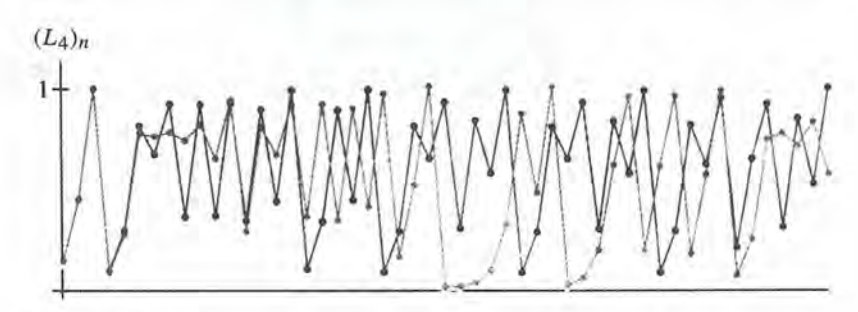


Figura 8.45
Serie de tiempo para la órbita de 0.123 en gris claro; para 0.124 en gris oscuro.

Un sistema de modelo caótico

Para formarnos una idea del comportamiento caótico que observamos en la función logística $L_4(x) = 4x(1 - x)$, veremos un sistema dinámico discreto que es mucho más fácil de entender. Consideremos la función T definida para $0 \leq x < 1$ por

$$T(x) = 10x \mod 1.$$

Esta notación significa que para calcular $T(x)$ multiplicamos primero x por 10 y luego cancelamos la parte entera, manteniendo sólo la parte fraccionaria del resultado. Por ejemplo,

$$T\left(\tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{10}{3} - 3 = \tfrac{1}{3},$$

$$T(0.232323\ldots) = 2.32323\ldots - 2 = 0.32323\ldots,$$

y

$$T(0.1111\ldots) = 1.111\ldots - 1 = 0.111\ldots.$$

En general, si $0 \leq x < 1$, podemos escribir el desarrollo decimal de x en la forma

$$x = .a_1a_2a_3\ldots,$$

donde las a_i son dígitos entre 0 y 9. Entonces

$$10x = a_1.a_2a_3a_4\ldots$$

de modo que

$$T(x) = 10x - a_1 = 0.a_2a_3a_4\ldots;$$

es decir, T simplemente cancela o suprime el primer dígito en el desarrollo decimal de x. Por esta razón, a T se le llama la **función de supresión**. Por ejemplo

$$T(0.\overline{123}) = 0.\overline{231}$$

y

$$T^2(.25) = T(.5) = 0.$$

La notación $0.\overline{123}$ denota la secuencia repetida 0.123123123. . .

Densidad de los puntos periódicos

Debido a la especial definición de la función de supresión, los puntos periódicos de T son fáciles de localizar. Cualquier x cuyo desarrollo decimal se repite se encuentra sobre un ciclo para T. Por ejemplo, 2/9 es un punto fijo, ya que

$$\frac{2}{9} = 0.222\ldots$$

y $T(0.222\ldots) = 0.222\ldots$. De modo similar, $0.\overline{37}$ se encuentra sobre un ciclo 2 y $0.\overline{1234}$ está sobre un ciclo 4. Obviamente T tiene un número infinito de puntos periódicos en $[0, 1)$, y los periodos de esos puntos pueden ser arbitrariamente grandes. Además, a diferencia de las funciones logísticas, podemos escribir de manera explícita todos los puntos periódicos para T.

Sin embargo, hay más acerca de esto. Dada cualquier x en el intervalo $[0, 1)$, es posible hallar un punto periódico de T cerca de x. Esto es así, ya que si x tiene el desarrollo decimal

$$x = 0.a_1a_2a_3\ldots,$$

entonces el punto

$$y = 0.\overline{a_1a_2\ldots a_n}$$

está más cercano a x (dentro de $1/10^n$ unidades) y, además, con periodicidad n.

Por ejemplo, supongamos que nos dan el número

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707106781\ldots$$

y se nos pide encontrar un punto periódico dentro de 0.001 unidades de x. Escogeríamos $x_1 = 0.\overline{707}$, ya que

$$|0.707106781\ldots - 0.\overline{707}| = 0.00060093\ldots.$$

y x_1 tiene periodo 3. Pero hay muchas otras opciones que funcionan igualmente bien, incluyendo $x_2 = 0.\overline{707106}$, que está mucho más cerca de x que x_1 y tiene periodo 6. Alternativamente, podríamos escoger $0.\overline{7071999222555}$, que está también dentro de 0.001 unidades de x y cuyo periodo es 13.

Extrapolando de este ejemplo, vemos que, independientemente de qué tan pequeño escojamos un subintervalo en $[0, 1)$, siempre podemos encontrar puntos periódicos dentro de este subintervalo. De hecho, aquí siempre es posible hallar un número infinito de ellos. Un subconjunto de $[0, 1)$, que contiene puntos en cada subintervalo de $[0, 1)$, sin importar qué tan pequeño sea éste, es un **subconjunto denso** del intervalo. Por ejemplo, el conjunto de todos los números racionales entre 0 y 1 es un subconjunto denso de $0 \leq x < 1$. Aún más, en este intervalo, los irracionales también lo son. El argumento anterior muestra que el conjunto de puntos periódicos para T es también un subconjunto denso de $[0, 1)$.

Las órbitas periódicas no son de ninguna manera los únicos tipos que hay para la función de supresión; existen además muchos puntos que tienden a ser periódicos. Cualquier punto cuyo desarrollo decimal es repetitivo tiende a ser periódico bajo T. Por ejemplo,

$$x = 0.123\overline{4}\ldots$$

su órbita queda fija después de 3 iteraciones de T. Del mismo modo, la órbita de $0.1234\overline{567}$ tiende a ser periódica con periodo 3. Recuerde ahora que cualquier número racional tiene un desarrollo decimal repetitivo, o se reitera sucesivamente o bien termina (lo que significa que finaliza con una secuencia de ceros). En consecuencia, vemos que cualquier número racional en $[0, 1)$ tiene una órbita bajo T que es periódica o al finalizar lo es. Por otra parte, cualquier número irracional en $[0, 1)$ posee una órbita que nunca entra en ciclo, ya que los desarrollos decimales de los números irracionales nunca se repiten. Por ejemplo, la de $1/\sqrt{2}$ no es periódica bajo T ya que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Una órbita densa

Algunos de esos números irracionales tienen órbitas muy interesantes. Por ejemplo, considere el número x_0 cuyo desarrollo decimal comienza con

$$x_0 = .0123456789.$$

Supongamos que los próximos 200 términos de este desarrollo consisten en todos los posibles bloques 2 de dígitos, es decir,

$$x_0 = 0.\underbrace{0123\ldots9}_{\text{todos los bloques 1}}\;\underbrace{00\,01\,02\ldots10\,11\,12\ldots20\,21\ldots99}_{\text{todos los bloques 2}}$$

seguidos por todos los posibles bloques 3, bloques 4, etc., por lo que tenemos

$$x_0 = 0.\underbrace{0\ldots 9}_{\text{todos los bloques 1}}\quad\underbrace{00\ldots 99}_{\text{todos los bloques 2}}\quad\underbrace{000\ldots 999}_{\text{todos los bloques 3}}\ldots$$

¿Qué podemos decir sobre la órbita de x_0? Recuerde que cada iteración de T, simplemente elimina el dígito delantero de esta secuencia. Así, dada cualquier x en [0, 1), vemos que hay un punto sobre la órbita de x_0 que queda arbitrariamente cerca de x. De hecho, sólo tenemos que iterar T el número de veces suficientes para que aparezcan los primeros n dígitos del desarrollo decimal de x, como los términos delanteros de este punto sobre la órbita de x_0. Esos dos puntos están entonces dentro de $1/10^n$ unidades uno del otro. Por ejemplo, supongamos que nos dan el número 1/3 y se nos pide determinar un punto sobre la órbita de x_0 que se encuentre dentro de 0.001 de 1/3. Para hallarlo, simplemente iteramos T hasta que el bloque 3, que comienza con 333, aparezca como la primera entrada de la secuencia. Se requieren 10 iteraciones para remover las entradas 0.012. . . 9, y otras 200 iteraciones para remover 00 01 02... 98 99 y, finalmente, $3 \cdot 333$ más iteraciones para llevar 333 a la cabeza de la lista. Así entonces, $T^{1209}(x_0)$ se encuentra dentro de la distancia requerida de 1/3.

Por supuesto, hay muchos otros puntos sobre la órbita de x_0 que se encuentran dentro de 0.001 unidades de 1/3. Todo lo que tenemos que hacer es iterar T las veces que sea necesario hasta que cualquier bloque k de la forma 33. . . 3 sea el primero en línea y que esté suficientemente cerca de 1/3. En consecuencia, el conjunto de puntos que conforman la órbita de x_0 es también un subconjunto denso de [0, 1).

Dependencia sensitiva respecto a las condiciones iniciales

La observación final que queremos hacer sobre T es que este sistema dinámico exhibe **dependencia sensitiva respecto a las condiciones iniciales.** Esto significa lo siguiente: considere cualquier x_0 en [0, 1). Existen puntos y_0 arbitrariamente cercanos a x_0 cuyas órbitas están al final "lejos" de la de x. Por ejemplo, si consideramos el punto fijo $x_0 = 1/9 = 0.\overline{1}$ de T, entonces hay puntos cercanos cuyas órbitas se comportan de manera muy diferente. Por ejemplo, $y_0 = 0.11\ldots 1\overline{8}$ tiende a caer sobre el punto fijo $0.\overline{8} = 8/9$. Qué tan cerca está y_0 de 1/9 depende de cuántos números 1 están presentes en la secuencia. Aunque al principio x_0 y y_0 están cerca uno de otro, sus órbitas quedan muy separadas en el intervalo [0, 1) (vea la figura 8.46). Como otro ejemplo, podemos considerar un x_1 de la forma $0.11\ldots 1\overline{35}$, que tiende a ser periódica con periodo 2, o un y_1 de la forma $0.11\ldots \overline{123456}$, que tiende a ser periódica con periodo 5. Ambos x_1 y y_1 están cerca de x_0, pero sus órbitas se comportan muy distinto. Arbitrariamente cerca de $x_0 = 1/9$ podemos encontrar otra x_1 cuya órbita llega a mostrar posteriormente cualquier comportamiento. Todo lo que te-

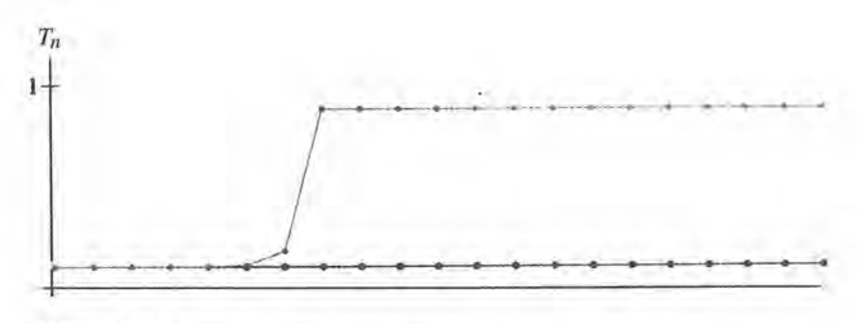


Figura 8.46
Serie de tiempo para la órbita de $0.\overline{1}$ (línea gris claro) y para $0.11\ldots 1\overline{8}$ (línea gris oscura).

nemos que hacer es preceder una órbita dada por una serie suficientemente larga de números 1. De nueva cuenta, al principio esta órbita está cerca de 1/9, pero posteriormente diverge de este punto fijo.

La situación general es similar. Dado cualquier x_0 cuyo desarrollo decimal es

$$x_0 = 0.a_1a_2a_3\ldots,$$

Consideremos otro y_0 cercano

$$y_0 = 0.a_1a_2\ldots a_nb_1b_2b_3\ldots,$$

donde $b_1b_2b_3$... son dígitos arbitrarios. Entonces y_0 está cerca de x_0 (su proximidad depende de n, el número de lugares decimales con que concuerdan x_0 y y_0), pero el destino de las dos órbitas puede ser radicalmente diferente. Así entonces, T exhibe dependencia sensitiva en todo el intervalo [0, 1).

La dependencia sensitiva en los sistemas dinámicos tiene profundas implicaciones para los científicos y matemáticos que usan ecuaciones en diferencias o diferenciales como modelos matemáticos. Si un sistema dado exhibe dependencia sensitiva respecto a las condiciones iniciales, entonces las predicciones numéricas sobre el destino de las órbitas o soluciones no serán confiables, ya que nunca podremos conocer las condiciones iniciales exactas para nuestra órbita o solución porque no es posible efectuar mediciones físicas con precisión infinita. Aun cuando lográramos mediciones exactas, no podríamos llevar a cabo los cálculos necesarios. Los pequeños errores numéricos presentes siempre en tales procedimientos nos sacan fuera de la órbita original hacia otra, cuyo comportamiento último puede ser radicalmente diferente.

A diferencia de T, para la cual tenemos dependencia sensitiva en todos sus puntos de dominio, muchas funciones exhiben sensitividad sólo en puntos aislados. Considere como ejemplo la función logística $L_{3.2}(x) = 3.2x(1 - x)$. Como se muestra en la figura 8.47, la mayor parte de las órbitas de esta función tienden a un ciclo atractor de periodo 2. Sin embargo, no todas las órbitas comparten este destino. Como vemos en la figura 8.47, hay dos puntos fijos repulsores para $L_{3.2}$ y un número infinito de puntos cuyas órbitas caen finalmente sobre el punto fijo no cero para $L_{3.2}$. La función $L_{3.2}$ exhibe dependencia sensitiva en cada uno de estos x_0, ya que podemos cambiar el x_0 sólo ligeramente y encontrar una órbita que no sea fija ni que a la larga llegue a serlo, sino que tienda más bien

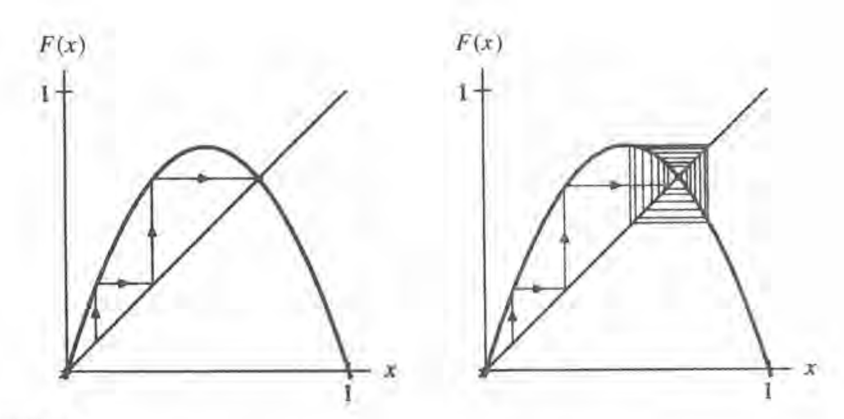


Figura 8.47
Dos órbitas cercanas para $F(x) = 3.2x(1 - x)$; al final una queda fija, la otra tiende al ciclo 2.

al ciclo atractor de periodo 2. Este comportamiento es muy diferente de los que vemos para T; comúnmente se llama *comportamiento inestable*. El caos se presenta cuando tenemos comportamiento inestable en todas partes o por lo menos sobre un gran conjunto.

Resumen

Hemos mostrado que nuestro sistema modelo T posee una cantidad sorprendente de complejidad en el intervalo $[0, 1)$. Los puntos periódicos de T forman un subconjunto denso de este intervalo y hay una sola órbita que forma otro subconjunto denso de $[0, 1)$. Además, esta función exhibe dependencia sensitiva respecto a las condiciones iniciales, lo que hace imposible el cálculo preciso de las órbitas. La combinación de estas tres propiedades hace a este sistema imposible de predecir o **caótico**.

Podría parecer que este tipo de complejidad es especial para nuestra función modelo T, porque ésta tiene una pendiente constante de 10. Sin embargo, en los últimos años los matemáticos han comprobado que varios sistemas dinámicos, tanto discretos como de ecuaciones diferenciales, exhiben este tipo de comportamiento. Por ejemplo, hay un gran conjunto de valores k para los cuales la función logística $L_k(x) = kx(1 - x)$ es caótica. Los histogramas y series de tiempo que mostramos antes dan evidencia cualitativa de este comportamiento.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 8.4

1. Para la función logística $L_4(x) = 4x(1 - x)$, calcule un histograma de los primeros 10000 puntos sobre la órbita de $x_0 = 0.3$ dividiendo el intervalo $[0, 1]$ en 100 subintervalos, de 0.01 de longitud, y luego determine los subintervalos sucesivos en los que cae la órbita de x_0. Repita este cálculo usando $y_0 = 0.3001$. ¿Observa alguna diferencia? Calcule ahora la serie de tiempo para los primeros 100 puntos sobre las órbitas de x_0 y y_0 y compare los resultados. ¿Encuentra diferencias? Analice lo que encuentre en un breve ensayo. No intente resolver este ejercicio si no tiene facilidades de cómputo y graficación.

Los ejercicios 2-11 tratan con la función duplicadora dada por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x < 1/2; \\ 2x - 1, & \text{si } 1/2 \leq x < 1. \end{cases}$$

2. Calcule la órbita de los siguientes x_0 bajo T. ¿Cuáles x_0 son periódicos y cuáles pueden llegar a serlo?

(a) $x_0 = 1/5$ (b) $x_0 = 2/7$ (c) $x_0 = 3/11$ (d) $x_0 = 1/10$
(e) $x_0 = 1/6$ (f) $x_0 = 4/14$ (g) $x_0 = 4/15$

3. ¿Qué puede decir sobre la órbita de $x_0 = p/2^n$ bajo iteración de T?

4. Esboce gráficas de T^2, T^3 y T^4. ¿Qué aspecto espera usted que tenga la gráfica de T^n? ¿Cuántos puntos fijos deberá tener T^n?

5. Usando las gráficas dibujadas en el ejercicio 4, analice el asunto de la densidad del subconjunto de puntos periódicos de T en el intervalo $0 \leq x < 1$.

6. Suponga que x_0 tiene la representación binaria $.a_1a_2a_3\ldots$ Es decir,

$$x_0 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots.$$

¿Cuál es el desarrollo binario de $T(x_0)$? ¿De $T^n(x_0)$?

7. Usando los resultados del ejercicio 6, encuentre todos los puntos en el intervalo [0, 1) que tienden a ser fijos en 0 por T^n.

8. Con los resultados del ejercicio 6, encuentre todos los puntos periódicos en el intervalo [0, 1) con periodo 2, 3 o 4 bajo T.

9. ¿Cuántos puntos en [0, 1) están fijos por T^n para cada n?

10. ¿T exhibe dependencia sensitiva respecto a las condiciones iniciales?

11. Escriba una expresión para un x_0 en [0, 1] cuya órbita bajo T forma un subconjunto denso de este intervalo.

Los ejercicios 12-14 tratan con la función duplicadora dada por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \le x < 1/2; \\ 2-2x, & \text{si } 1/2 \le x \le 1. \end{cases}$$

12. Esboce las gráficas de T, T^2 y T^3 sobre el intervalo [0, 1]. ¿Cuántos puntos fijos tiene T^n para cada n?

13. Analice el asunto de la densidad del conjunto de puntos periódicos de T.

14. ¿Exhibe T dependencia sensible respecto a las condiciones iniciales?

8.5 CAOS EN EL SISTEMA DE LORENZ

En esta sección completamos el análisis del sistema de Lorenz de ecuaciones diferenciales iniciado en la sección 2.5 y continuado en la sección 5.5. Recuerde que éste es un sistema no lineal de tres ecuaciones diferenciales dado por

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 10(y-x) \\ \frac{dy}{dt} &= 28x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{8}{3}z + xy. \end{aligned}$$

Mostraremos primero cómo reducir este problema a un modelo bidimensional y luego simplificaremos el sistema a una iteración unidimensional. Usando los procedimientos que desarrollamos en la última sección, después mostraremos cómo este sistema simplificado de Lorenz exhibe un comportamiento caótico.

El atractor de Lorenz

Como vimos en la sección 2.5, virtualmente toda curva solución del sistema de Lorenz al final tiene el mismo comportamiento. Después de que en sus inicios la curva solución serpentea en el espacio tridimensional, al final se enrolla en forma complicada alrededor de una cierta región de dicho espacio. Nuestra meta es crear un modelo que nos permita ver más claramente cómo se comportan las soluciones.

Por ejemplo, la figura 8.48 muestra la curva solución que comienza en la condición inicial (0, 1, 0). Después de un corto periodo, la solución se establece sobre una región donde se enrolla alrededor de dos "agujeros" aparentemente de manera aleatoria.

El objeto hacia el cual tienden las soluciones de la ecuación de Lorenz se llama **atractor extraño**. Es un atractor porque todas las soluciones tienden hacia él. Es "extraño" ya que es muy distinto de los atractores simples que hemos encontrado hasta ahora, es decir, los puntos de equilibrio (sumideros) y ciertas órbitas periódicas.

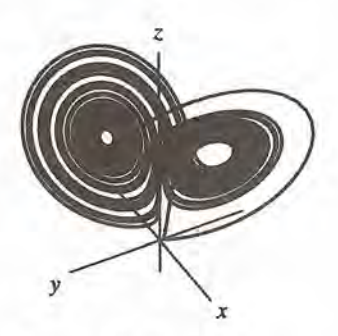


Figura 8.48
La solución de la ecuación de Lorenz con condición inicial (0, 1, 0).

Proyecciones

Para entender este atractor, trataremos de enfocarlo desde varios puntos de vista diferentes. La manera más simple de hacerlo es proyectar la curva solución sobre un plano coordenado. Geométricamente esto significa que nos olvidamos de una de las coordenadas de la curva solución. Por ejemplo, para proyectar la solución al plano x-y, sólo trazamos la curva $(x(t), y(t))$ en el plano, olvidándonos de la tercera coordenada $z(t)$ de la solución. En la figura 8.49 esbozamos las proyecciones x-y, y-z y x-z de la solución que tiende al atractor de Lorenz. Note que en cada una de ellas, la curva solución aparentemente cruza sobre sí misma. Por el teorema de unicidad, esto no sucede en el espacio total x-y-z. Cuando la solución cruza sobre sí misma en la proyección, la coordenada faltante toma valores diferentes, por lo que la solución real pasa "arriba" o "abajo" de sí misma en tres dimensiones.

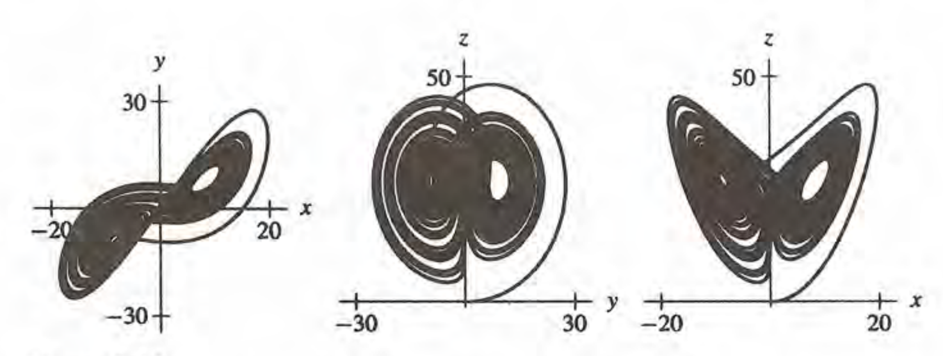


Figura 8.49
Las proyecciones x-y, y-z y x-z de la solución en la figura 8.48.

La ventaja de las proyecciones es que pueden verse fácilmente sobre la pantalla de una computadora, mientras que para observar las imágenes tridimensionales se requiere intuición y perspectiva geométrica. El truco es usar varias proyecciones para reconstruir el comportamiento de las soluciones.

La plantilla de Lorenz

Las proyecciones del atractor de Lorenz indican que las curvas solución tienden hacia una región en el espacio tridimensional que se parece a la superficie dibujada en la figura 8.50. Esta imagen se llama la **plantilla de Lorenz**, aunque a veces se le denomina la máscara de Lorenz, por razones obvias. Observe que los dos lóbulos de la plantilla están unidos a lo largo de una línea recta, con un lóbulo flexionándose hacia atrás y el otro hacia adelante de la línea.

El atractor para el sistema de Lorenz es en realidad un objeto mucho más complicado. Consiste en una infinidad de hojas empacadas entre sí de manera complicada. Sin embargo, esta plantilla nos permite obtener una buena idea del mecanismo que produce el comportamiento caótico en el sistema de Lorenz. Lo que sigue no es una descripción exacta de las soluciones de la ecuación; más bien, debe verse como una simplificación o modelo de todo el sistema.

Para entender el retrato fase completo del sistema de Lorenz, recuerde que en la sección 5.5 vimos que hay tres puntos de equilibrio para este sistema. Hay un punto silla con un eigenvalor positivo y dos eigenvalores negativos en el origen. Hay también un par de puntos de equilibrio que son puntos de silla en espiral. Cada uno de éstos tiene dos eigenvalores complejos con partes reales positivas y un solo eigenvalor negativo. La figura 8.51 indica las posiciones de esos puntos de equilibrio respecto a la plantilla. Note que en cada uno de ellos hay un eigenvector estable que señala hacia la plantilla. Esto obliga a que las soluciones cercanas tiendan hacia el atractor.

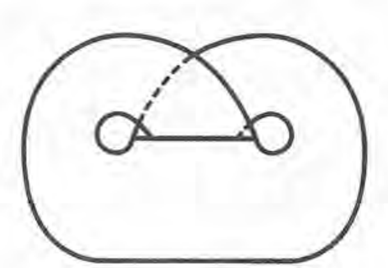


Figura 8.50
La plantilla de Lorenz.

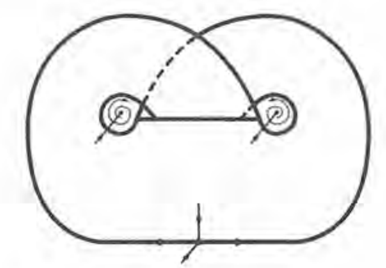


Figura 8.51
Los puntos de equilibrio para el sistema y la plantilla de Lorenz.

La función de retorno de Poincaré

Ahora agregamos una curva solución típica a la plantilla. Como hemos visto, las soluciones se enrollan alrededor del atractor, algunas veces rodean el lóbulo izquierdo y otras el lóbulo derecho. Imaginamos que esta solución se encuentra realmente sobre la plantilla, serpenteando de ida y vuelta entre los lóbulos (vea la figura 8.52). La solución mostrada en esta figura en realidad es ficticia, sólo es una representación del comportamiento de una solución real de las ecuaciones.

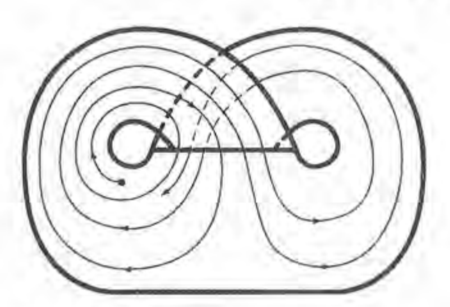


Figura 8.52
Una solución ficticia localizada sobre la plantilla de Lorenz.

Observe que la solución típica sobre la plantilla cruza repetidamente la línea de intersección de los dos lóbulos. Llamamos a ésta la línea L. Para entender el comportamiento cualitativo de las soluciones cerca de la plantilla, trataremos de entender cómo retorna a L esta solución. Note que hay un punto p sobre la línea de intersección a través del cual la curva solución nunca regresa a L. Ésta es una solución que se encuentra en la plantilla y en la separatriz estable para el punto de equilibrio en (0, 0, 0) (vea la figura 8.53). Utilizando la linearización cerca de este punto de equilibrio, vemos que cuando las soluciones en cualquier lado de esta solución pasan por p evolucionan en diferentes direcciones alrededor de los lóbulos (vea la figura 8.54). Esta solución "evanescente" a través de p forma entonces la frontera entre esas curvas sobre la plantilla que circulan alrededor del lóbulo izquierdo y que lo hacen alrededor del lóbulo derecho.

Sea L_ℓ la porción de L a la izquierda de p (en la figura 8.53) y L_r la porción a la derecha de p. Deseamos saber cómo retornan a L las curvas solución que comienzan en L_ℓ o L_r. Con ese fin, construimos una función que asigna a cualquier punto en L_ℓ o L_r su siguiente punto de intersección con L. Ésta se llama función de Poincaré, o función de (primer) retorno sobre L (vea la sección 5.6). La denotamos por ϕ. Para entender cómo las curvas solución intersecan repetidamente a L, sólo necesitamos iterar la función ϕ. Es imposible dar una fórmula analítica para ϕ. Después de todo, la plantilla misma en realidad es ficticia. Sin embargo, observando el comportamiento de las soluciones sobre las proyecciones x-z o y-z, podemos dar una buena descripción cualitativa de ϕ.

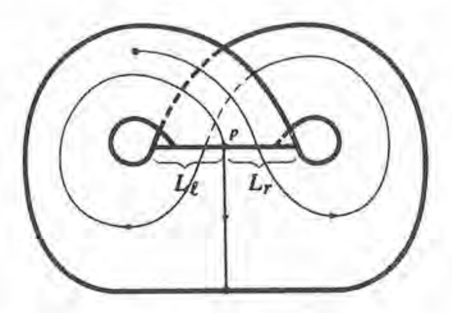


Figura 8.53
Una solución evanescente sobre la plantilla de Lorenz.

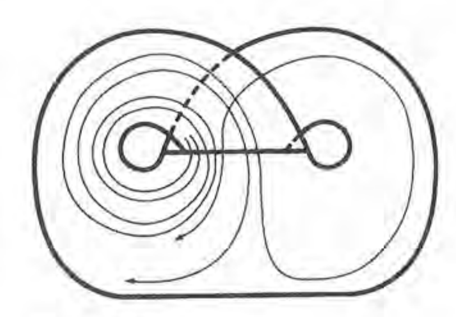


Figura 8.54
Varias soluciones sobre la plantilla de Lorenz.

En la figura 8.55 yuxtaponemos la proyección y-z y un modelo para ϕ. Note que ϕ no está definida en p. Como se indica en la proyección, ϕ lleva el intervalo L_ℓ a otro que cubre L_r y una porción de L_ℓ. Además, ϕ lleva a L_r a un intervalo que abarca L_ℓ y una porción de L_r. Por tanto, podemos construir una aproximación de la gráfica de ϕ como se muestra en la figura 8.55.

Observe que cuando las imágenes de L_ℓ y L_r retornan a L, son más largas que L_ℓ o L_r. Es decir, ϕ amplía esos intervalos. Ésta es la razón por la que hemos dibujado la gráfica ϕ con una pendiente mayor que 1.

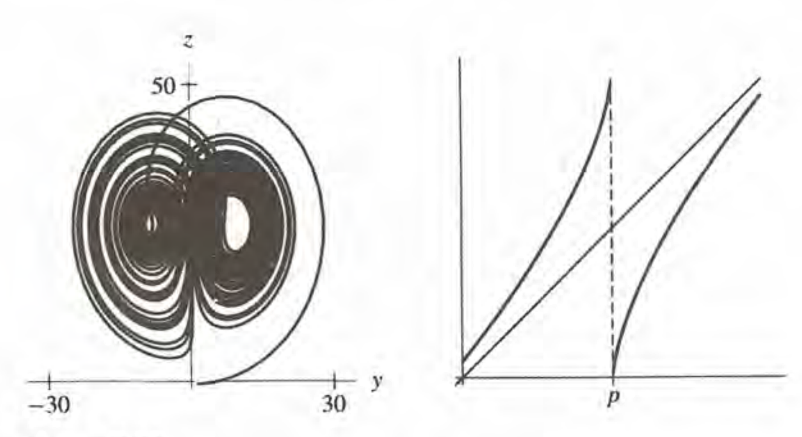


Figura 8.55
La proyección y-z y un modelo para ϕ.

Iteración de la función de retorno de Poincaré

Para entender la evolución de las soluciones conforme reintersecan L, debemos iterar ϕ. Como en la sección previa, vemos que ϕ exhibe una dependencia sensitiva respecto a las condiciones iniciales, ya que $\phi' > 1$ sobre L. La iteración gráfica muestra que también hay varios puntos periódicos para ϕ (vea la figura 8.56).

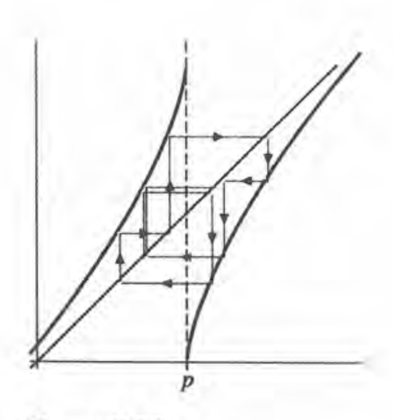


Figura 8.56
Iteración gráfica de ϕ.

Debemos ser cuidadosos al interpretar el significado del comportamiento observado de ϕ. Por ejemplo, consideremos la órbita periódica y el ciclo correspondiente para la ϕ mostrada en la figura 8.56. Presumiblemente hay una órbita real para el sistema de Lorenz que exhibe este comportamiento. Sin embargo, ésta es imposible de encontrar usando métodos numéricos comc el de Euler, debido principalmente a la expansión en la dirección a lo largo de L. Además, como el atractor de Lorenz es en realidad mucho más grueso que la plantilla, habrá otras órbitas en el atractor que tienden a esta solución periódica. Por ejemplo, note que las soluciones pueden coincidir con la solución periódica dada en la plantilla. Ésas corresponden a puntos que tienden a ser periódicos para ϕ.

Resumen

En esta sección hemos descrito un procedimiento importante para el estudio de ecuaciones diferenciales. Cuando observamos un comportamiento complicado de soluciones en un marco dimensional superior, tratamos de describirlo reduciendo la dimensión del sistema e intentamos verlo como un sistema dinámico discreto. Aunque no siempre es posible llevar a cabo tal procedimiento, este tipo de proceso funciona adecuadamente en varios sistemas importantes de ecuaciones diferenciales.

LABORATORIO 8.1 El diagrama de bifurcación

Cuando encontramos bifurcaciones en ecuaciones diferenciales de primer orden, vimos que el diagrama de bifurcación proporciona una manera conveniente de resumir los cambios que ocurren en las soluciones del sistema (vea las figuras 1.82 y 1.84). Aquí presentamos un retrato análogo que captura las bifurcaciones más complicadas que ocurren en la familia logística $L_k(x) = kx(1 - x)$.

Para una variedad de valores k en el intervalo $1 \leq k \leq 4$, debe comparar la órbita de $x_0 = 0.5$. Después exhiba la **órbita asintótica** para cada uno de esos valores k en el diagrama de bifurcación. Cuando hablamos de órbita asintótica, nos referimos a la "cola" de la órbita. De manera específica, para cada valor k escogido, deberá calcular los 100 primeros puntos sobre la órbita, pero exhibirá sólo las últimas 75 iteraciones. Los primeros 25 puntos sobre la órbita no deberán considerarse, de manera que sólo se observará el destino de la órbita.

En el diagrama de bifurcación debe trazar el eje k horizontalmente ($1 \leq k \leq 4$) y el eje x ($0 \leq x \leq 1$) verticalmente. Para cada valor k escogido hay que registrar los 75 puntos en la línea vertical sobre la k escogida. En general, hay muchos menos puntos que los 75 por registrar. Por ejemplo, si $k = 2.8$, mostramos que la órbita tiende muy rápido a un punto fijo atractor que se localiza aproximadamente en $x = 0.64$. Así entonces, despreciando los primeros 25 puntos sobre la órbita, deberá marcar el punto fijo (2.8, 0.64) para indicar la presencia de éste.

De modo similar, si $k = 3.2$, la órbita tiende a un ciclo 2 localizado en $x = 0.513$ y $x = 0.799$, por lo que se graficará (3.2, 0.513) y (3.2, 0.799). Finalmente, si $k = 3.9$, el histograma en la figura 8.5 indica que la órbita está distribuida en un gran subintervalo de $0 \leq x \leq 1$. Sobre $k = 3.9$ esboce un intervalo para indicar este comportamiento caótico (vea la figura 8.57). El diagrama de bifurcación da entonces un registro del destino de la órbita de 0.5 para un conjunto de valores k.

En su reporte, primero deberá juntar y exhibir el destino de las órbitas, por lo menos para 50 valores diferentes de k escogidos como sigue:

1. Escoja 5 valores en el intervalo $1 \leq k \leq 3$.
2. Escoja 10 valores en el intervalo $3 < k \leq 3.44$.

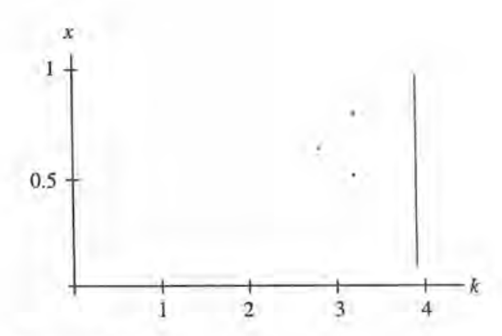


Figura 8.57
El principio del diagrama de bifurcación para $L_k(x) = kx(1 - x)$.

3. Escoja 5 valores en el intervalo $3.44 < k \leq 3.55$.
4. Escoja 5 valores en el intervalo $3.55 < k \leq 3.56$.
5. Escoja varios otros valores justo arriba de $k = 3.56$.
6. Escoja 5 valores en el intervalo $3.57 < k \leq 3.83$.
7. Escoja 10 valores en el intervalo $3.83 < k \leq 3.86$.
8. Escoja sus valores k restantes en el régimen $3.86 \leq k \leq 4$.

Sobre su reporte: En su reporte analice el comportamiento cualitativo del destino de las órbitas de la familia logística. ¿Puede "llenar" el diagrama para otros valores de k con $1 \leq k \leq 3$? ¿Y con $3 \leq k \leq 3.4$? Describa una amplificación del diagrama de bifurcación en el intervalo $3.83 \leq k \leq 3.86$. Tal vez tenga que escoger valores adicionales de k para ver la estructura. ¿Por qué se llama a este intervalo la "ventana de periodo 3"?

Proyectos adicionales:

1. Calcule el diagrama de bifurcación para la familia cuadrática $F_c(x) = x^2 + c$. Debe seleccionar el parámetro c en el intervalo $-2 \leq c \leq 0.25$ y usar $x_0 = 0$ en este caso. La órbita debe ser trazada en el intervalo $-2 \leq x \leq 2$. Describa la similaridad con el diagrama de bifurcación logística. ¿Puede encontrar aquí una ventana de periodo 3?
2. Repita la investigación previa usando la familia seno $S_\lambda(x) = \lambda$ sen x. Escoja λ en el intervalo $1 \leq \lambda \leq \pi$ y use $x_0 = \pi/2 \approx 1.57$. Use el intervalo $0 \leq x \leq \pi$ para trazar sus órbitas. Compare ahora los tres diagramas de bifurcación.

LABORATORIO 8.2 Método de Newton como ecuación en diferencias

Las **raíces** de una función $f(x)$ son los valores de x para los cuales $f(x) = 0$. Dada una función f, podemos encontrar los valores aproximados para sus raíces usando el método de Newton. Al emplearlo, hacemos primero una conjetura inicial para el valor de la raíz, digamos x_0. Si ésta no es la raíz, es decir, $f(x_0)$ no es 0, podemos mejorar la conjetura si determinamos primero la línea tangente a la gráfica de f en x_0, y después el punto x_1 donde esta tangente interseca al eje x. La relación entre x_0 y x_1 (un buen repaso del cálculo) está dada por

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Si $f(x_1)$ no está muy cerca de cero, entonces mejoramos la conjetura de nuevo calculando

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

y así sucesivamente. Lo que estamos haciendo es crear la órbita de x_0 bajo la función del método de Newton

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

La conjetura inicial es x_0, la primera mejora es $x_1 = N(x_0)$, la segunda es $x_2 = N(x_1)$, etc. La esperanza es que las conjeturas mejoradas lo sean realmente y que la secuencia x_0, x_1,... tienda a una raíz de la función f. En este laboratorio consideraremos cómo la selección del x_0 afecta el comportamiento a largo plazo de las órbitas de la función del método de Newton, estudiando un ejemplo particular: Sea

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x - 1)(x - 2).$$

Esta función tiene raíces en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.
En su reporte, considere los siguientes temas:

1. Para la $f(x)$ escogida antes, calcule la correspondiente función del método de Newton $N(x) = x - f(x)/f'(x)$. Verifique que esta función tiene puntos fijos en las raíces $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$. Compruebe que éstos son atractores. ¿Qué implicaciones tiene lo anterior para las órbitas de $N(x)$ para x_0 cerca de 0, 1 o 2?

2. Calcule los primeros 20 puntos de las órbitas bajo $N(x)$ para los x_0 iniciales

$$x_0 = 0, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, \ldots, 0.90, 0.95, 1.$$

   Esboce el segmento $0 \leq x_0 \leq 1$. Para cada selección de x_0, si el punto vigésimo x_{20} en su órbita bajo N está a 0.01 o menos de 0, marque el punto con rojo; si x_{20} está a 0.01 o menos de 1, márquelo con azul; si x_{20} está a 0.01 o menos de 2, resáltelo con verde y si ninguna de esas condiciones se cumple, márquelo con negro. ¿Es congruente esta figura con sus conclusiones de la parte 1? ¿Qué implicaciones tiene esta figura respecto a la selección de x_0 para el método de Newton?

3. Repita la parte 2 para los puntos

$$x_0 = 0.30, 0.32, 0.34, 0.36, 0.38, \ldots, 0.46, 0.48, 0.50.$$

Sobre su reporte: En su reporte considere cada uno de los puntos anteriores. Las partes 2 y 3 requieren una computadora o una calculadora. *No* entregue listas de números. Lo importante son los esbozos coloreados del eje x y su interpretación de éstos.

LABORATORIO 8.3 La ecuación logística demorada e iteración en dos dimensiones

En la sección 8.1, la ecuación logística

$$L_k(y) = k_y(1 - y)$$

fue usada para modelar poblaciones que se reproducen sobre una escala de tiempo discreta. En particular, si y_n representa la población (o la densidad de ésta) de alguna especie en la n-ésima generación, entonces la población en la $(n + 1)$-ésima generación está dada por

$$y_{n+1} = L_k(y_n) = ky_n(1 - y_n).$$

Hemos visto que el comportamiento de las órbitas pueden depender en forma impresionante del valor del parámetro de la razón de crecimiento k y de y_0.

Una hipótesis oculta en el modelo logístico discreto es que la población en la generación $(n + 1)$-ésima depende sólo de la generación n-ésima. Tal vez éste no sea siempre el caso para las especies que tienen un largo periodo de maduración o que emigran a zonas de anidamiento o de reproducción. Por ejemplo, supongamos que una especie retorna a la misma zona de reproducción cada año. La cantidad de comida disponible para la generación n-ésima en esa área depende de cuánto se consumió en el año anterior. En este caso, la población de la generación $(n + 1)$-ésima está sujeta a las generaciones n-ésima y $(n - 1)$-ésima. Esto motiva el siguiente modelo de crecimiento de población llamado modelo **logístico demorado** de población

$$y_{n+1} = ky_n(1 - y_{n-1}).$$

Igual que en el modelo logístico, y_n representa la densidad de población en la generación n-ésima. Restringiremos nuestra atención al caso en que $0 \leq y_n \leq 1$. Para el modelo logístico demorado, la población en la generación $(n + 1)$-ésima es proporcional a la de la generación n-ésima, así como qué tan cerca estaba la generación $(n - 1)$-ésima de la densidad máxima posible de población.

Para estudiar el modelo logístico demorado, efectuamos una operación muy similar a la conversión de ecuaciones diferenciales de segundo orden a sistemas de primer orden. Introducimos una nueva variable x_n haciendo

$$x_n = y_{n-1}.$$

Es decir, x_n es la densidad de población en la generación $(n - 1)$-ésima. Luego reescribimos la ecuación logística demorada como

$$x_{n+1} = y_n$$

$$y_{n+1} = ky_n(1 - x_n).$$

Como ocurre que en la conversión de ecuaciones de segundo orden a sistemas de primer orden, el sistema es más simple en cierta forma porque los valores x_{n+1} y y_{n+1} dependen sólo de los valores de x_n y y_n. Sin embargo, es más complicado porque hemos tenido que introducir una nueva variable.

Podemos interpretar este modelo como una iteración haciendo que

$$F_k(x, y) = (y, ky(1 - x)).$$

Entonces

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = F_k(x_n, y_n);$$

Es decir, las órbitas de una (x_0, y_0) inicial están hechas de una secuencia de puntos en el plano. Por consiguiente,

$$(x_1, y_1) = F_k(x_0, y_0) = (y_0, ky_0(1 - x_0)),$$
$$(x_2, y_2) = F_k(x_1, y_1) = (y_1, ky_1(1 - x_1)),$$

etc. En este laboratorio estudiamos el comportamiento de las órbitas para esta iteración bidimensional. Podemos graficarlas de dos maneras diferentes. Formando gráficas de "series de tiempo" con n sobre el eje horizontal y x_n o y_n sobre el eje vertical. O bien, por medio

"de plano fase", trazando la secuencia de puntos (x_n, y_n) en el plano x-y. Usted deberá formar ambos tipos de gráficas para cada órbita que calcule.

En su reporte, considere los siguientes temas:

1. Para varios valores diferentes de k entre 1.5 y 2.5, calcule las primeras 200 iteraciones de la órbita con $(x_0, y_0) = (0.1, 0.2)$. Para cada uno de los valores de k que escoja, describa el comportamiento a largo plazo de la órbita. ¿Cuáles son las implicaciones biológicas de sus conclusiones? (Para algunos valores de k, podría necesitar más de 200 iteraciones.)

2. ¿Cómo se modifican sus resultados de la parte 1 si cambia el x_0 inicial? ¿Cuáles son las implicaciones biológicas de sus conclusiones? (Recuerde mantener los valores de x_0 y y_0 en el "físicamente significativo" rango de [0, 1].)

Sobre su reporte: En el reporte describa sus descubrimientos basados en esos experimentos numéricos. Puede incluir un número *limitado* de gráficas y/o retratos de planos fase de órbitas para ilustrar su descripción. *No* incluya un catálogo de órbitas para las diferentes condiciones iniciales y valores de k. La meta del laboratorio es interpretar los resultados de sus experimentos.

A REVISIÓN DE ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN

En este apéndice analizaremos un enfoque alternativo para el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. El método empleado aquí es más específico que el de la sección 1.8, pero implica una menor cantidad de cálculos más fáciles y permite el acceso directo al comportamiento cualitativo de las soluciones de ciertas ecuaciones lineales. Este método es el mismo que se utilizó en las secciones 4.1-4.4 para las ecuaciones lineales de segundo orden.

Ecuaciones diferenciales lineales

Una ecuación diferencial de primer orden es **lineal** si puede escribirse en la forma

$$\frac{dy}{dt} + g(t)y = r(t),$$

donde $g(t)$ y $r(t)$ son funciones arbitrarias de t. Observe que hemos trasladado al lado izquierdo de la ecuación todos los términos que contienen a la variable dependiente y. Esto es común en los sistemas lineales y ayuda con la nomenclatura que usaremos. Para más ejemplos de ecuaciones lineales, véase la sección 1.8.

Si el lado derecho de una ecuación lineal es cero (es decir, $r(t) = 0$), entonces se llama *homogénea* o *no forzada*. De otra manera, se dice que es *no homogénea* o *forzada*. Por ejemplo

$$\frac{dy}{dt} + 2y = \operatorname{sen} 2t$$

es una ecuación lineal no homogénea, mientras que

$$\frac{dy}{dt} + (\operatorname{sen} 2t)y = 0$$

es homogénea.

Una ecuación diferencial lineal de primer orden tiene *coeficientes constantes* si $g(t)$ es una constante. Es decir, la ecuación tiene la forma

$$\frac{dy}{dt} + \lambda y = r(t)$$

donde λ es una constante. En este apéndice trataremos sólo con ecuaciones de coeficientes constantes.

Solución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

A manera de calentamiento

Consideremos la ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 0.$$

Esta ecuación es separable y tiene la solución general $y(t) = ke^{-2t}$, donde la constante k está determinada por la condición inicial. A continuación, proponemos el ejemplo no homogéneo ligeramente más complicado

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 4.$$

Note que si despreciamos el 4 en el lado derecho, esta ecuación tiene la misma "parte homogénea" que el ejemplo anterior. Si la reescribimos en la forma

$$\frac{dy}{dt} = 2(2 - y),$$

vemos que también es separable y contiene la solución de equilibrio $y(t) = 2$. Si la separamos e integramos, encontramos

$$-\log|2 - y| = 2t + C.$$

Después de simplificarla, resulta

$$y(t) = ke^{-2t} + 2.$$

El punto clave aquí es que la solución general consiste en dos partes: el término constante 2, que es una solución particular de la ecuación no homogénea, y el término exponencial, que es la solución general de la ecuación homogénea asociada. La solución general de esta ecuación no homogénea es entonces la suma de la solución general de la ecuación homogénea asociada y una solución particular de la ecuación no homogénea.

¿Esto fue un accidente?

No. Resulta que las soluciones de las ecuaciones lineales no homogéneas siempre se comportan de esta manera. Ésta es una característica muy especial de las ecuaciones diferenciales lineales.

Para un sistema no autónomo típico, no es necesario que exista relación alguna entre las soluciones con condiciones iniciales diferentes (excepto aquellas implicadas por el teorema de unicidad). Para las ecuaciones diferenciales lineales, éste no es el caso. Nuestra próxima tarea es establecer con precisión la relación entre las soluciones de las ecuaciones lineales.

PRINCIPIO DE LINEARIDAD Supongamos que $y_h(t)$ es una solución de una ecuación diferencial lineal homogénea

$$\frac{dy}{dt} + g(t)y = 0,$$

entonces, para cualquier constante k, la función $ky_h(t)$ también es una solución. ■

Podemos comprobar lo anterior esto como sigue: si $y_h(t)$ ("h" por homogénea) es una solución de la ecuación diferencial (homogénea)

$$\frac{dy_h}{dt} + g(t)y_h(t) = 0,$$

entonces

$$\frac{d(ky_h)}{dt} + g(t)(ky_h(t)) = k\left(\frac{dy_h}{dt} + g(t)y_h(t)\right) = 0.$$

Por consiguiente, $ky_h(t)$ es también una solución.

La importancia del principio de linearidad es que nos permite producir muchas soluciones de una ecuación diferencial lineal a partir de una solución dada. Si, por ejemplo, $y_h(t)$ es una solución de la ecuación diferencial con $y_h(0) \neq 0$, entonces $ky_h(t)$ lo será también para cualquier k, y de hecho ésta es la solución general.

PRINCIPIO DE LINEARIDAD AMPLIADO Supongamos que $y_h(t)$ es cualquier solución de la ecuación diferencial lineal homogénea

$$\frac{dy}{dt} + g(t)y = 0$$

y $y_p(t)$ ("p" por solución particular) es *cualquier* solución de la ecuación no homogénea

$$\frac{dy}{dt} + g(t)y = r(t).$$

Entonces, $y_h(t) + y_p(t)$ es también una solución de la ecuación no homogénea. ■

Para verificarlo, vemos que

$$\frac{dy_h}{dt} + g(t)y_h(t) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dy_p}{dt} + g(t)y_p(t) = r(t)$$

para toda t. Sumando esas dos ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d(y_h + y_p)}{dt} + g(t)(y_h(t) + y_p(t)) &= \left(\frac{dy_h}{dt} + g(t)y_h(t)\right) + \left(\frac{dy_p}{dt} + g(t)y_p(t)\right)\\ &= 0 + r(t)\\ &= r(t)\end{aligned}$$

para toda t. De esta manera $y_h(t) + y_p(t)$ es una solución de la ecuación no homogénea.

Imaginemos que $ky_h(t)$ es la solución general de la ecuación homogénea

$$\frac{dy}{dt} + g(t)y = 0.$$

Entonces, para cualquier número a, podemos determinar k tal que $ky_h(0) = a$. Si $y_p(t)$ es una solución de la ecuación no homogénea

$$\frac{dy}{dt} + g(t)y = r(t)$$

Por tanto, para cualquier número y_0, podemos encontrar k tal que

$$ky_h(0) = y_0 - y_p(0).$$

En consecuencia, para cualquier condición inicial $y(0) = y_0$, podemos encontrar una solución de la ecuación no homogénea de la forma $ky_h(t) + y_p(t)$ con

$$ky_h(0) + y_p(0) = y_0.$$

En otras palabras, $ky_h(t) + y_p(t)$ es la solución general de la ecuación no homogénea. A menudo resumimos esta observación diciendo que "la solución general de la ecuación no homogénea es la suma de la solución general de la ecuación homogénea más una solución de la ecuación no homogénea".

Ahora tenemos un algoritmo de tres pasos con el que teóricamente podemos resolver cualquier ecuación diferencial lineal. Encontramos primero la solución general de la

ecuación homogénea. Luego determinamos una solución particular de la ecuación no homogénea. Finalmente, las sumamos. Sin embargo, en la práctica este procedimiento se usa sólo para ecuaciones lineales especiales tales como las de coeficientes constantes. La razón es que el segundo paso requiere que produzcamos una solución particular de la ecuación no homogénea. Si $g(t)$ no es una constante, este paso puede ser muy difícil. Pero si lo es, entonces a veces podemos tener éxito usando un procedimiento muy utilizado en matemáticas.

La conjetura afortunada

Uno de los métodos más simples para encontrar una solución particular de una ecuación no homogénea consiste simplemente en conjeturar la solución correcta. Veremos que en realidad éste es un método práctico y eficiente.

Como primer ejemplo, consideremos la ecuación

$$\frac{dy}{dt} + 2y = e^t.$$

La ecuación homogénea es $dy/dt + 2y = 0$, que es la misma que

$$\frac{dy}{dt} = -2y$$

y cuya solución general es $y(t) = ke^{-2t}$.

Para encontrar una solución de la ecuación no homogénea, notamos que el lado derecho es e^t. Necesitamos conjeturar una función $y_p(t)$ tal que, cuando insertemos $y_p(t)$ en el lado izquierdo de la ecuación, nos dé e^t como resultado. Tal vez ahora no usaríamos una conjetura de senos o cosenos para $y_p(t)$, ya que el lado izquierdo aún incluiría funciones trigonométricas después del cálculo. Por la misma razón, un polinomio no funcionaría. Lo que necesitamos como conjetura es una función exponencial. Por ello,

$$y_p(t) = ae^t,$$

donde a es una constante que debe determinarse. (Éste se denomina método de los coeficientes indeterminados: debemos calcular a de manera que ae^t sea realmente una solución de la ecuación no homogénea.)

Una vez que hemos llegado a esta conjetura razonable para $y_p(t)$, sólo resta saber si ésta funciona. Sustituimos entonces $y_p(t) = ae^t$ en el lado izquierdo de la ecuación diferencial y obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dy_p}{dt} + 2y_p &= ae^t + 2ae^t \\ &= 3ae^t.\end{aligned}$$

Para que $y_p(t)$ sea una solución, debemos tener $3a = 1$ o $a = 1/3$. Por tanto, $y_p(t) = e^t/3$ y la solución general es

$$y(t) = ke^{-2t} + \tfrac{1}{3}e^t.$$

Otra conjetura afortunada

Supongamos que el lado derecho de nuestra ecuación contiene funciones trigonométricas como en

$$\frac{dy}{dt} + 2y = \cos t.$$

En este caso, la solución general de la ecuación homogénea es exactamente la misma que antes

$$y(t) = ke^{-2t}.$$

Sin embargo, ahora tenemos que cambiar nuestra conjetura. Esta vez probaremos con

$$y_p(t) = a\cos t + b\,\text{sen}\,t.$$

Observe que las conjeturas más simples de $y_p(t) = a\cos t$ y $y_p(t) = a\,\text{sen}\,t$ están destinadas a fallar, debido a que obtenemos senos y cosenos al calcular el lado izquierdo.

Para determinar a y b, reemplazamos $y_p(t)$ en el lado izquierdo de la ecuación diferencial, cuyo resultado es

$$\begin{aligned}\frac{dy_p}{dt} + 2y_p &= \frac{d(a\cos t + b\,\text{sen}\,t)}{dt} + 2(a\cos t + b\,\text{sen}\,t)\\ &= -a\,\text{sen}\,t + b\,\text{sen}\,t + 2a\cos t + 2b\,\text{sen}\,t\\ &= (-a+2b)\,\text{sen}\,t + (2a+b)\cos t\end{aligned}$$

Por tanto, para que $y_p(t)$ sea una solución, debemos escoger a y b tales que

$$(-a+2b)\,\text{sen}\,t + (2a+b)\cos t = \cos t$$

para toda t. Para lograrlo, tomamos a y b de manera que $-a + 2b = 0$ y $2a + b = 1$. Resolviendo estas ecuaciones simultáneas, obtenemos $a = 2/5$ y $b = 1/5$. Tenemos entonces que

$$y_p(t) = \tfrac{2}{5}\cos t + \tfrac{1}{5}\,\text{sen}\,t$$

es una solución particular de la ecuación no homogénea.

En consecuencia, la solución general de

$$\frac{dy}{dt} + 2y = \cos t$$

es

$$y(t) = ke^{-2t} + \tfrac{2}{5}\cos t + \tfrac{1}{5}\,\text{sen}\,t.$$

En la figura 1.1 se muestran soluciones para varias condiciones iniciales.

En realidad, las conjeturas anteriores no son afortunadas. Más bien, son conjeturas informadas. Dado un lado derecho de buen aspecto de una ecuación diferencial (senos, cosenos, exponenciales y funciones parecidas), es posible hacer una conjetura apropiada. Si llegamos a una no apropiada (por ejemplo, si olvidamos el término b sen t), entonces será imposible encontrar opciones para las constantes que resuelvan la conjetura. Si esto sucede, simplemente regresamos a revisarla y refinarla.

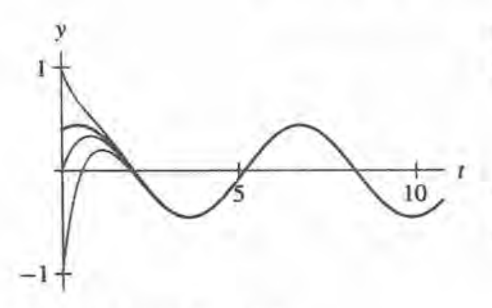


Figura 1.1
Gráficas de varias soluciones de

$$\frac{dy}{dt} + 2y = \cos t.$$

Observe que todas esas gráficas tienden a juntarse de inmediato.

Análisis cualitativo

El análisis y ejemplo anteriores proporcionan gran cantidad de información sobre el comportamiento cualitativo de las soluciones de una ecuación diferencial lineal. En esta ocasión para la ecuación

$$\frac{dy}{dt} + 2y = \cos t,$$

la solución general es

$$y(t) = ke^{-2t} + \tfrac{2}{5}\cos t + \tfrac{1}{5}\operatorname{sen} t,$$

que es la suma de la solución general de la ecuación homogénea y una solución particular de la ecuación original no homogénea. Observe que el término ke^{-2t} tiende rápidamente a cero de manera que, para t grande, toda solución está muy cerca de la particular

$$y_p(t) = \tfrac{2}{5}\cos t + \tfrac{1}{5}\operatorname{sen} t.$$

En la figura 1.1 podemos observar lo anterior de manera muy clara, donde las soluciones con condiciones iniciales diferentes tienden simultáneamente hacia la misma función periódica.

Parte de este comportamiento podríamos haberlo predicho sin cálculo. Si vemos el campo de pendientes para esta ecuación (vea la figura 1.2), vemos que para $y >> 0$, la pendiente es negativa, mientras que para $y << 0$ es positiva. Por consiguiente, las soluciones que comienzan con condiciones iniciales lejos de $y = 0$ tienden hacia valores $|y|$ más pequeños. Es más difícil apreciar el comportamiento detallado de las soluciones cerca de cero en el campo de pendientes. Sin embargo, es evidente que éstas oscilan de alguna manera.

Al revisar la solución general, vemos que el comportamiento a largo plazo de la solución es una oscilación con periodo 2π, el cual es el mismo que el periodo de cos t, correspondiente al lado derecho de la ecuación diferencial. No obstante, la amplitud y la

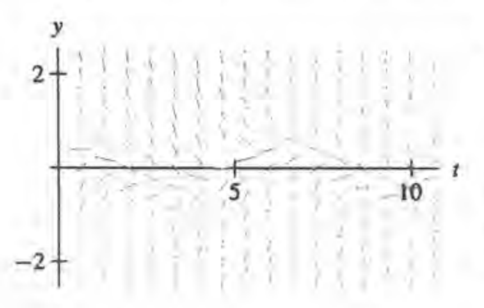


Figura 1.2
Campo de pendientes de

$$\frac{dy}{dt} = -2y + \cos t.$$

Un examen cuidadoso de este campo sugiere que ninguna solución resulta no acotada cuando $t \to \infty$.

fase (es decir, la localización de los máximos y mínimos) para la solución, no es exactamente igual que para cos t.

Estas ideas también son válidas para cualquier ecuación no homogénea de la forma

$$\frac{dy}{dt} + \lambda y = r(t)$$

siempre que λ sea positiva. Igual que arriba, la ecuación homogénea asociada con esta ecuación es

$$\frac{dy}{dt} + \lambda y = 0,$$

cuya solución general es $ke^{-\lambda t}$. Como $\lambda > 0$, su aproximación exponencial hacia cero es inmediata. Si $y_p(t)$ denota una solución particular de la ecuación no homogénea, entonces la solución general es

$$y(t) = ke^{-\lambda t} + y_p(t)$$

y vemos que todas las soluciones son cercanas a $y_p(t)$ para t grandes. Es decir, la solución de la parte homogénea de la ecuación tiende a cero, dejando sólo la solución particular de la parte no homogénea.

El análisis anterior se basa en el hecho de que la solución de la ecuación homogénea tiende a cero (es decir, $\lambda > 0$). Si éste no es el caso, entonces es posible que se tenga un comportamiento muy diferente (vea los ejercicios).

Segunda conjetura

Igual que con cualquier método de conjetura y prueba, corremos el riesgo que nuestra primera suposición (sin importar qué tan razonable sea) no sea correcta. Cuando esto pasa, simplemente conjeturamos de nuevo.

Considere la ecuación

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 3e^{-2t}.$$

Como antes, debido a que el coeficiente de y es positivo, las soluciones de la ecuación homogénea tienden hacia $y = 0$. El campo de pendientes para la ecuación no homogénea está dado en la figura 1.3. En ella se muestra que todas las soluciones parecen acercarse a $y = 0$.

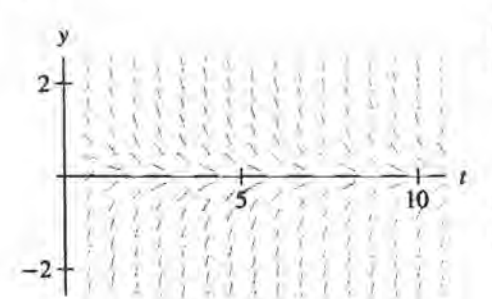


Figura 1.3
Campo de pendientes para

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 3e^{-2t}.$$

Al parecer, todas las soluciones tienden a $y = 0$ cuando $t \to \infty$.

Para calcular la solución general, no hay que perder de vista que la solución general de la ecuación homogénea es $y(t) = ke^{-2t}$. Para hallar una solución particular de la ecuación no homogénea

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 3e^{-2t}$$

hacemos la conjetura razonable $y_p(t) = ae^{-2t}$, con a como coeficiente indeterminado. Al reemplazarla en el lado izquierdo de la ecuación nos da

$$\frac{dy_p}{dt} + 2y_p = \frac{d(ae^{-2t})}{dt} + 2ae^{-2t} = -2ae^{-2t} + 2ae^{-2t} = 0.$$

Esto es frustrante. Independientemente de cómo escojamos el coeficiente a, siempre obtenemos cero cuando sustituimos $y_p(t)$ en el lado izquierdo de la ecuación. No existe ninguna solución particular de la ecuación no homogénea de la forma $y_p(t) = ae^{-2t}$.

El problema es que e^{-2t} es una solución de la ecuación homogénea. Cuando la sustituimos en el lado izquierdo, podemos estar seguros que obtendremos cero. Por otra parte, nuestra conjetura debe contener el factor e^{-2t} para tener la certeza que concuerden los dos lados. Esto deja una amplia variedad de opciones para las posibles conjeturas.

Necesitamos una segunda conjetura para $y_p(t)$ que contenga un término e^{-2t}, que no sea una solución de la ecuación homogénea tan complicada. Es claro que las conjeturas de la forma a sen te^{-2t} o ae^{bt} están destinadas a fallar. Finalmente, ensayamos

$$y_p(t) = ate^{-2t},$$

donde a es un coeficiente por determinarse; es decir, multiplicamos nuestra primera conjetura por t.

Reemplazándola en el lado izquierdo de la ecuación no homogénea

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 3e^{-2t},$$

obtenemos

$$\frac{dy_p}{dt} + 2y_p = (ae^{-2t} - 2ate^{-2t}) + 2ate^{-2t} = ae^{-2t}.$$

Si tomamos $a = 3$, entonces $y_p(t) = 3te^{-2t}$ es una solución. Ahora sabemos por qué es una buena idea multiplicar la primera conjetura por t. La derivada de $y_p(t) = ate^{-2t}$, a través de la regla del producto, tiene un término que es un múltiplo de $y_p(t)$ y otro que contiene sólo un múltiplo constante de e^{-2t}.

La solución general es

$$y(t) = ke^{-2t} + 3te^{-2t},$$

y vemos que todas esas soluciones tienden a cero cuando t crece.

Regla empírica para una segunda conjetura

El anterior constituye un buen ejemplo de lo poco satisfactorio que son los métodos de conjetura afortunada. ¿Cómo hicimos que la segunda conjetura fuera igual a t veces la primera? La respuesta es que quizá anteriormente habíamos visto un problema similar o bien que pudimos imaginar por lo menos la forma de la conjetura por medio de otro procedimiento. En el capítulo 4 y en los ejercicios al final de este apéndice se proporcionan métodos para llegar a la segunda conjetura de una manera más fácil, pero con más trabajo de cálculo.

Resulta que para ecuaciones lineales de cualquier orden, los ejemplos anteriores dan una regla empírica general sobre cómo encontrar soluciones particulares. La forma de la conjetura depende del lado derecho de la ecuación (o término t). Si la primera conjetura no ofrece una solución particular (lo que ocurrirá si el lado derecho es una solución de la ecuación homogénea), ensayamos una segunda suposición multiplicando la primera conjetura por t.

EJERCICIOS PARA EL APÉNDICE A

En los ejercicios 1-4, encuentre la solución general de la ecuación dada.

1. $\dfrac{dy}{dt} - y = 3e^{-2t}$
2. $\dfrac{dy}{dt} = y + \cos 2t$
3. $\dfrac{dy}{dt} - y = 3e^{-t}$
4. $\dfrac{dy}{dt} = 2y + \operatorname{sen} 2t$

En los ejercicios 5-8, determine la solución del problema de valor inicial dado.

5. $\dfrac{dy}{dt} + 2y = e^{t/3}, \quad y(0) = 1$
6. $\dfrac{dy}{dt} + y = \cos 2t, \quad y(0) = 5$
7. $\dfrac{dy}{dt} - 2y = 3e^{-2t}, \quad y(0) = 10$
8. $\dfrac{dy}{dt} = -3y + \cos 2t, \quad y(0) = -1$

En los ejercicios 9-12, describa el comportamiento de las soluciones en un párrafo breve. Únicamente se da información parcial acerca de las funciones en la ecuación diferencial, por lo que sólo es posible hacer descripciones parciales de algunos aspectos de las soluciones cualitativas. Asegúrese de tratar condiciones iniciales de tamaños diferentes y de analizar lo mejor que pueda el comportamiento a largo plazo de las soluciones.

9. $\dfrac{dy}{dt} + 2y = r(t)$, donde $-1 < r(t) < 2$ para toda t.

10. $\dfrac{dy}{dt} - 2y = r(t)$, donde $-1 < r(t) < 2$ para toda t.

11. $\dfrac{dy}{dt} + y = r(t)$, donde $r(t)$ tiende a 3 cuando $t \to \infty$.

12. $\dfrac{dy}{dt} + ay = \cos 3t + b$, donde a y b son constantes positivas.

13. Considere la ecuación
$$\frac{dy}{dt} + 2y = \cos 3t.$$
Para encontrar una solución particular, es claro que nuestra conjetura debe contener una función coseno, pero no es tan claro que ésta debe incluir también una función seno.
   (a) Conjeture $y_p(t) = a \cos 3t$ y sustitúyala en la ecuación. ¿Existe un valor de a tal que $y_p(t)$ sea una solución?
   (b) Escriba un breve párrafo explicando por qué la conjetura apropiada para una solución particular es $y_p(t) = a \cos 3t + b \operatorname{sen} 3t$.

14. Considere la ecuación
$$\frac{dy}{dt} + \lambda y = \cos 2t.$$
Sabemos que para encontrar la solución general de esta ecuación debemos hallar la de la ecuación homogénea $dy/dt + \lambda y = 0$ y sumarla a alguna solución de la ecuación

no homogénea. Explique en unas cuantas líneas por qué no importa cuál solución de la ecuación no homogénea original usamos como solución particular.

15. Considere una ecuación lineal de la forma

$$\frac{dy}{dt} + g(t)y = r_1(t) + r_2(t),$$

es decir, aquellas donde el lado derecho está escrito como una suma de dos funciones. Suponga que $y_h(t)$ es una solución de la ecuación homogénea

$$\frac{dy}{dt} + g(t)y = 0,$$

suponga que $y_1(t)$ es una solución de

$$\frac{dy}{dt} + g(t)y = r_1(t)$$

También tome en cuenta que $y_2(t)$ es una solución de

$$\frac{dy}{dt} + g(t)y = r_2(t).$$

Demuestre que $y_h(t) + y_1(t) + y_2(t)$ es una solución de la ecuación original.

16. Considere la ecuación

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 3t^2 + 2t - 1.$$

Para encontrar la solución general, tenemos que conjeturar una solución particular. Como el lado derecho es un polinomio cuadrático es razonable pensar en una cuadrática para la solución particular, por lo que proponemos

$$y_p(t) = at^2 + bt + c.$$

Compruebe que a, b y c pueden escogerse de manera que se obtenga una solución.

En los ejercicios 17-20, encuentre la solución general y la solución que satisface el valor inicial $y(0) = 0$.

17. $\frac{dy}{dt} + 2y = t^2 + 2t + 1 + e^{4t}$

18. $\frac{dy}{dt} + y = t^3 + \operatorname{sen} 3t$

19. $\frac{dy}{dt} + 3y = \cos 2t + e^{3t} + e^{-4t}$

20. $\frac{dy}{dt} + y = \cos 2t + 3 \operatorname{sen} 2t + e^{-t}$

En los ejercicios 21-23, utilizamos un método muy general de "conjetura y prueba". Del cálculo sabemos que muchas de las funciones comúnmente encontradas pueden representarse como series de potencias (o series de Taylor). Por tanto, suponer que una solución particular tiene la forma $y_p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$ implica una conjetura muy general. La desventaja de ésta es que tenemos que determinar un gran número de coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Además, siempre que tenemos una serie infinita, es preciso atender el problema de la convergencia. Existe una teoría muy amplia sobre las series de potencias que puede encontrarse en los libros viejos sobre ecuaciones diferenciales, y que es particularmente útil en el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales.

21. Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} + y = e^{-3t}.$$

Para encontrar una solución particular, podríamos conjeturar $y_p(t) = ae^{-3t}$ y despejar a. En vez de eso, supongamos que reemplazamos el lado derecho de la ecuación con el polinomio de Taylor, es decir,

$$\frac{dy}{dt} + y = 1 - 3t + \frac{9t^2}{2} - \frac{27t^3}{6} + \ldots.$$

También sería posible hacer una conjetura diferente para $y_p(t)$ que incluyera en una serie de potencias $y_p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots$ En esta conjetura tenemos la ventaja de tratar sólo con polinomios, pero la desventaja es que debemos encontrar un gran número de los coeficientes $a_0, a_1 \ldots$ Como no nos importa qué solución particular determinamos, podemos suponer que $y_p(0) = 0$ $(a_0 = 0)$, pero esto deja aún muchos coeficientes por calcular.

(a) Sustituya la conjetura de la serie de potencias para $y_p(t)$ en la ecuación diferencial (suponiendo $a_0 = 0$) y calcule a_1 y a_2.

(b) Encuentre la solución de la ecuación diferencial con $y(0) = 0$ por los métodos de este apéndice y verifique que los primeros tres coeficientes del polinomio de Taylor son $a_0 = 0$, a_1 y a_2.

22. El método de conjetura con series de potencia no es el mejor método en el problema anterior. Sin embargo, a veces es el único método disponible. Considere la ecuación

$$\frac{dy}{dt} + 2ty = e^t.$$

Note que ésta no es una ecuación de coeficientes constantes, por lo que resulta más difícil encontrar una solución particular. No obstante, podemos obtener una aproximación de la solución conjeturando una serie de potencias.

(a) Verifique que $y_p(t) = ae^t$ no es una solución para cualquier a.

(b) Sea $y_p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots$. Suponga que $y_p(0) = 0$, de modo que $a_0 = 0$. Remplace esta conjetura en la ecuación y calcule a_1 y a_2.

(c) Grafique esta función y compárela con la gráfica de la solución calculada usando el método de Euler. En un párrafo breve describa dónde son iguales y dónde y por qué son diferentes.

23. Podemos emplear este método para motivar la "segunda conjetura" analizada en este apéndice. En la ecuación siguiente

$$\frac{dy}{dt} + 2y = e^{-2t}.$$

Sea $y_p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots$ y suponga $y_p(0) = 0$, por lo que $a_0 = 0$.

(a) Sustituya esta $y_p(t)$ en la ecuación y despeje a_1 y a_2.

(b) Resuelva la ecuación del modo usual y verifique que los tres primeros términos de la serie de Taylor de la solución concuerdan con los encontrados en el inciso (a).

APÉNDICE B NÚMEROS COMPLEJOS Y FÓRMULA DE EULER

Este apéndice es un resumen de algunas de las propiedades básicas de los números complejos que usamos en este texto. Los números y funciones complejas surgen con bastante frecuencia cuando intentamos resolver ecuaciones diferenciales, incluso si éstas implican sólo números reales. Por ejemplo, los números complejos pueden aparecer como eigenvalores para sistemas lineales o como raíces de una ecuación característica de segundo orden. Las funciones complejas también aparecen como soluciones de ecuaciones diferenciales cuando usamos la fórmula de Euler.

Números complejos

Un número complejo tiene la forma $a + bi$, donde a y b son números reales e i es el número "imaginario" $\sqrt{-1}$. De manera equivalente, i es el número cuyo cuadrado es -1, es decir, $i^2 = -1$. Por ejemplo, $2 + 3i$, $-\pi - i$ y $\sqrt{7}\, i$ son números complejos. También es posible considerar al número real 7 como un número complejo escribiéndolo en la forma $7 + 0i$.

Para un número complejo $z = a + bi$, el número real a se llama la **parte real** de z y el número real b se denomina la **parte imaginaria** de z. Observe que no incluimos la i en la parte imaginaria de un número complejo. Así entonces, la parte imaginaria de un número complejo es un número real.

Las reglas usuales de la aritmética son aplicables a los números complejos. Por ejemplo, en la adición de dos de ellos simplemente sumamos las correspondientes partes real e imaginaria. Por tanto,

$$(1 + 2i) + (3 + 4i) = (1 + 3) + (2 + 4)i = 4 + 6i.$$

La multiplicación también obedece las reglas usuales de la aritmética. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}(7 + 2i) \cdot (3 + 4i) &= 7 \cdot 3 + 7 \cdot 4i + 2i \cdot 3 + 2i \cdot 4i \\ &= (7 \cdot 3 - 2 \cdot 4) + (7 \cdot 4 + 2 \cdot 3)\, i\end{aligned}$$

porque $i^2 = -1$, y el resultado es $13 + 34i$. Un producto más fácil de calcular es

$$7i \cdot (1 + 2i) = -14 + 7i.$$

La división de números complejos es un poco más complicada. Por ejemplo, para calcular el cociente

$$\frac{2 + 3i}{3 + 4i},$$

multiplicamos primero el numerador y el denominador por $3 - 4i$, y obtenemos

$$\frac{2 + 3i}{3 + 4i} = \frac{2 + 3i}{3 + 4i} \cdot \frac{3 - 4i}{3 - 4i}.$$

El denominador se convierte en

$$(3 + 4i) \cdot (3 - 4i) = 3^2 + 4^2 = 25,$$

y el numerador es

$$(2 + 3i) \cdot (3 - 4i) = 18 + i.$$

Por tanto,

$$\frac{2+3i}{3+4i} = \frac{18+i}{25} = \frac{18}{25} + \frac{1}{25}i.$$

En general, al calcular $(a + bi)/(c + di)$, multiplicamos el numerador y el denominador por $c - di$. El denominador se convierte entonces en un número real ya que

$$(c+di)\cdot(c-di) = c^2 + d^2 + 0i.$$

El número complejo $c - di$ se llama el **complejo conjugado** de $c + di$. Como segundo ejemplo, considere

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = \frac{2i}{2} = i.$$

Geometría de los números complejos

Los números complejos no se encuentran sobre el eje de los números reales. Residen en forma natural en el plano. Consideramos el eje x como el eje "real" en el plano y el eje y como el eje "imaginario". Trazamos el número complejo $a + bi$ en el punto (a, b). Por ejemplo, el número imaginario i está ubicado en el punto $(0, 1)$ en el plano, y $1 + i$ se localiza en $(1, 1)$.

La **magnitud** de un número complejo z es la distancia de z al origen en el plano complejo. Denotamos la magnitud de z por $|z|$, por consiguiente tenemos

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

El ángulo formado por el eje x positivo y una línea recta del origen a z (medido en sentido contrario al de las manecillas) se denomina el **ángulo polar** de z. Por ejemplo, el número i tiene el ángulo polar $\pi/2$ y magnitud 1. El número complejo $-3i$ posee un ángulo polar de $3\pi/2$ y magnitud 3, y $1 + i$ tiene el ángulo polar $\pi/4$ y magnitud $\sqrt{2}$. Tome en cuenta que para especificar cualquier número complejo todo lo que tenemos que hacer es dar sus partes real e imaginaria. De manera alternativa, podemos especificar un número complejo dando su magnitud y ángulo polar.

Fórmula de Euler

Una de las fórmulas más sorprendentes en toda la matemática es la fórmula de Euler, porque nos proporciona una extraordinaria relación entre las funciones exponenciales y trigonométricas. La fórmula de Euler es

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

para cualquier número real θ. En un momento sabremos de dónde proviene esta fórmula, pero antes es preciso considerar que un caso especial de este resultado es

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi = -1.$$

Es decir, cuando se combinan tres de los números más "interesantes" de la matemática, esto es, e, i y π, como arriba, el resultado es -1. Esto también puede expresarse como

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

La fórmula de Euler nos permite calcular la exponencial de un número complejo. Mediante las reglas comunes de la exponenciación, tenemos

$$e^{a+bi} = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \operatorname{sen} b) = e^a \cos b + i e^a \operatorname{sen} b.$$

Por ejemplo,

$$e^{2+3i} = e^2 \cos 3 + i\, e^2 \operatorname{sen} 3,$$

y

$$e^{(2+3i)t} = e^{2t} \cos 3t + i\, e^{2t} \operatorname{sen} 3t.$$

La fórmula de Euler puede verificarse usando las series de potencias para las funciones implicadas. Recuerde que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

y

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots.$$

Si sustituimos $i\theta$ por x en la serie de potencias para e^x, obtenemos

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \dots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots. \end{aligned}$$

Agrupando los términos que comprenden las partes real e imaginaria, encontramos

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} \dots\right) \\ &= \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta. \end{aligned}$$

Geometría de la multiplicación compleja

Cuando empleamos la fórmula de Euler, podemos dar una interpretación geométrica de la multiplicación de los números complejos. Suponga que $z = a + bi$ posee un ángulo polar θ. Entonces, z está localizada en el punto del plano cuyas coordenadas son (a, b). Usando trigonometría, tenemos $a = |z| \cos \theta$ y $b = |z| \operatorname{sen} \theta$, por lo que podemos escribir este número complejo en **forma polar** como

$$z = |z| \cos\theta + i|z| \operatorname{sen}\theta,$$

que con ayuda de la fórmula de Euler se convierte en

$$z = |z|\, e^{i\theta}.$$

Suponga que tenemos dos números complejos z_1 y z_2 cuyos ángulos polares son θ_1 y θ_2, respectivamente. En ese caso podemos escribirlos en forma polar como

$$z_1 = |z_1|\, e^{i\theta_1} \quad \text{y} \quad z_2 = |z_2|\, e^{i\theta_2}.$$

Si multiplicamos z_1 y z_2, hallamos

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \left(|z_1|\, e^{i\theta_1}\right)\left(|z_2|\, e^{i\theta_2}\right) \\ &= |z_1||z_2|\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned}$$

Así entonces, z_1z_2 es el número complejo cuya magnitud es $|z_1|\,|z_2|$ y cuyo ángulo polar es $\theta_1 + \theta_2$. Por tanto, el producto de dos números complejos es el número complejo cuya magnitud es el producto de las magnitudes de los factores y cuyo ángulo polar es la suma de los ángulos polares de los factores.

Un caso importante especial de esta interpretación geométrica de la multiplicación compleja implica que $w = 1/z$. Primero notamos que $|1| = 1$ y que el ángulo polar de 1 es 0. Entonces, como $zw = 1$, observamos que

$$|w| = \frac{1}{|z|}$$

y que el ángulo polar de w es el negativo del ángulo polar de z. En otras palabras, si

$$z = |z|\, e^{i\theta}, \text{ entonces } \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}\, e^{-i\theta}.$$

SUGERENCIAS Y RESPUESTAS

Sugerencias y respuestas para la sección 1.1

1. **(a)** $P = 0$ y $P = 230$.
   (b) Para $0 < P < 230$.
   (c) Para $P > 230$ o los valores no físicos $P < 0$.

3. **(a)** $y = -3$, $y = 0$ y $y = 4$.
   (b) Para $-3 < y < 0$ o $y > 4$.
   (c) Para $y < -3$ o $0 < y < 4$.

5. $L = 0$.

7. **(a)** Berta.
   (b) Juan.
   (c) Tienen la misma razón.

9. **(a)** $\lambda = \ln(2)/5230 \approx 0.000132533$.
   (b) $\lambda = \ln(2)/8 \approx 0.0866434$.
   (c) 1/año para el C-14, 1/día para el I-131.
   (d) Sí.

11. Cuente el número de átomos de C-14 que decaen en un periodo determinado. Divida este número entre el tiempo transcurrido y obtenga una aproximación para dr/dt. Después utilice $dr/dt = -\lambda r$ para encontrar r.

13. **(a)** $dP/dt = k(1 - P/N)P - 100$.
    (b) $dP/dt = k(1 - P/N)P - P/3$.
    (c) $dP/dt = k(1 - P/N)P - a\sqrt{P}$, donde a es un parámetro positivo.

15. Por ejemplo, un modelo es $dR/dt = kR(R/M - 1)$, donde M es un parámetro que corresponde al umbral en el que la población es demasiado pequeña para soportarse a sí misma a largo plazo. Existen otros modelos razonables basados en las hipótesis formuladas.

17. **(a)** Modelo logístico.
    (b) Capacidad de soporte 64; razón de crecimiento ≈ 0.38.
    (c) La predicción para la población actual es 64.

19. **(a)** Sistema (i).
    (b) Sistema (ii).
    (c) Sistema (i).

21. **(a)** Las especies cooperan.
    (b) Las especies compiten.

Sugerencias y respuestas para la sección 1.2

1. **(a)** Roberto y Genaro.
   (b) La solución de equilibrio $y = -1$.

3. $dy/dt = 3t^2y$.

5. $y(t) = ke^{t^2/2}$, donde k es cualquier número real.

7. $y(t) = ke^{2t} - 1/2$, donde k es cualquier número real.

9. $y(t) = \ln(t + C)$, donde C es cualquier número real.

11. $y(t) = \pm\sqrt{\ln(k(t^2+1))}$, donde k es cualquier número real positivo. El signo que debe utilizarse está determinado por la condición inicial.

13. $y = (-1 \pm \sqrt{4t + C})/2$ donde el signo queda determinado por la condición inicial.

15. $y(t) = ke^t/(ke^t + 1)$, donde k es cualquier número real y la solución de equilibrio $y = 1$. Note que éste es un caso especial de la ecuación logística con parámetro de razón de crecimiento 1 y capacidad de soporte 1.

17. $y(t) = -1+ke^{t+t^3/3}$, donde k es cualquier número real.

19. $y^2/2 + \ln|y| = e^t + C$, donde C es cualquier número real y la solución de equilibrio $y = 0$.

21. $w = kt$, donde k es cualquier número real para $t > 0$ o $t < 0$. (La ecuación diferencial no está definida en $t = 0$.)

23. $y^5/5 + 3y^2/2 = t^3/3 + t + C$, donde C es cualquier número real.

25. $y = 7e^{2t}/2 - 1/2$.

27. $y(t) = 1/(t + 2)$.

29. $y(t) = 0$.

31. $y(t) = -\sqrt{4 + (2/3)\ln(t^3 + 1)}$.

33. $y(t) = \tan(t^2/2 + \pi/4)$.

35. **(a)** Cantidad de sal $\approx$ 0.238 lbs.
(b) Cantidad de sal $\approx$ 1.58 lbs.
(c) Cantidad de sal $\approx$ 2.49 lbs.
(d) Cantidad de sal $\approx$ 2.50 lbs.
(e) Cantidad de sal $\approx$ 2.50 lbs.

37. **(a)** El problema de valor inicial es

$$dT/dt = -0.2(T - 70),\ T(0) = 170.$$

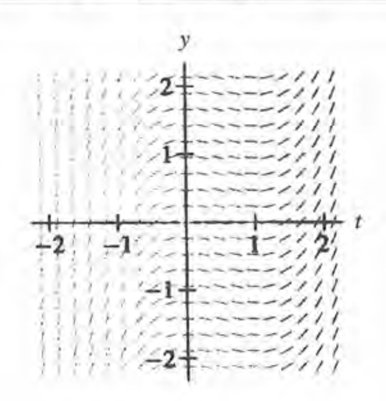
(b) $t = \ln 2.5/0.2 \approx 4.6$.

39. $C(t) = 20/3 + ke^{-3t/100}$, donde k es cualquier número real. $C(t) = 20/3$ es una solución de equilibrio.

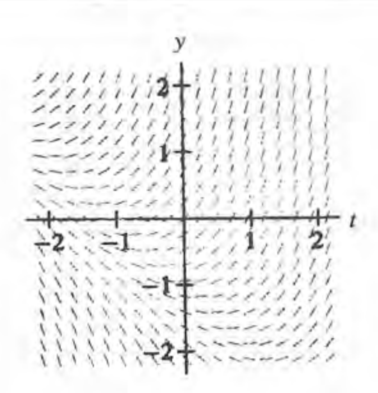
41. **(a)** A 7%, \$278 735; a 6.85% con puntos, \$280 009.
(b) Escoja la opción de 7%.
(c) Escoja la opción de 7%.

Sugerencias y respuestas para la sección 1.3

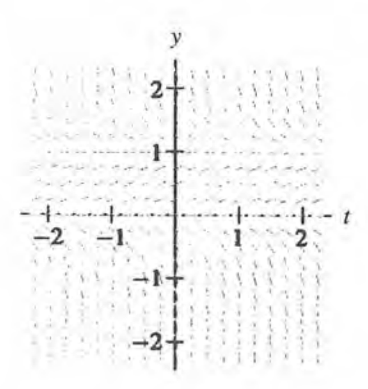
1.



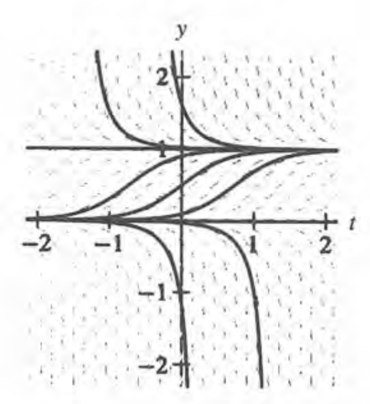
3.



5.

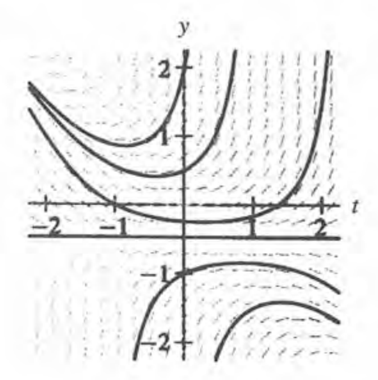


7. **(a)**



(b) La solución tiende al valor de equilibrio 1 desde abajo.

9. **(a)**



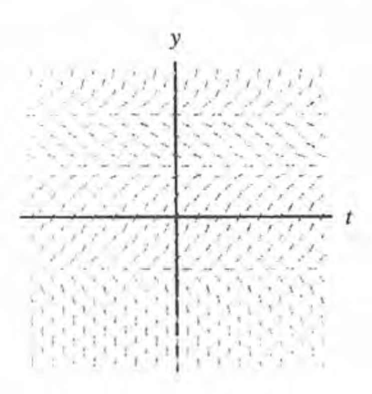
(b) La solución con $y(0) = 1/2$ tiende a infinito cuando t aumenta y disminuye.

11. **(a)** iv. **(b)** v. **(c)** viii. **(d)** iii.

13. **(a)** Sobre la línea $y = 3$ en el plano t-y, el campo de pendientes es un segmento de recta con pendiente -1.

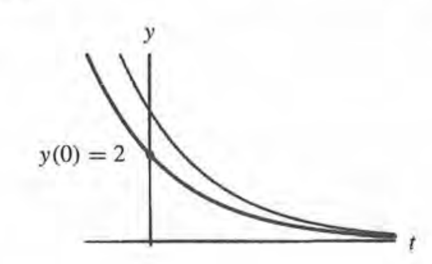
(b) No. Las soluciones con $y(0) < 3$ satisfacen la desigualdad $y(t) < 3$ para toda $t > 0$.

15.



17. **(a)** Esta información es suficiente para dar el campo de pendientes para todos los puntos (t, y) con $y > 0$.

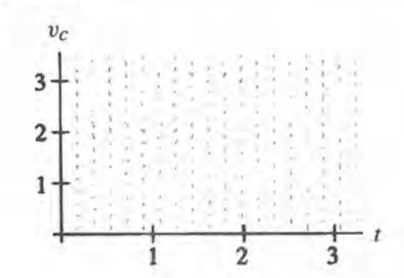
(b)



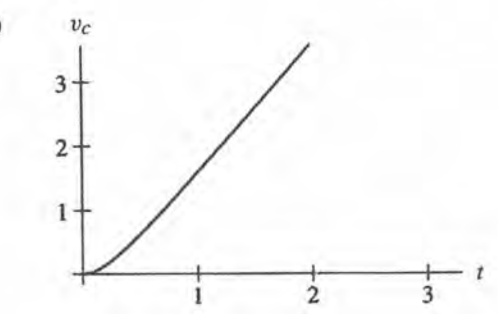
La solución con $y(0) = 2$ es una traslación a la izquierda de la solución dada.

19. $v_c(t) = K + ke^{-t/RC}$

21. **(a)**



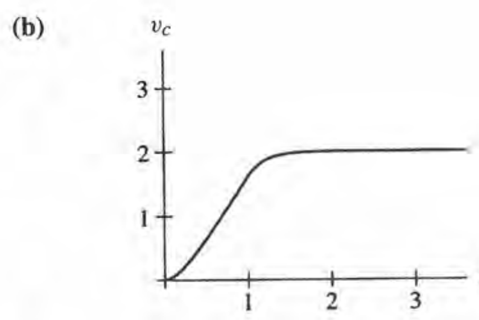
(b)



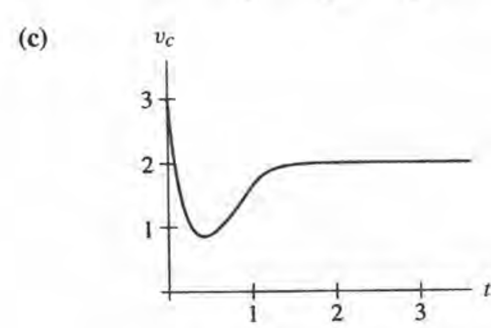
(c)

23. (a)

(b)



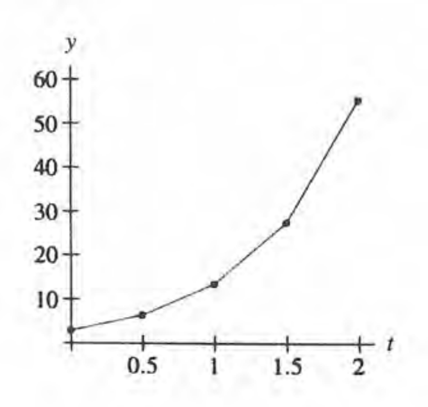
(c)



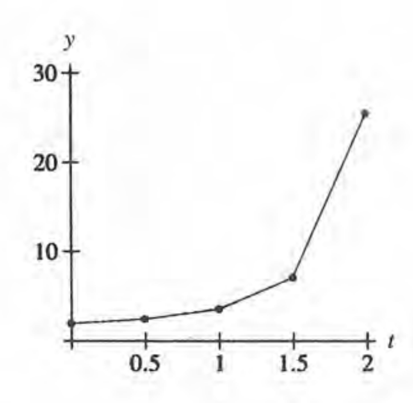
(d) Para $t < 1$, la solución es como en el ejercicio 21. Para $t \geq 1$, es parecida a la del ejercicio 22 con una condición inicial en $t = 1$ determinada por la solución para $t \leq 1$.

Sugerencias y respuestas para la sección 1.4

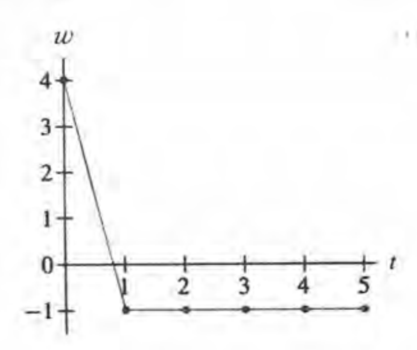
1. *Sugerencia:* Cuando $t = 2$, la aproximación de Euler es $y \approx 55.5$.



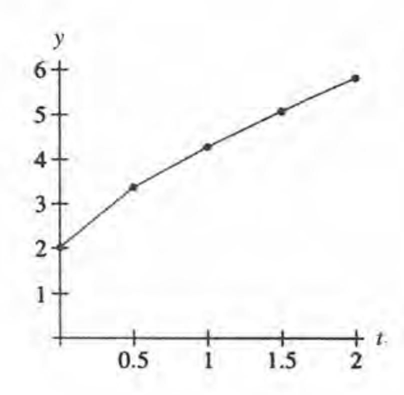
3. *Sugerencia:* Cuando $t = 2$, la aproximación de Euler es $y \approx 25.49$.



5. *Sugerencia:* Cuando $t = 5$, la aproximación de Euler es $w = -1$.



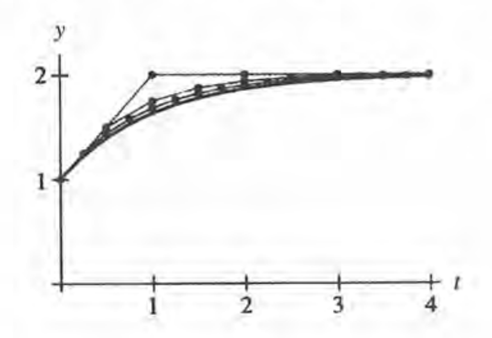
7. *Sugerencia:* Cuando $t = 2$, la aproximación de Euler es $y \approx 5.81$.



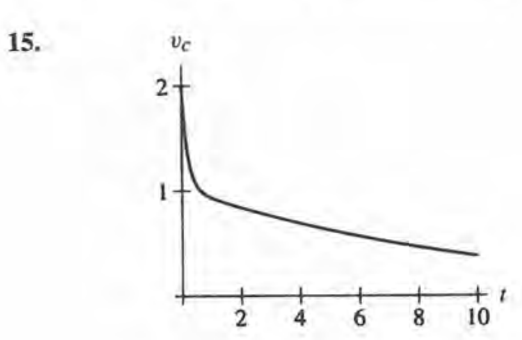
9. La respuesta al ejercicio 8 es una traslación a la derecha del resultado del ejercicio 7. ¿Por qué?

11. *Sugerencia:* ¿Cuáles son las soluciones constantes? Del análisis cualitativo, las soluciones con condición inicial $w(0) = 0$ deben crecer hasta alcanzar la de equilibrio en $w = 3$. Sin embargo, la solución numérica indica que la solución oscila alrededor de $w = 3$.

13. *Sugerencia:* ¿Cuál es la concavidad de la solución? ¿Las aproximaciones del método de Euler están por arriba o por abajo de la solución real?

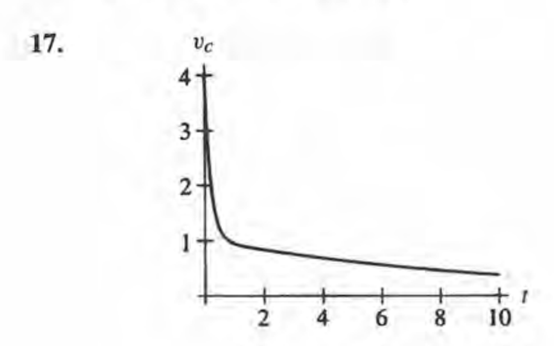


15.



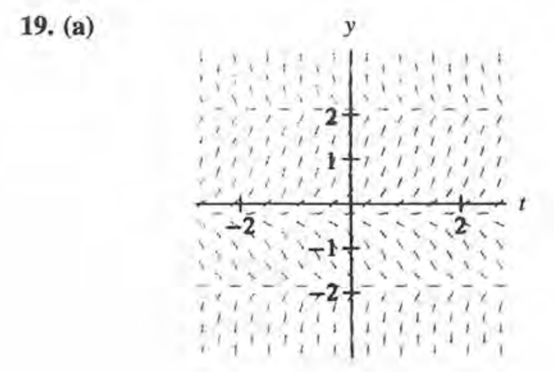
Gráfica de la solución aproximada.

17.

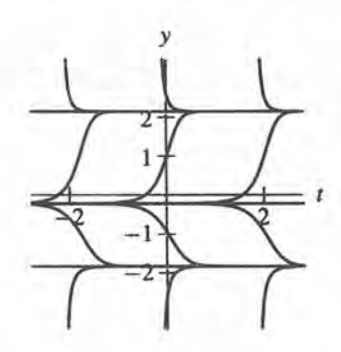


Gráfica de la solución aproximada.

19. (a)



(b)



(c) Las raíces de $p(y)$ son puntos de equilibrio de la ecuación diferencial.

(d) $y \approx 2.115$, $y \approx -1.861$ y $y \approx = -0.254$.

Sugerencias y respuestas para la sección 1.5

1. $y(t) < 3$ para toda t en el dominio de definición de $y(t)$.

3. $-t^2 < y(t) < t + 2$ para toda t.

5. $y(t) > 3$ para toda t en el dominio de definición de $y(t)$, $y(t)$ tiende a 3 cuando t decrece y tiene un incremento infinito cuando t crece.

7. $0 < y(t) < 2$ para toda t, de modo que $y(t) \to 2$ cuando t crece y $y(t) \to 0$ cuando t decrece.

9. **(a)** Sustituya cada solución en la ecuación diferencial y calcule.

(b) Use el teorema de existencia y unicidad.

11. **(a)** *Sugerencia:* Diferencie $y_1(t)$ en t_0 y recuerde que $y_1(t)$ es una solución.

(b) *Sugerencia:* Recuerde que la ecuación es autónoma.

(c) *Sugerencia:* Observe el campo de pendientes, pero revise sustituyendo $y_2(t)$ en ambos lados de la ecuación diferencial.

(d) *Sugerencia:* Teorema de unicidad.

(e) *Sugerencia:* Efectúe de nuevo los mismos cuatro pasos.

13. **(a)** Si $y_1(t) = 0$, entonces $dy_1/dt = 0 = y_1/t^2$.

(b) Para cualquier número real c, sea

$$y_c(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t \le 0; \\ ce^{-1/t}, & \text{para } t > 0. \end{cases}$$

La función $y_c(t)$ satisface la ecuación para toda $t \neq 0$. Es 0 para $t < 0$ y diferente de cero para $t > 0$.

(c) La ecuación diferencial, y/t^2, no está definida en $t = 0$.

15. **(a)** $y(t) = -1 + \sqrt{1 + \ln((1 - t/2)^2)}$.

(b) El dominio de la solución es $t \le 2(1 - 1/\sqrt{e})$.

(c) $y(t) \to -1$ cuando $t \to 2(1 - 1/\sqrt{e})$.

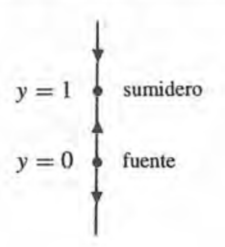
17. **(a)** $y(t) = 2 - \sqrt{t^2 + 3}$.

(b) El dominio de definición son todos los números reales.

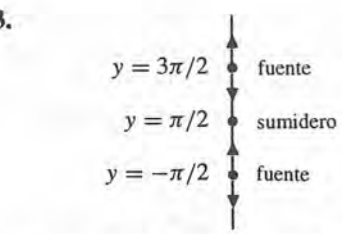
(c) $y(t) \to -\infty$ cuando $t \to \pm\infty$.

Sugerencias y respuestas para la sección 1.6

1.

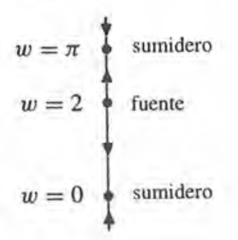


3.



$\ldots - 3\pi/2, \pi/2, 5\pi/2, \ldots$ son sumideros y
$\ldots - \pi/2, 3\pi/2, 7\pi/2, \ldots$ son fuentes.

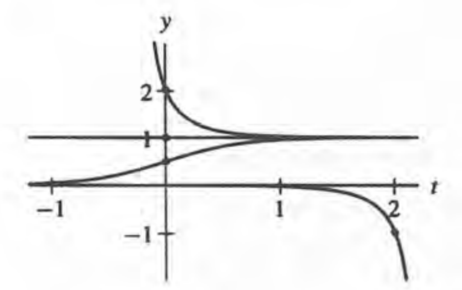
5. Los sumideros son $w = 0, -2\pi, -4\pi \ldots$ y $\pi, 3\pi, 5\pi \ldots$, las fuentes son $w = 2$, $w = -\pi, -3\pi, \ldots$ y $w = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$



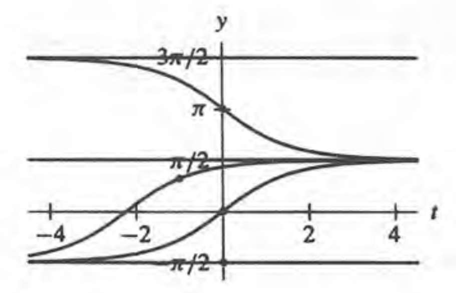
7. No hay puntos de equilibrio.



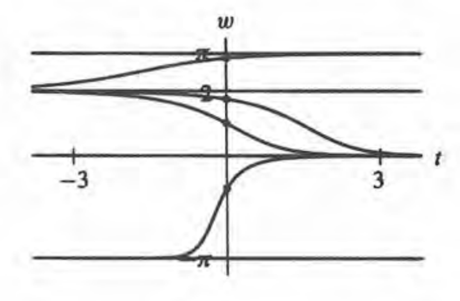
9.



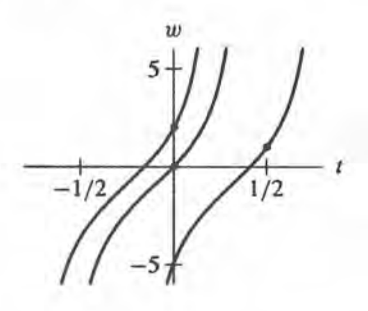
11.



13.



15.

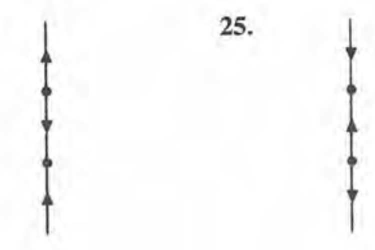


17. Como la condición inicial, 1, está entre las raíces de $y^2 - 4y + 2$, la solución $y(t)$ al problema de valor inicial está siempre entre $2 - \sqrt{2}$ y $2 + \sqrt{2}$. El límite de $y(t)$ cuando $t \to \infty$ es $2 - \sqrt{2}$, y cuando $t \to -\infty$ es $2 + \sqrt{2}$.

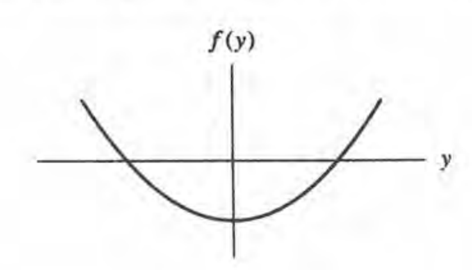
19. La solución permanece debajo del punto de equilibrio $2 - \sqrt{2}$ y se incrementa para toda t que esté definida. El límite de $y(t)$ cuando $t \to \infty$ es $2 - \sqrt{2}$.

21. Como la condición inicial, 1, está entre las raíces de $y^2 - 4y + 2$, la solución $y(t)$ al problema de valor inicial está siempre entre $2 - \sqrt{2}$ y $2 + \sqrt{2}$. Cuando $\to \infty$, el límite de $y(t)$ es $2 - \sqrt{2}$, y cuando $t \to -\infty$ es $2 + \sqrt{2}$.

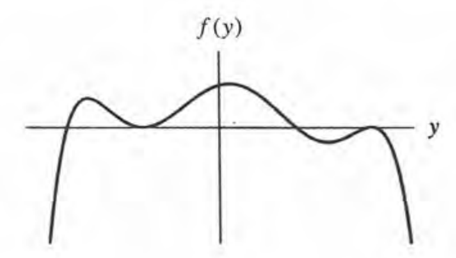
23. 25.



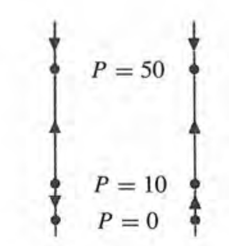
27. La siguiente gráfica es una de las muchas respuestas.



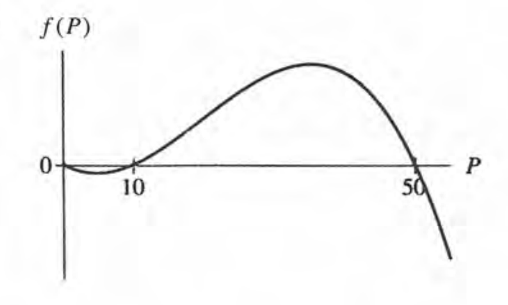
29. La siguiente gráfica es una de las muchas respuestas.



31. (a)



(b)



(c) Las funciones $f(P) = P(P - 10)(50 - P)$ y $f(P) = P(P - 10)^2(50 - P)$.

33. (a) *Sugerencia:* Use el teorema del valor intermedio.

(b) *Sugerencia:* En una fuente, f cruza el eje y de negativo a positivo. Use dos veces el teorema del valor intermedio.

35. (a) Fuente.

(b) Sumidero.

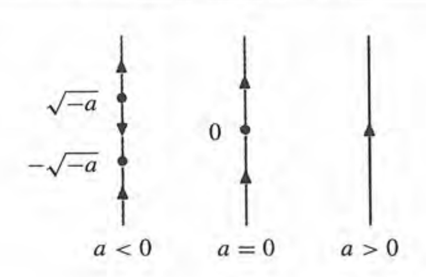
(c) Nodo.

37. El término βx es el efecto de los pasajeros y $-\alpha$ denota la razón de la disminución del tiempo entre los trenes cuando no hay pasajeros presentes. Tanto α como β deben ser positivos.

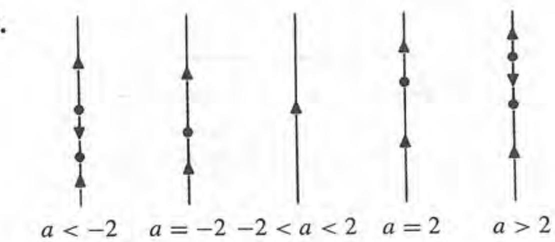
39. Como el único punto de equilibrio, $x = \alpha/\beta$, es una fuente, si la separación inicial entre trenes es muy grande, entonces el incremento de x será ilimitado y si es muy pequeña, x decrecerá a cero. Es muy improbable que el tiempo entre los trenes sea largo y permanezca exactamente en la fuente.

Sugerencias y respuestas para la sección 1.7

1.



3.



5. Sólo una bifurcación en $\alpha = 1$. Un par sumidero/fuente de equilibrio para $\alpha < 1$ entran en colisión y forman un nodo en $\alpha = 1$. Ningún punto de equilibrio para $\alpha > 1$.

7. **(a)** $L = 16$.

(b) Si la población es mayor de 40 cuando se emiten las licencias, entonces aquélla se dirige hacia 60. Si la población es menor de 40 cuando comienza la pesca, los peces se extinguirán.

(c) En tanto que la población de peces sea bastante mayor de 40 cuando se emiten 16 licencias, las perturbaciones inesperadas en el sistema no afectarán drásticamente a los peces y la población tenderá hacia el punto de equilibrio cerca de 60. (¿Qué sucede si se emiten $16\frac{2}{3}$ licencias?)

9. **(a)**

$f_E(S)$

S

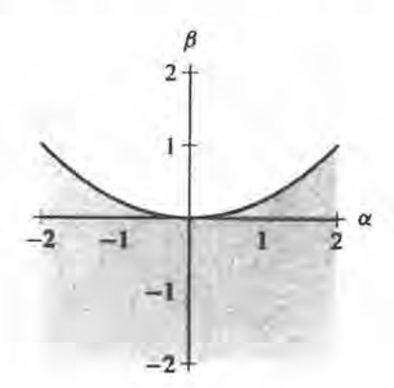
M

N

(b) Antes de la bifurcación hay dos puntos de equilibrio positivos, el menor de los cuales es una fuente y el mayor es un sumidero. Si la población de ardillas negras está inicialmente arriba de la fuente, entonces la población tenderá hacia el sumidero. Después de la bifurcación, no hay puntos de equilibrio positivos y por tanto la población de ardillas negras se desplomará hacia cero.

(c) $$E = \frac{k}{27MN}\big((N-2M)(M+N)(2N-M) + 2(M^2 - MN + N^2)^{3/2}\big)$$

11. El discriminante es $D = \alpha^2 - 4\beta$. Cuando D es positivo, hay dos puntos de equilibrio; cuando D es cero, hay un punto de equilibrio; y cuando D es negativo, no hay ninguno. En la figura, la región sombreada corresponde a las líneas fase con dos puntos de equilibrio. Sobre la parábola hay uno; arriba de ésta, ninguno.



13. *Sugerencia:* ¿Cuáles son los signos de $f_0(0)$ y $f_0(1)$ y cómo varían (si esto es posible) si se modifica α?

15. Como la suma de los índices es cero, el número de sumideros y fuentes es el mismo cuando $\alpha = 0$. Además, puesto que $f_\alpha(0) > 0$ y $f_\alpha(1) \neq 0$ para toda α y f_α es continua, habrá un valor mínimo negativo para f_α en $0 \leq y \leq 1$. Escoger un número positivo M_α mayor en valor absoluto que este mínimo da $f_\alpha + M_\alpha > 0$. Trate de esbozar varias funciones que satisfagan las condiciones de $f_0(y)$ sobre el intervalo de 0 a 1.

17. *Sugerencia:* Hay un punto de equilibrio para $\alpha > 0$, y tres para $\alpha < 0$.

19. $dy/dt = y(y + \alpha)(y^2 + \alpha)(y^4 + \alpha)$ es sólo uno de un número infinito de ejemplos.

Sugerencias y respuestas para la sección 1.8

1. $y(t) = t + c/t$.

3. $y(t) = \dfrac{3e^{-t}}{2} + ce^{t}$.

5. $y(t) = t + (1 + t^2)(\arctan(t) + c)$.

7. $y(t) = t^2 - 2t + 2 + ce^{-t}$.

9. $y(t) = \dfrac{t^2 + 2t + 3}{1 + t}$.

11. $y(t) = t + \dfrac{2}{t}$.

13. $y(t) = 2t^3 + 5t^2$.

15. $y(t) = 4e^{-\cos t} \int e^{\cos t}\, dt$.

17. $y(t) = 4e^{-1/t} \int e^{1/t} \cos t\, dt$.

19. $a = -2$.

21. **(a)** $dP/dt = .04P + 520$.
(b) aproximadamente \$3 488.94.

23. Aproximadamente 5.08 años (61 meses).

25. 4.25 partes por mil millones.

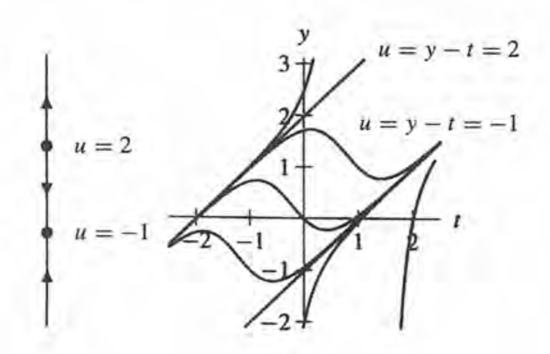
27. **(a)** $dy/dt = 1/2 - y/(V_0 + t)$.
(b) Note que si $V_0 = 0$, entonces la ecuación diferencial no está definida en $t = 0$. La cantidad de sal en el tanque en el tiempo t es $t/4$.

Sugerencias y respuestas para la sección 1.9

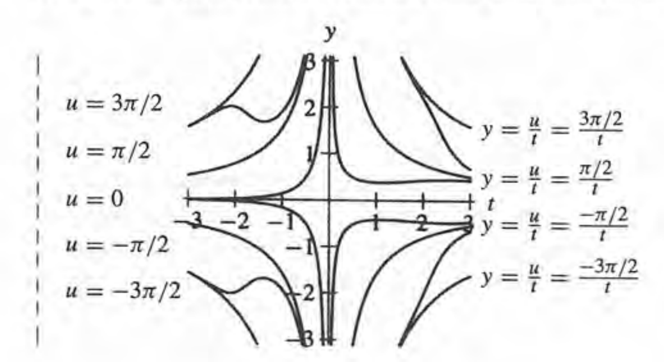
1. $du/dt = u^2 + u$.

3. $du/dt = u/t + t(u + u^2 + \cos u)$.

5. Para $u = y - t$, la ecuación toma la forma $du/dt = u^2 - u - 2$.

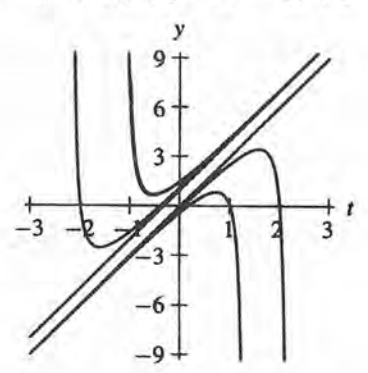


7. Para $u = ty$, la ecuación toma la forma $du/dt = u \cos u$.

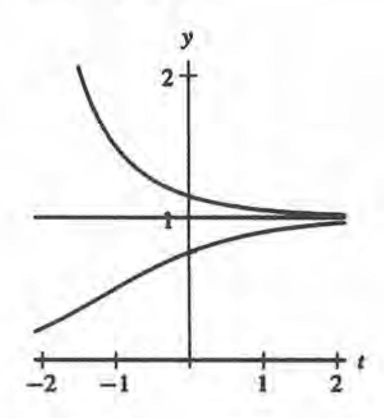


9. $y(t) = t^3(1 + t)/4 + k(1 + (1/t))$

11. $dy/dt = -y^2 + 6ty + y - 9t^2 - 3t + 3$



13. $dy/dt = 2y(1 - \sqrt{y})$



15. **(a)** $dS/dt = 3 - 3S/(10 + 3t)$.

(b) $dC/dt = 3(1 - 2C)/(10 + 3t)$.

(c) $C = 1/2$.

(d) $C(5) = 0.42$.

17. **(a)** $y = 10^{-1/3}$.

(b) Con $u = y - 10^{-1/3}$, la aproximación lineal es $du/dy = 3\sqrt[3]{10}\,u$. El origen es una fuente.

(c) La solución crece según $e^{3\sqrt[3]{10}\,t}$. El tiempo necesario para duplicar la distancia desde el punto de equilibrio es $t = (\ln 2)/(3\sqrt[3]{10})$.

19. **(a)** $y = -1, 3$.

(b) Con $u = y + 1$, la linearización es $du/dt = 4u$. La expresión $u = 0$ es una fuente. Con $v = y - 3$, la linearización es $dv/dt = -4v$. El término $v = 0$ es un sumidero.

(c) Para $y = -1$, la solución crece según e^{4t}. El tiempo necesario para duplicar la distancia desde el punto de equilibrio es $t = \ln 2/4$. Para $y = 3$, la solución aumenta conforme e^{-4t}. El tiempo requerido para acortar en dos la distancia desde el punto de equilibrio es $t = \ln 2/4$.

21. **(a)** $y - y^3/3!$

(b) $dy/dt = -3y$.

(c) $y(2) = 0.04e^{-6}$.

23. **(a)** Con $u = P - 100$,
$du/dt = -0.05u(u/100 + 1) - 0.02(1 + \text{sen } t)$.

(b) $du/dt = -0.05u - 0.02(1 + \text{sen } t)$.

(c) $u(t) = -0.4 - 2 \text{ sen } t/2005 + 8 \cos t/401 + ke^{-0.05t}$.

(d) Para una t grande, $ke^{-0.05t}$ resulta despreciable. Además, $u(t)$ fluctúa entre -0.38 y -0.42. En ese caso, P fluctúa alrededor de 99.6.

25. **(a)** $du/dt = f(u + y_0)$.

(b) Usando el desarrollo de Taylor en $u = 0$, se obtiene $f(u + y_0) = f(y_0) + f'(y_0)u + \ldots$ La linearización es $du/dt = f'(y_0)u$.

Sugerencias y respuestas para la sección 2.1

1. El sistema (i) corresponde a grandes depredadores y presas pequeñas. El sistema (ii) corresponde a depredadores pequeños y presas grandes.

3. *Sugerencia:* Calcule dy/dt para $y = 0$.

5. *Sugerencia:* Calcule dx/dt para $x = 0$.

7. Las poblaciones oscilan con amplitud decreciente alrededor de un punto de equilibrio con ambas poblaciones diferentes de cero.

9. Cambie sólo la ecuación dR/dt,

(i) $dR/dt = 2R - 1.2\,RF - \alpha$.
(ii) $dR/dt = R(2 - R) - 1.2\,RF - \alpha$.

11. En ambos sistemas, haga $dF/dt = kF + 0.9RF$, donde $k > 0$ es el parámetro de la razón de crecimiento para la población de depredadores (ignorando cualquier efecto de sobrepoblación).

13. En ambos sistemas haga $dF/dt = -F + 0.9FR + k(R - 5F)$, donde k es un parámetro de la razón de inmigración.

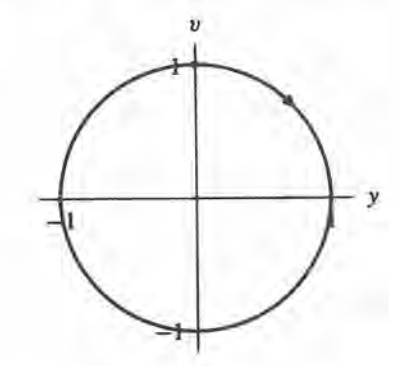
15. El sistema (i) corresponde a boas constrictoras y el sistema (ii) a felinos pequeños. *Sugerencia:* Suponga que hay un depredador ($y = 1$), ¿cuántas unidades de presa se requieren para mantener $dy/dt = 0$?

17. **(a)** *Sugerencia:* Siga el comportamiento de una solución con condición inicial cerca de (0, 0), después de que la aplicación del pesticida mata casi todos los depredadores y presas.

(b) Después de aplicar el control de la plaga, usted podría ver un incremento ilimitado de la población plaga debido a la ausencia del depredador.

19. **(a)** $\dfrac{d^2(\text{sen } t)}{dt^2} + \text{sen } t = -\text{sen } t + \text{sen } t = 0$.

(b)



(c) Son la misma curva en el plano y-v.
(d) Son parametrizadas en forma diferente.

21. 4 lbs por pulg o 48 lbs por pie.

23. Grande.

25. $da/dt = -\alpha ab$, $db/dt = -\alpha ab$, donde α es el parámetro de la razón de reacción.

27. $da/dt = k_1 - \alpha ab$, $db/dt = k_2 - \alpha ab$, donde k_1 y k_2 son las razones a las que se agregan A y B, respectivamente.

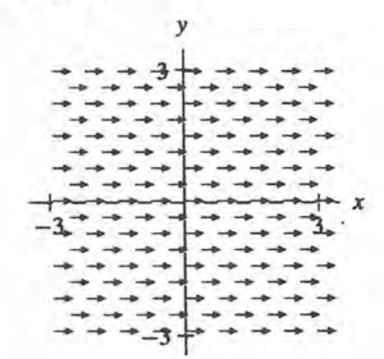
29. $da/dt = k_1 - \alpha ab + \gamma b^2/2$ y $db/dt = k_2 - \alpha ab - \gamma b^2$, donde γ es el parámetro de la razón de reacción para convertir 2 B en A.

Sugerencias y respuestas para la sección 2.2

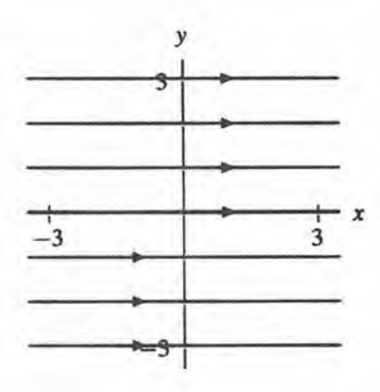
1. (a) $\mathbf{V}(x, y) = (1, 0)$.

(b) Vea el inciso (c).

(c)



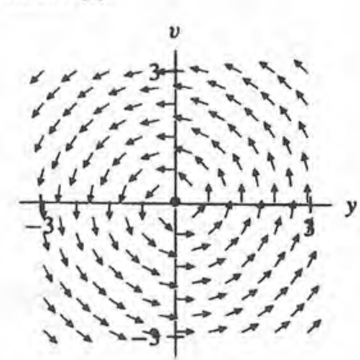
(d)



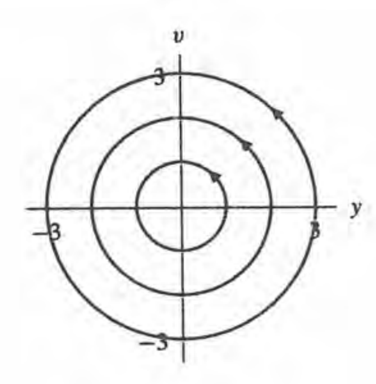
3. (a) $\mathbf{V}(y, v) = (-v, y)$.

(b) Vea el inciso (c).

(c)



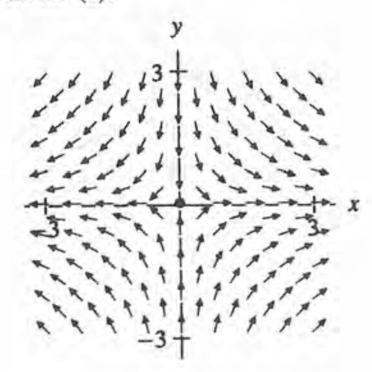
(d)



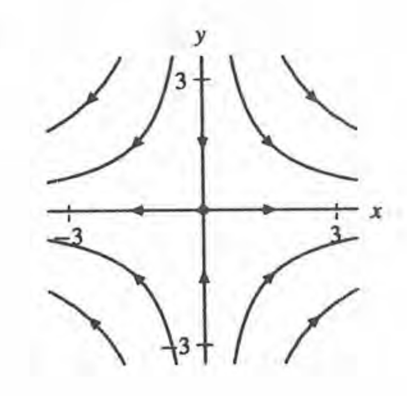
5. (a) $\mathbf{V}(x, y) = (x, -y)$.

(b) Vea el inciso (c).

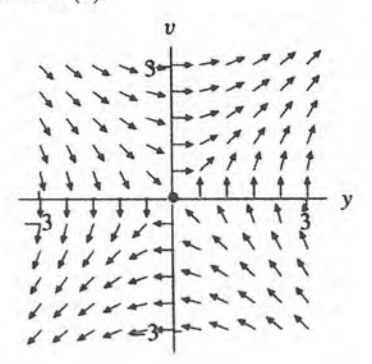
(c)



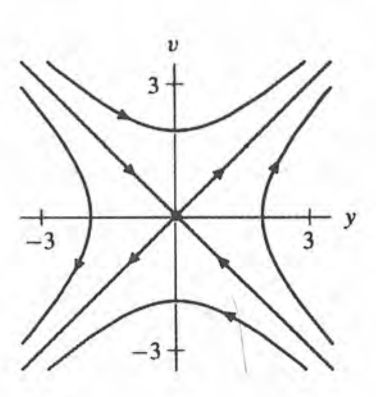
(d)



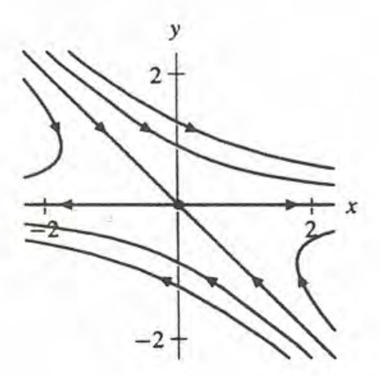
7. (a) $\mathbf{V}(y, v) = (v, y)$.
(b) Vea el inciso (c).
(c)



(d)



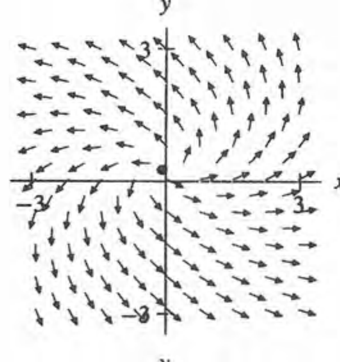
9. (a)



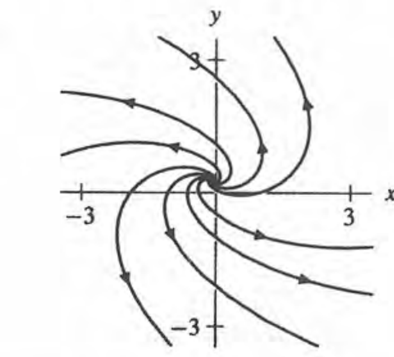
(b) La solución tiende al origen a lo largo de la línea $y = -x$ en el plano fase x-y. Por tanto, $x(t)$ y $y(t)$ tienden a cero cuando $t \to \infty$.

11. (a) El punto de equilibrio es $(-1/9, 2/9)$.

(b)

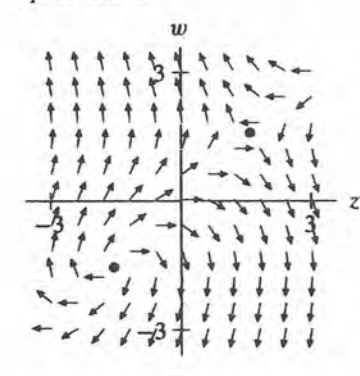


(c)

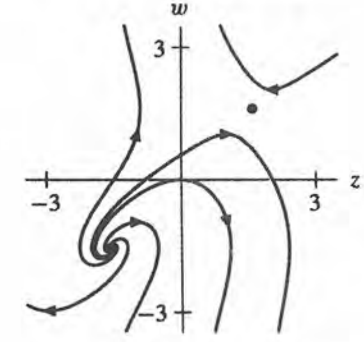


13. (a) Puntos de equilibrio: $(\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$, donde k es cualquier entero.

(b)

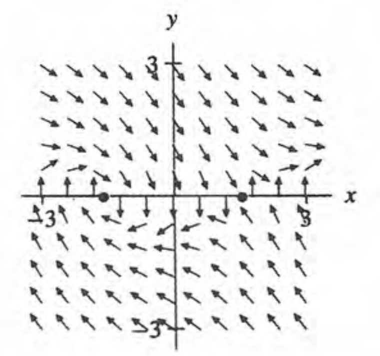


(c)

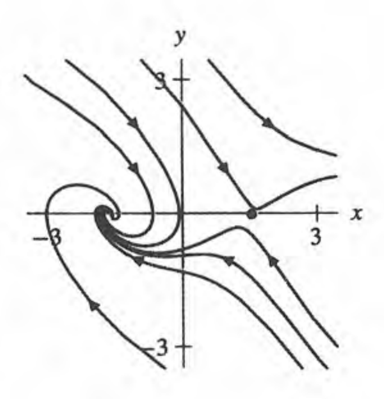


15. **(a)** Puntos de equilibrio: $(\pi/2 + k\pi, 0)$, donde k es cualquier entero.

(b)



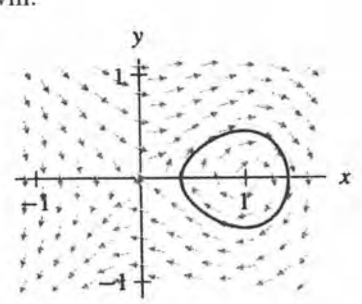
(c)



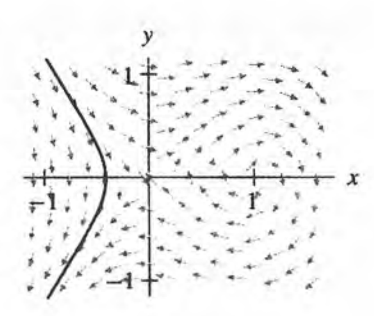
17. Sistema ii.

19. Sistema viii.

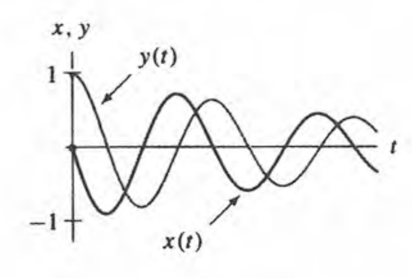
21.



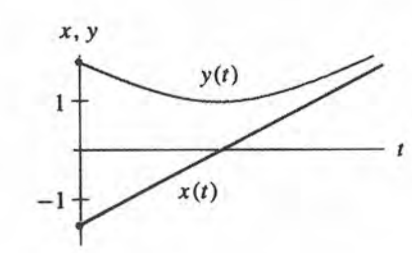
23.



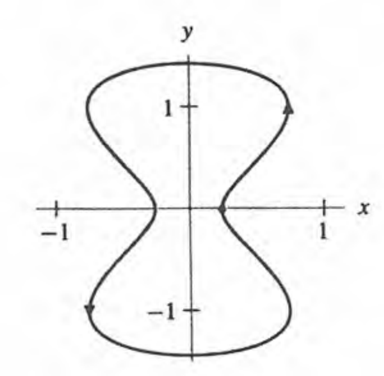
25.



27.



29.



31. No entrarán en colisión.

Sugerencias y respuestas para la sección 2.3

1. $(x(t), y(t))$ es una solución.

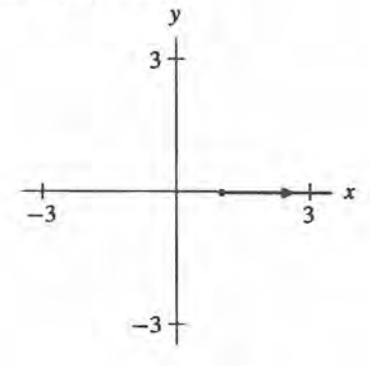
3. $(x(t), y(t))$ no es una solución.

5. $y(t) = e^{-2t}$ no es una solución.

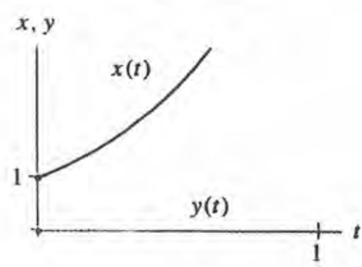
7. $x(t) = k_2 e^{2t} - \frac{k_1}{3} e^{-t}$, $y(t) = k_1 e^{-t}$

9. **(a)** $x(t) = e^{2t}$, $y(t) = 0$

(b)

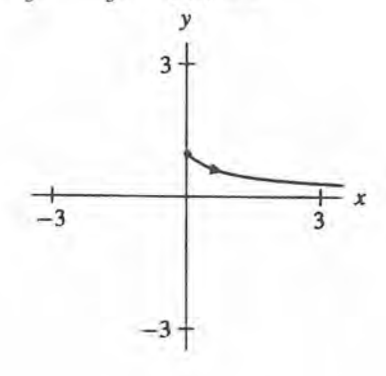


(c)

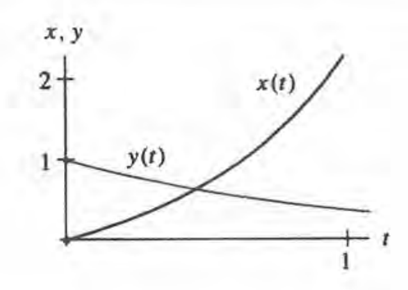


11. **(a)** $x(t) = \frac{1}{3} e^{2t} - \frac{1}{3} e^{-t}$, $y(t) = e^{-t}$

(b)



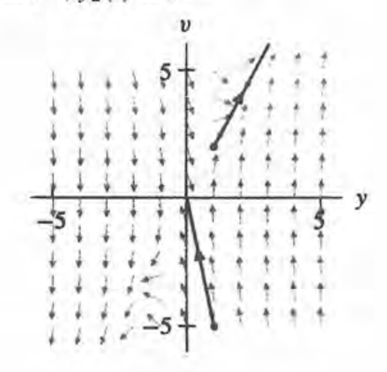
(c)

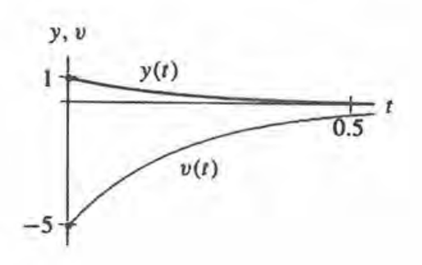


13. **(a)** Vea el inciso (c).

(b) $y_1(t) = e^{2t}$; $y_2(t) = e^{-5t}$

(c)

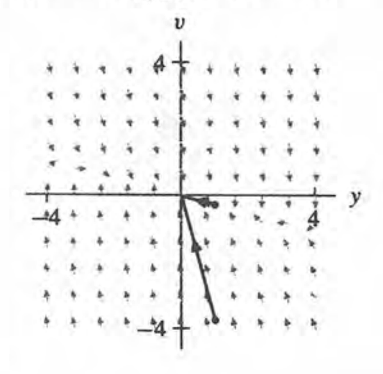


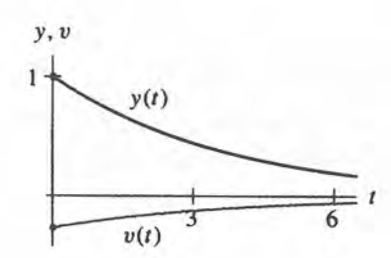


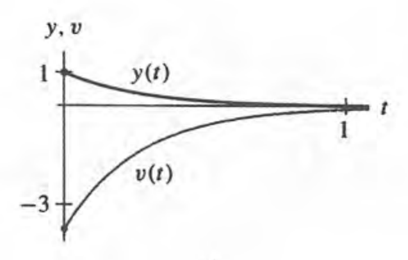
15. (a) Vea el inciso (c).

(b) $y_1(t) = e^{(-2+\sqrt{3})t}$; $y_2(t) = e^{(-2-\sqrt{3})t}$

(c)







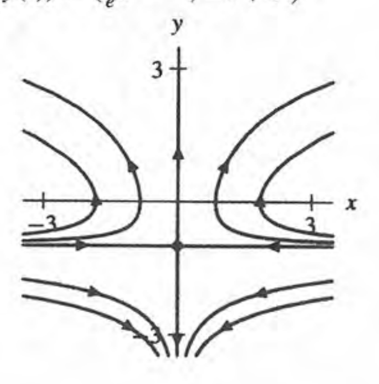
17. $m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -(k_1 + k_2)y + k_1L_1 - k_2L_2 + \dfrac{k_2 - k_1}{2} - b\dfrac{dy}{dt}$, donde $y = 0$ es el centro, $y < 0$ está a la izquierda y $y > 0$ está a la derecha.

19. (a) $(x(t), y(t)) = (k_2e^{-t+k_1e^t}, -1 + k_1e^t)$

(b) $(x, y) = (0, -1)$

(c) $(x(t), y(t)) = (\frac{1}{e}e^{-t+e^t}, -1 + e^t)$

(d)



Sugerencias y respuestas para la sección 2.4

1. (a) Es una solución.

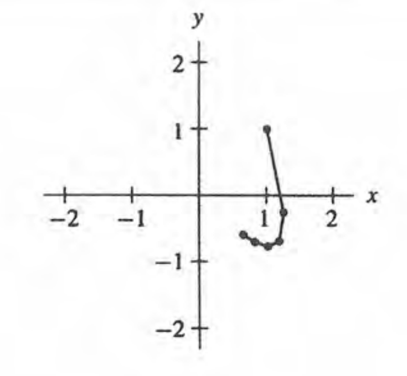
(b) En $t = 10$, la aproximación de Euler está alrededor de $(-9.21, 1.41)$ y la solución verdadera es muy cercana a $(-0.84, -0.54)$.

(c) En $t = 10$ la aproximación de Euler está cerca de $(-1.41, -0.85)$ y la solución verdadera está alrededor de $(-0.84, -0.54)$.

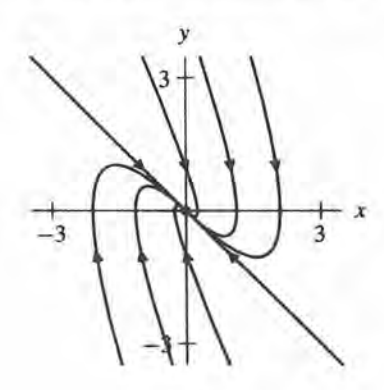
(d) La aproximación se moverá siempre en espiral alejándose del origen.

3. (a) $(x_5, y_5) \approx (0.65, -0.59)$.

(b)



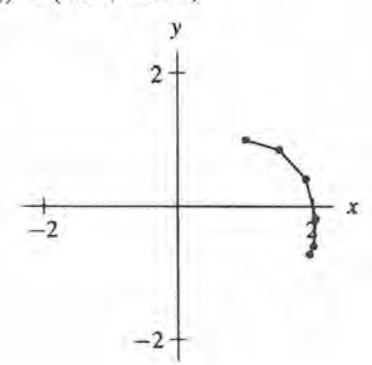
(c)



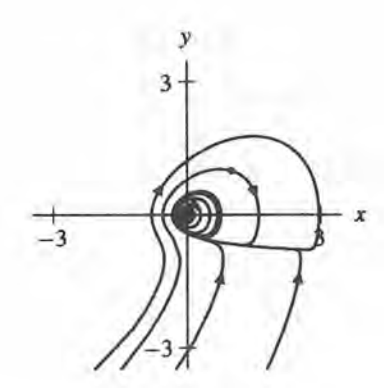
(d) Es consistente.

5. **(a)** $(x_5, y_5) \approx (1.94, -0.72)$

(b)



(c)

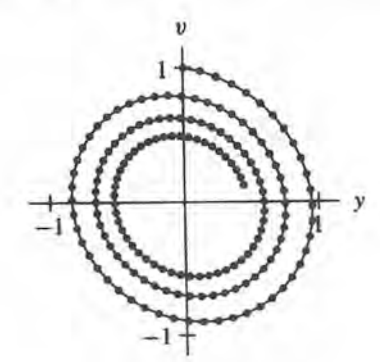


(d) Es consistente.

7. *Sugerencia:* Sustituya $Y_1(t) = (e^{-t} \text{ sen } (3t), e^{-t} \cos (3t))$ en la ecuación diferencial.

9. Dan la misma espiral. Esto no contradice el teorema de unicidad porque nunca están en el mismo lugar al mismo tiempo.

11.



13. Suponiendo que el campo vectorial satisface las hipótesis del teorema de unicidad, no entrarán en colisión.

15. *Sugerencia:* Vea el ejercicio 14.

Sugerencias y respuestas para la sección 2.5

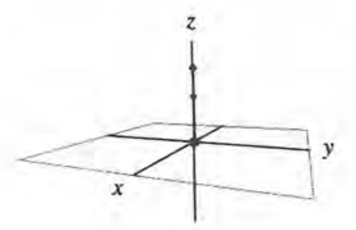
1. **(a)** *Sugerencia:* Sustituya (0, 0, 0) y ($\pm 6\sqrt{2}$, $\pm 6\sqrt{2}$, 27) para ver si todas las derivadas son cero.

(b) *Sugerencia:* Haga $dx/dt = dy/dt = dz/dt = 0$ y resuelva las tres ecuaciones simultáneamente.

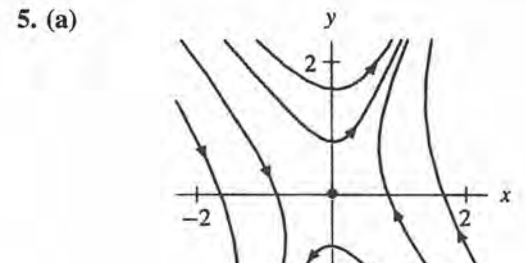
3. **(a)** Note que dx/dt y dy/dt desaparecen si $x = y = 0$.

(b) La solución es $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ y $z(t) = e^{-8t/3}$.

(c) La solución es $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ y $z(t) = z_0 e^{-8t/3}$.



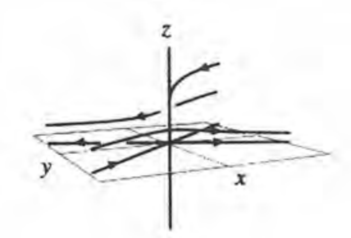
5. **(a)**



(b)



(c)



Sugerencias y respuestas para la sección 3.1

1. En este caso, $dx/dt = dy/dt$, por lo que x y y cambian igualmente. Las ganancias de Pablo tienen un efecto positivo sobre x y y, mientras que para Roberto tienen un efecto negativo. Si las ganancias de Pablo son mayores que las de Roberto, entonces se incrementarán las utilidades de ambas tiendas.

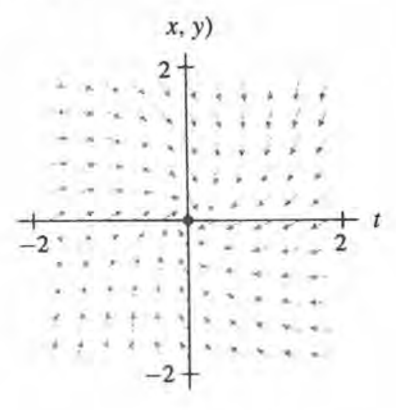
3. Como $a = 1$ y $b = 0$, las ganancias de Pablo tienen un efecto positivo sobre las que obtendrá en el futuro, pero las ganancias de Roberto no tienen efecto. Como $c = 2$ y $d = 1$, las utilidades de ambas tiendas afectan positivamente a Roberto. Sin embargo, el efecto de las ganancias de Pablo es el doble de lo que gana Roberto.

5. $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{Y}$

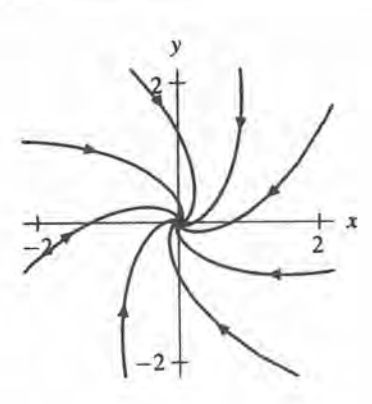
7. $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \quad \dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -7 \\ -2 & 0 & 6 \\ 0 & 7.3 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{Y}$

9.
$$\frac{dx}{dt} = \beta y$$
$$\frac{dy}{dt} = \gamma x - y$$

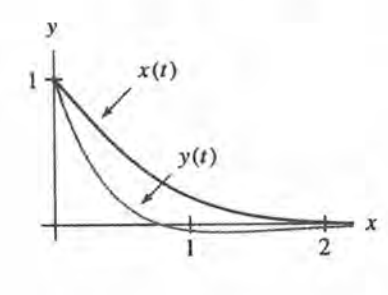
11. (a)



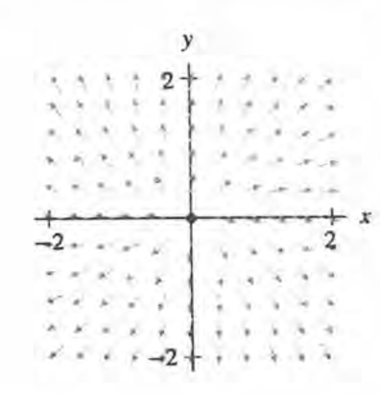
(b)



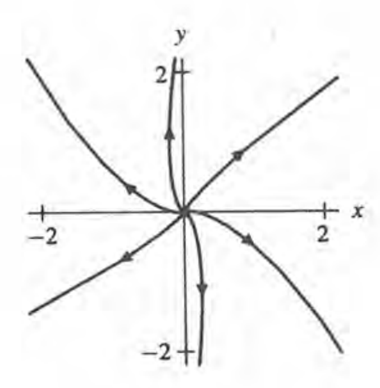
(c)



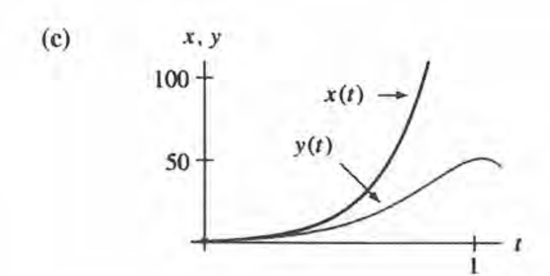
13. (a)



(b)



(c)



15. Si $a \neq 0$, entonces el conjunto de todos los puntos de equilibrio (x_0, y_0) está representado por aquellos puntos que se encuentran sobre la línea $x_0 = (-b/a)y_0$. Si $a = 0$ y $b \neq 0$, el conjunto de todos los puntos de equilibrio es el eje x. Finalmente, si $a = b = 0$, el conjunto de todos los puntos de equilibrio es la línea definida por la ecuación $cx_0 + dy_0 = 0$.

17. (a) Línea de equilibrio $v = 0$.
    (b) Línea de equilibrio $v = 0$.

19. *Sugerencia:* Sea $v = dy/dt$ y $w = d^2y/dt^2$.

21. $\gamma > 0$.

23. $\delta < 0$.

25. (a) Sustituya $\mathbf{Y}(t)$ en la ecuación diferencial y revise que el lado izquierdo sea igual al derecho.
    (b) La solución con esta condición inicial es $(-2te^{2t}, (2t + 2)e^{2t})$.

27. (a) Son soluciones.
    (b) Son linealmente independientes.

    (c) $\mathbf{Y}(t) = (e^{-3t} + e^{-4t}, e^{-3t} + 2e^{-4t})$.

29. (a) $\mathbf{Y}_1(t)$ es una solución, pero $\mathbf{Y}_2(t)$ no lo es.

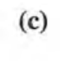
31. Queremos demostrar que uno de los vectores es un múltiplo del otro.
    (a) $(x_1, y_1) = (0, 0)$ y cualquier (x_2, y_2) están sobre la misma línea que pasa por el origen.
    (b) (x_1, y_1) es un múltiplo de (x_2, y_2), lo que implica que están sobre la misma línea que pasa por el origen.
    (c) Si $x_1 \neq 0$, tenemos $(x_2, y_2) = (x_2/x_1)(x_1, y_1)$. En ese caso, podemos usar el inciso (b). Si $x_1 = 0$ y $y_1 \neq 0$, procedemos como lo hicimos antes. Si $x_1 = 0$ y $y_1 = 0$, entonces tenemos la situación del inciso (a).

33. Podemos dar soluciones explícitas para (a), (c) y (d). Por ejemplo, la solución explícita para el inciso (a) es $(-2e^{-t}, 2e^{-t})$. ¿Cuáles son las soluciones explícitas para las partes (c) y (d)?

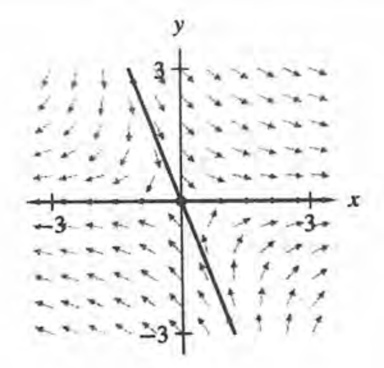
35. (a) $dW/dt = y_2(dx_1/dt) + x_1(dy_2/dt) - y_1(dx_2/dt) - x_2(dy_1/dt)$.
    (b) Reemplace dx_1/dt por $ax_1 + by_1$ (etc.), en la fórmula anterior.
    (c) $W(t) = Ce^{(a+d)t}$, donde C es una constante. Por tanto, si $C = W(0) = 0$, entonces $W(t) = 0$ para toda t. Si $W(0) \neq 0$, entonces $W(t) \neq 0$ para toda t.
    (d) Si $\mathbf{Y}_1(0)$ y $\mathbf{Y}_2(0)$ son linealmente independientes, en ese caso $W(0) \neq 0$ (vea el ejercicio 32). Pero $W(t) \neq 0$ para toda t. Por consiguiente, $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$ son linealmente independientes.

Sugerencias y respuestas para la sección 3.2

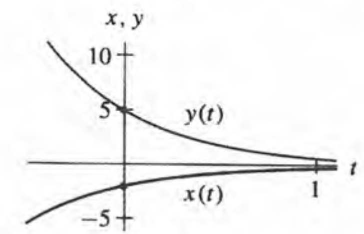
1. (a) Eigenvalores: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$.
   (b) Eigenvectores: $\mathbf{V}_1 = (x_1, y_1)$ donde $5x_1 = -2y_1$ y $\mathbf{V}_2 = (x_2, 0)$.

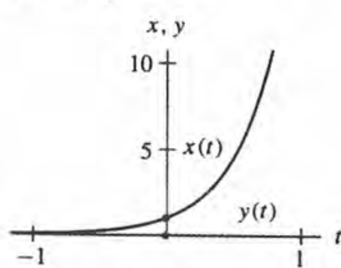


(c)



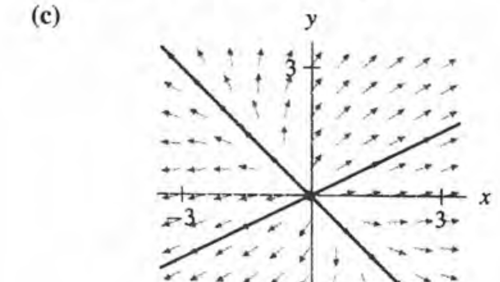
(d) $\mathbf{Y}_1(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Y}_2(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



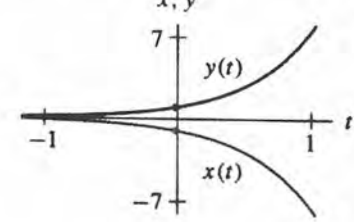


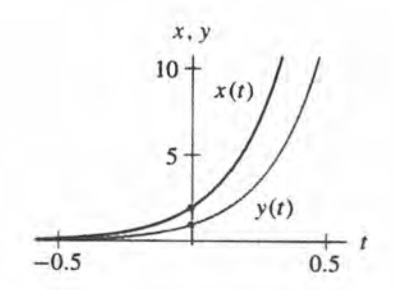
(e) $\mathbf{Y}(t) = k_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + k_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. (a) Eigenvalores: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$.
(b) Eigenvectores: $\mathbf{V}_1 = (x_1, y_1)$ donde $y_1 = -x_1$ y $\mathbf{V}_2 = (x_2, y_2)$ donde $x_2 = 2y_2$.
(c)



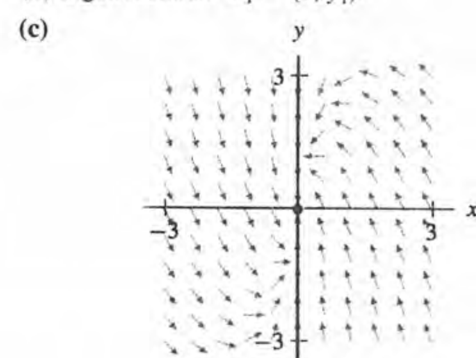
(d) $\mathbf{Y}_1(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Y}_2(t) = e^{5t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

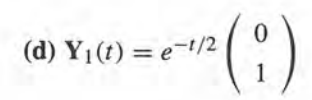




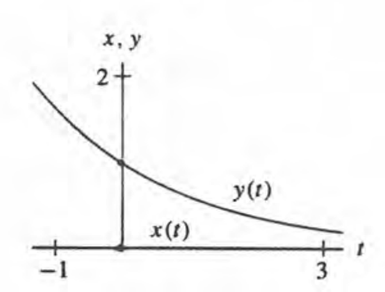
(e) $\mathbf{Y}(t) = k_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 e^{5t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. (a) Eigenvalor: $\lambda_1 = -1/2$.
(b) Eigenvectores: $\mathbf{V}_1 = (0, y_1)$.
(c)





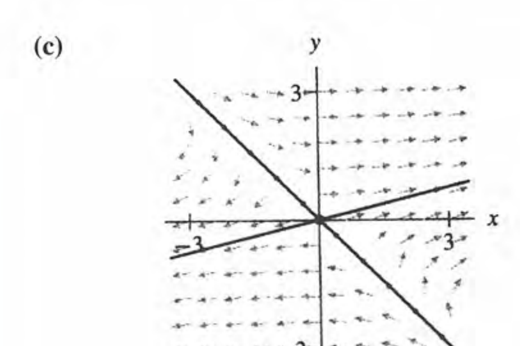
(d) $\mathbf{Y}_1(t) = e^{-t/2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



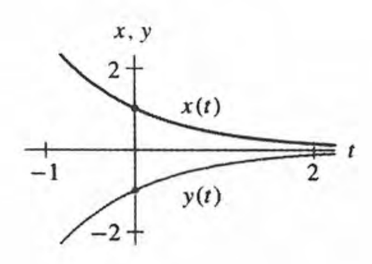
(e) No podemos formar la solución general ya que no tenemos dos eigenvalores distintos.

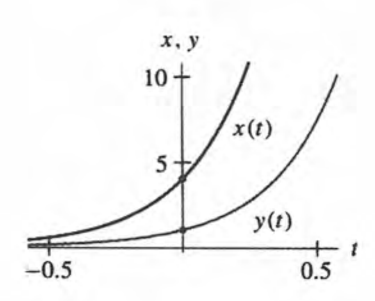
7. (a) Eigenvalores: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$.
(b) Eigenvectores: $\mathbf{V}_1 = (x_1, y_1)$ donde $y_1 = -x_1$ y $\mathbf{V}_2 = (x_2, y_2)$ donde $x_2 = 4y_2$.

(c)



(d) $\mathbf{Y}_1(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Y}_2(t) = e^{4t}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

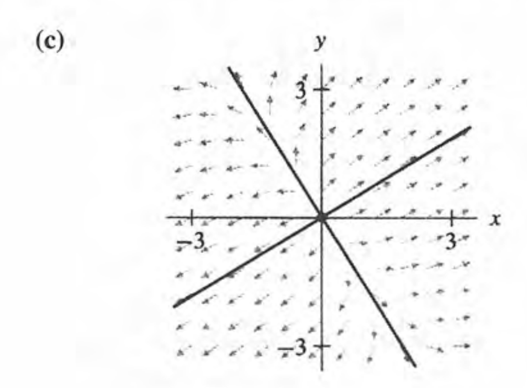




(e) $\mathbf{Y}(t) = k_1e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2e^{4t}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

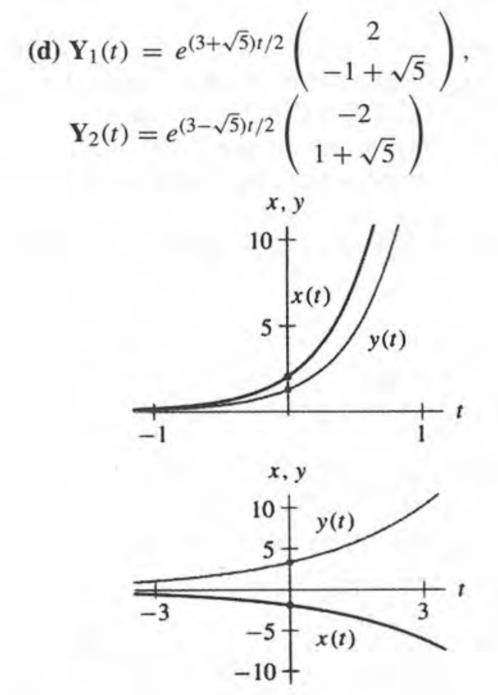
9. (a) Eigenvalores: $\lambda_1 = (3 + \sqrt{5})/2$, $\lambda_2 = (3 - \sqrt{5})/2$.
(b) Eigenvectores: $\mathbf{V}_1 = (x_1, y_1)$ donde $(-1 + \sqrt{5})x_1 = 2y_1$ y $\mathbf{V}_2 = (x_2, y_2)$ donde $(1 + \sqrt{5})x_2 = -2y_2$.

(c)



(d) $\mathbf{Y}_1(t) = e^{(3+\sqrt{5})t/2}\begin{pmatrix} 2 \\ -1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$,

$\mathbf{Y}_2(t) = e^{(3-\sqrt{5})t/2}\begin{pmatrix} -2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$



(e) $\mathbf{Y}(t) = k_1e^{(3+\sqrt{5})t/2}\begin{pmatrix} 2 \\ -1+\sqrt{5} \end{pmatrix} + k_2e^{(3-\sqrt{5})t/2}\begin{pmatrix} -2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$

11. (a) $\mathbf{Y}(t) = \frac{1}{5}e^{-3t}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{Y}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{Y}(t) = -\frac{2}{5}e^{-3t}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{7}{5}e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

13. **(a)** $\mathbf{Y}(t) = \frac{2}{3}e^{-5t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{Y}(t) = e^{-5t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{Y}(t) = -e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

15. Demuestre que para cualquier vector $\mathbf{Y}_0$, $\mathbf{A}\mathbf{Y}_0 = a\mathbf{Y}_0$. Por tanto, cada vector es un eigenvector asociado con el eigenvalor a.

17. El polinomio característico es $\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - b^2$. Esta cuadrática tiene el discriminante $D = (a - d)^2 + 4b^2$. Como $D \geq 3$ 0, el polinomio característico siempre tiene raíces reales. En otras palabras, la matriz siempre presenta eigenvalores reales. Si $b \neq 0$, entonces $D > 0$. En este caso, el polinomio característico exhibe raíces reales distintas.

19. **(a)** $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}\mathbf{Y}$

(b) $\lambda^2 + p\lambda + q$

(c) $(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q})/2$

(d) Las raíces son números reales distintos si $p^2 > 4q$.

(e) Note que $p^2 - 4q < p^2$.

21. **(a)** $dy/dt = v$ y $dv/dt = 10y - 3v$.

(b) Eigenvalor $\lambda_1 = -5$ con eigenvectores $\mathbf{V}_1 = (y_1, v_1)$ donde $v_1 = -5y_1$, y eigenvalor $\lambda_2 = 2$ con eigenvectores $\mathbf{V}_2 = (y_2, v_2)$ donde $v_2 = 2y_2$.

(c) $\mathbf{Y}_1(t) = e^{-5t}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Y}_2(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

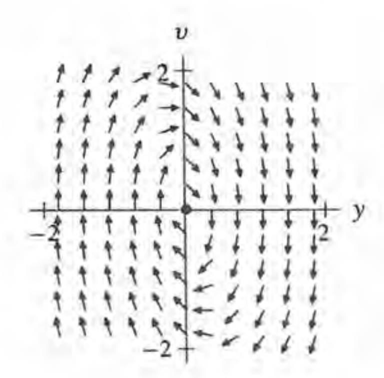
23. **(a)** $dy/dt = v$ y $dv/dt = -y - 4v$.

(b) Eigenvalor $\lambda_1 = -2 + \sqrt{3}$ con eigenvectores $\mathbf{V}_1 = (y_1, v_1)$ donde $v_1 = (-2 + \sqrt{3})y_1$, y eigenvalor $\lambda_2 = -2 - \sqrt{3}$ con eigenvectores $\mathbf{V}_2 = (y_2, v_2)$ donde $v_2 = (-2 - \sqrt{3})y_2$.

(c) $\mathbf{Y}_1(t) = e^{(-2+\sqrt{3})t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 + \sqrt{3} \end{pmatrix}$,

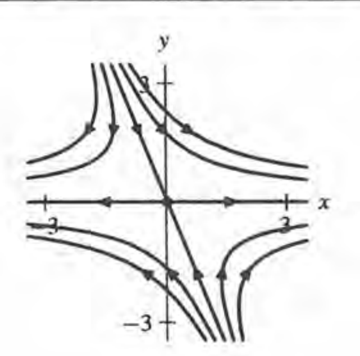
$\mathbf{Y}_2(t) = e^{(-2-\sqrt{3})t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$

25. El polinomio característico es $\lambda^2 + \lambda + 4$ y sus raíces son los números complejos $(-1 \pm \sqrt{15}i)/2$. Por tanto, no hay soluciones de línea recta (vea el campo de direcciones).

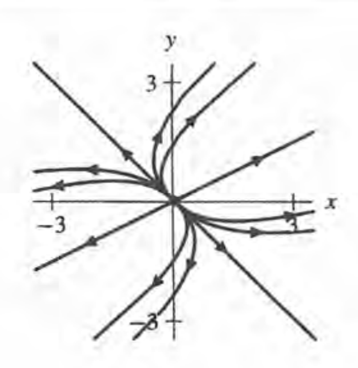


Sugerencias y respuestas para la sección 3.3

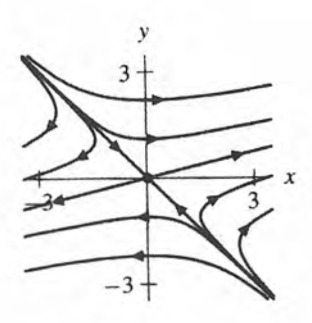
1.



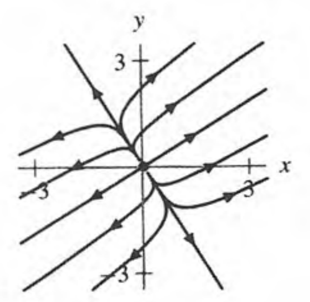
3.



5.

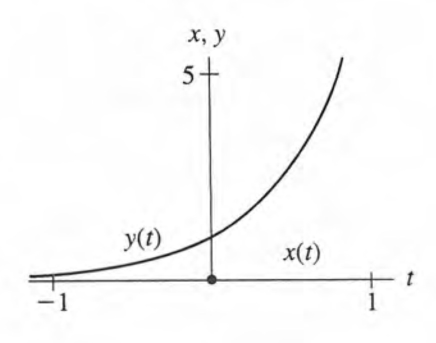


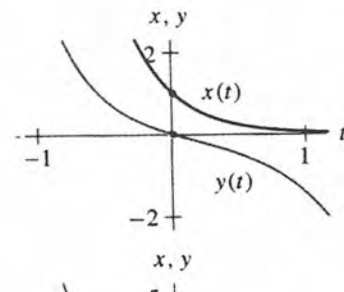
7.

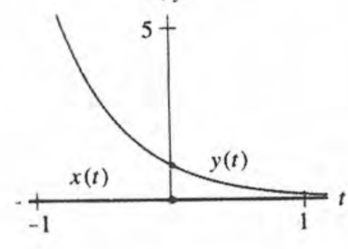


x, y
5
y(t)
t
−1
1
x(t)
−5

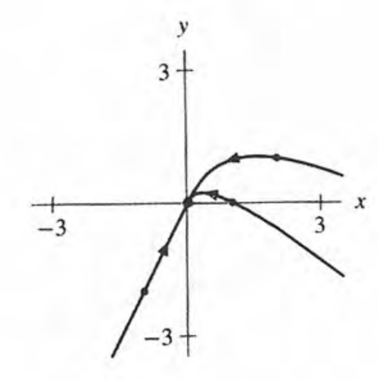
9.

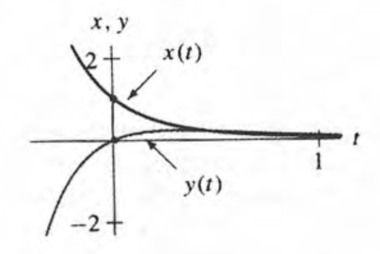


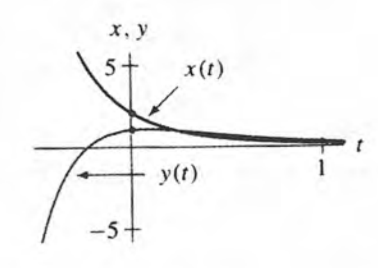


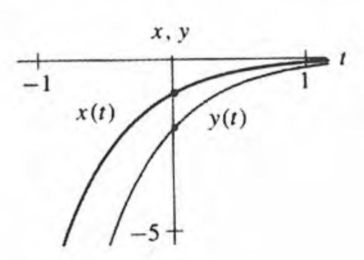


11.

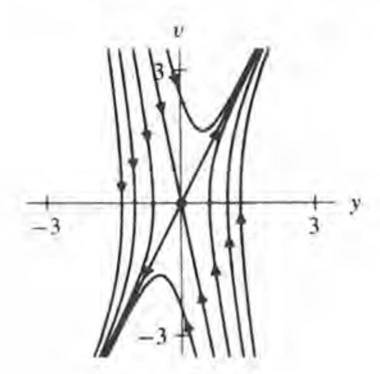


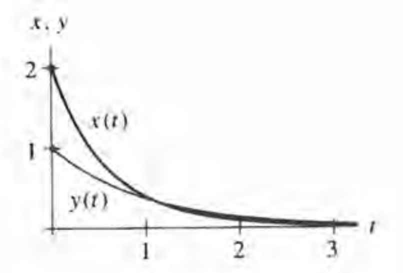




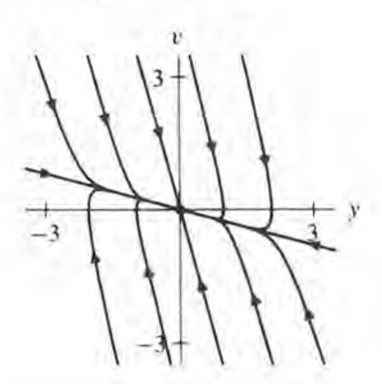


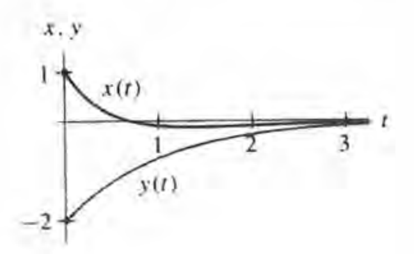
13.

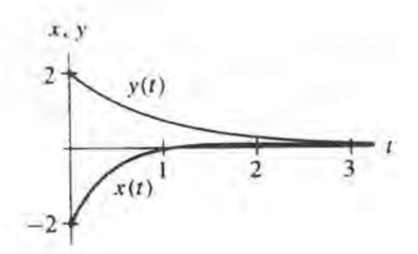


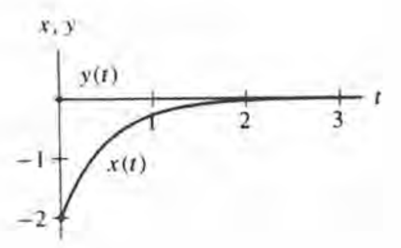


15.







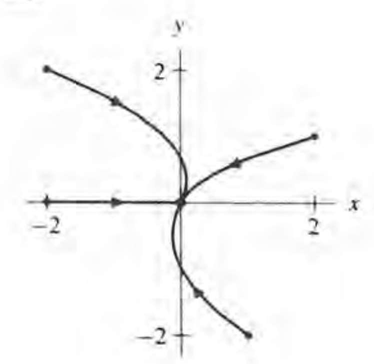


17. Para cualquier condición inicial, las ganancias y de Roberto al final son asintóticas a 0. Para una condición inicial sobre la línea $y = -3x$, las ganancias x de Pablo también llegan a ser asintóticas a 0. Para una condición inicial a la izquierda de la línea $y = -3x$, Pablo finalmente va a la quiebra. Para una condición inicial a la derecha de la línea $y = -3x$, Pablo consigue hacer una fortuna.

19. **(a)** sumidero.

(b) todas las soluciones de la forma $e^{-2t}(x, 0)$ y $e^{-t}(x, 2x)$.

(c)



21. **(a)** $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 7\dfrac{dy}{dt} + 6y = 0;$

Como sistema: $dy/dt = v$, $dv/dt = -6y - 7v$.

(b) $\lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$.

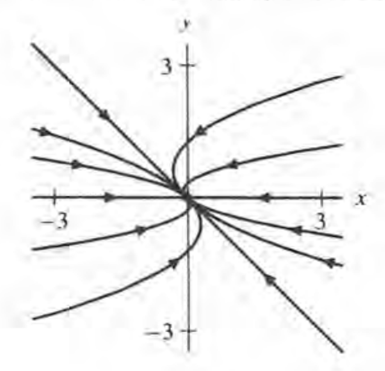
(c) $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = -1$.

(d) La solución nunca cruza la posición de reposo. Tiende a dicha posición según e^{-t}.

23. **(a)** La presencia de la nueva especie tiene un efecto negativo sobre la población nativa, pero los peces nativos no afectan a la población de los nuevos peces.

(b) El modelo concuerda con las premisas del sistema.

(c)



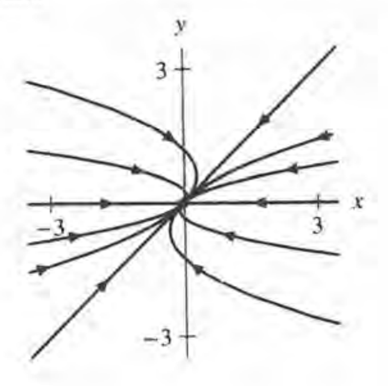
Las soluciones de línea recta se encuentran sobre el eje x y la línea $y = -x$ en el plano fase y tienden hacia el origen.

(d) Si se agrega un pequeño número de nuevos peces al lago, la población nativa cae del equilibrio. Los nuevos peces mueren conforme los peces nativos retornan al equilibrio.

25. **(a)** Los peces nativos no tienen efecto sobre la población de los nuevos peces. La introducción de la nueva especie incrementa la población de los peces nativos.

(b) El modelo concuerda con el sistema descrito en el problema.

(c)



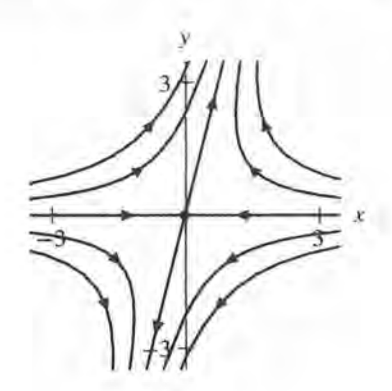
El eje x y la línea $y = x$ contienen las soluciones de línea recta. Las soluciones a lo largo de esas líneas tienden hacia el origen, el cual es un sumidero.

(d) La población de los peces nativos crece inicialmente y luego retorna hacia su valor de equilibrio. Los nuevos peces morirán.

27. **(a)** Calcule los eigenvalores.

(b) Eigenvalores: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$.

Líneas de eigenvectores: $y = 4x$, $y = 0$.



(c)

y
1
x
−1
1
−1

(d) $t \approx 1.96$

Sugerencias y respuestas para la sección 3.4

1. $\mathbf{Y}_{\text{re}}(t) = e^t \begin{pmatrix} 2\cos 3t - \operatorname{sen} 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix}$

$\mathbf{Y}_{\text{im}}(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos 3t + 2\operatorname{sen} 3t \\ \operatorname{sen} 3t \end{pmatrix}$

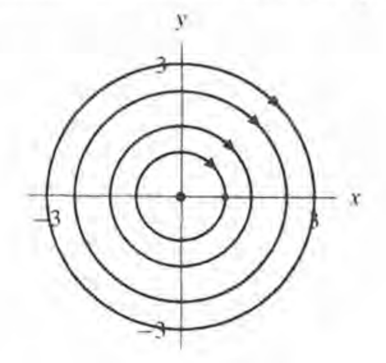
3. **(a)** $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$.

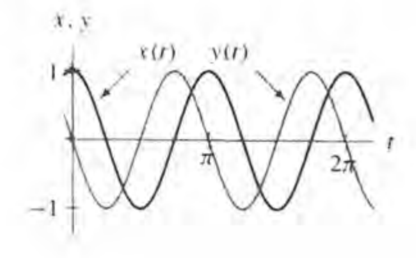
(b) Centro.

(c) Periodo natural π; frecuencia natural $1/\pi$.

(d) En el sentido de las manecillas del reloj.

(e)





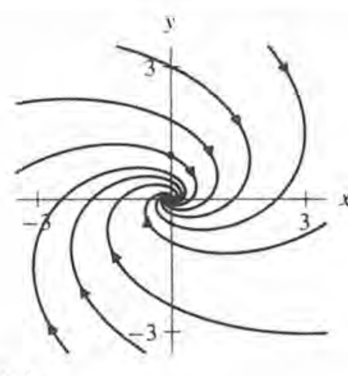
5. **(a)** $-1 \pm i\sqrt{2}$

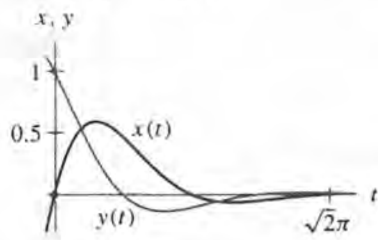
(b) Sumidero espiral.

(c) Periodo natural $= \sqrt{2}\pi$;
frecuencia natural $= 1/(\sqrt{2}\pi)$.

(d) En el sentido de las manecillas del reloj.

(e)





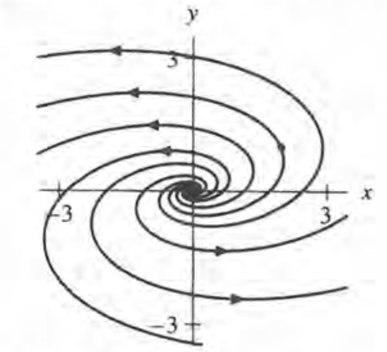
7. **(a)** $(3 \pm \sqrt{47}\, i)/2$

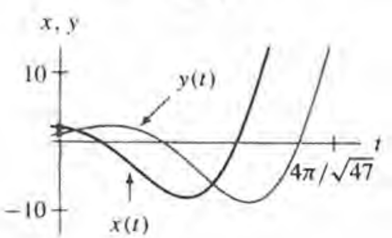
(b) Fuente espiral.

(c) Periodo natural: $\frac{4\pi}{\sqrt{47}}$; frecuencia natural: $\frac{\sqrt{47}}{4\pi}$.

(d) En sentido contrario al de las manecillas del reloj

(e)

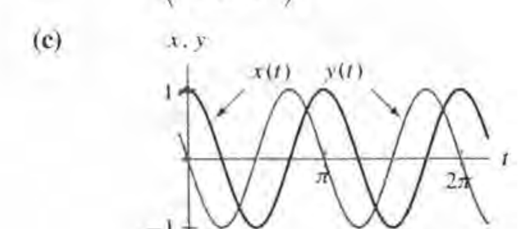




9. **(a)** $\mathbf{Y}(t) = k_1 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix}$

(c)

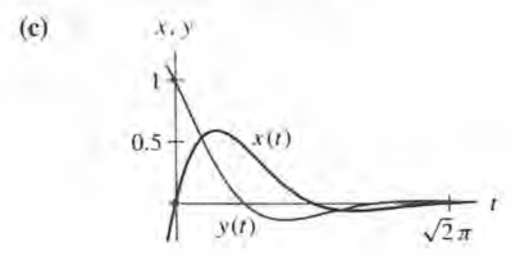


11. **(a)** $k_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 2\cos\sqrt{2}\,t \\ -\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t \end{pmatrix} +$

$k_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 2\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t \\ \sqrt{2}\cos\sqrt{2}\,t \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{Y}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t \\ \cos\sqrt{2}\,t \end{pmatrix}$

(c)

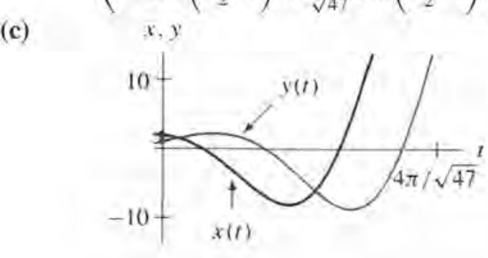


13. **(a)** $k_1 e^{3t/2} \begin{pmatrix} 12\cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) \\ \cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) + \sqrt{47}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) \end{pmatrix} +$

$k_2 e^{3t/2} \begin{pmatrix} 12\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) \\ -\sqrt{47}\cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) \end{pmatrix}$

(b) $e^{3t/2} \begin{pmatrix} 2\cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) - \frac{10}{\sqrt{47}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) \\ \cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) + \frac{7}{\sqrt{47}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) \end{pmatrix}$

(c)



15. **(a)** (ii) y (v).

(b) La gráfica (ii) tiene un periodo natural de 1 y el origen es un sumidero. La gráfica (v) tiene un periodo natural de 1 y el origen es una fuente.

(c) (i) El periodo no es constante en el tiempo. (iii) La amplitud no está decreciendo o creciendo monotónicamente. (iv) La oscilación se detiene en algún tiempo t. (vi) La oscilación comienza en algún tiempo t. No había oscilación previa.

17. Si $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ satisface la ecuación, entonces $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ también lo hace. Una ecuación cuadrática tiene cuando mucho dos soluciones, por lo que ellas deben ser λ_1 y λ_2.

19. *Sugerencia:* Suponga $\mathbf{Y}_2 = k\mathbf{Y}_1$ para alguna constante k. Entonces, $\mathbf{Y}_0 = (1 + ik)\mathbf{Y}_1$. Obtenga una contradicción usando el hecho de que $\mathbf{AY}_0 = \lambda\mathbf{Y}_0$. (Note que $\mathbf{A}$ sólo tiene entradas reales.)

21. **(a)** π/β.

(b) π/β.

(c) $2\pi/\beta$.

(d) $(\arctan(\beta/\alpha))/\beta$.

23. **(a)** $dy/dt = v$, $dv/dt = -qy - pv$.

(b) $p^2 < 4q$.

(c) Sumidero espiral: $p^2 < 4q$ y $p > 0$; centro: $p = 0$ y $q > 0$.

(d) $q > 0$.

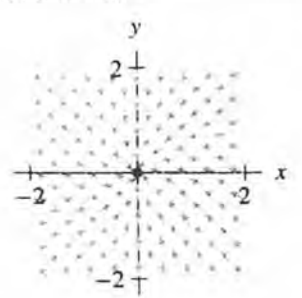
25. *Sugerencia:* Dibuje el plano fase y recuerde el principio de linearidad.

Sugerencias y respuestas para la sección 3.5

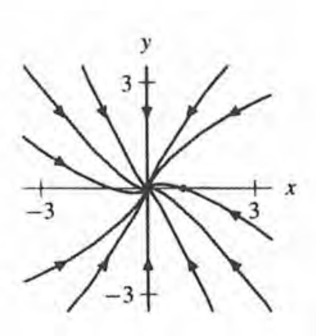
1. **(a)** Eigenvalor: -3.

(b) Eigenvectores: $x = 0$.

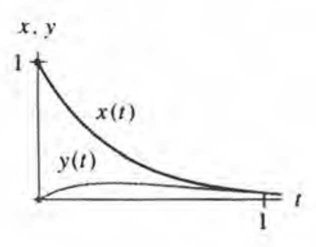
(c)



(d)



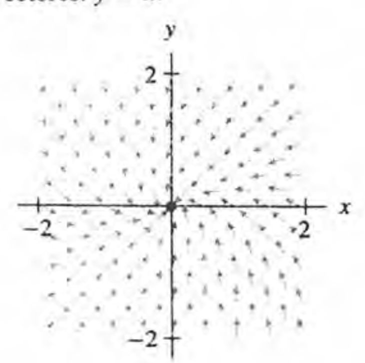
(e)



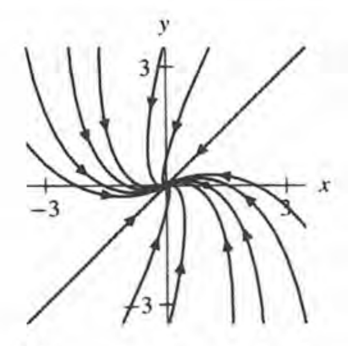
3. **(a)** Eigenvalor: -3.

(b) Eigenvectores: $y = x$.

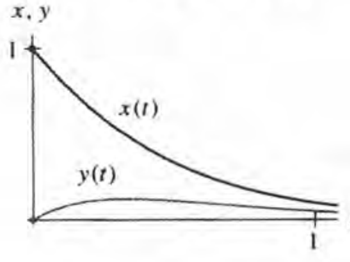
(c)



(d)



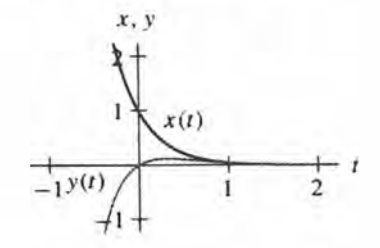
(e)



5. **(a)** $\mathbf{Y}(t) = k_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 e^{-3t} \left(t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

(b) $\mathbf{Y}(t) = e^{-3t} \left(t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

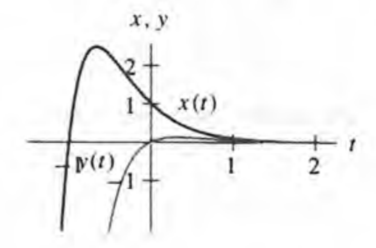
(c)



7. **(a)** $\mathbf{Y}(t) = k_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 e^{-3t} \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

(b) $\mathbf{Y}(t) = e^{-3t}\left(t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$

(c)



9. (a) $\alpha^2 = 4\beta$

(b) $\beta = 0$

11. (a) $p^2 - 4q > 0$

(b) $p^2 - 4q < 0$

(c) $p^2 - 4q = 0$

13. $\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\0\end{pmatrix}$,

por tanto $a = \lambda$ y $c = 0$.

Igualmente, $\mathbf{A}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\lambda\end{pmatrix}$,

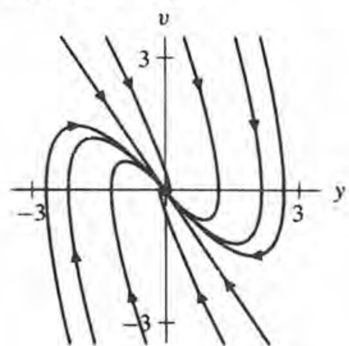
por lo que $d = \lambda$ y $b = 0$.

15. (a) $k = 9/4$.

(b) Eigenvalor: $\lambda = -3/2$.

Eigenvectores: $v = -3y/2$.

(c)



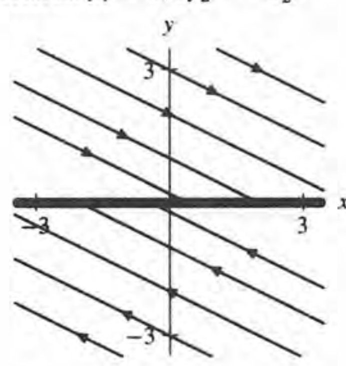
(d) $\mathbf{Y}(t) = k_1 e^{-3t/2}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} + k_2 e^{-3t/2}\left(t\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right)$

(e) $\mathbf{Y}(t) = e^{-3t/2}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} + e^{-3t/2}\left(t\begin{pmatrix}3\\-9/2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\right)$

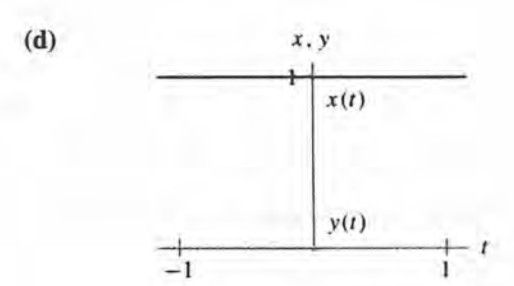
17. (a) Eigenvalores: 0, −1.

(b) Eigenvectores: $y_1 = 0$, $2y_2 = -x_2$.

(c)



(d)



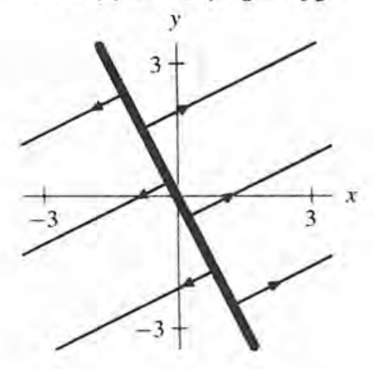
(e) $\mathbf{Y}(t) = k_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + k_2 e^{-t}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

(f) $\mathbf{Y}(t) = (1, 0)$

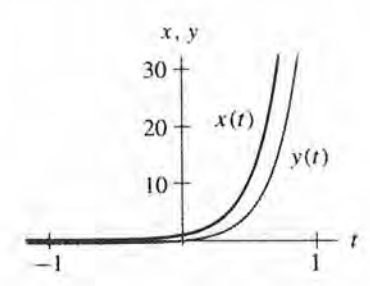
19. **(a)** Eigenvalores: 0, 5.

(b) Eigenvectores: $y_1 = -2x_1$, $x_2 = 2y_2$.

(c)



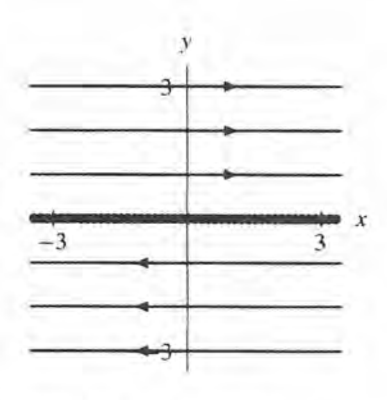
(d)



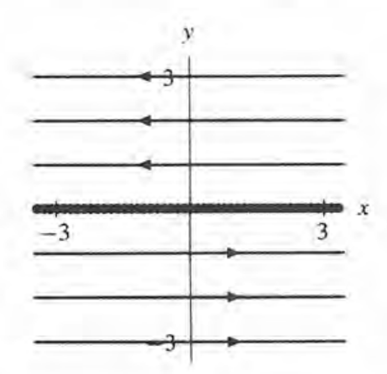
(e) $\mathbf{Y}(t) = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + k_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(f) $\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} + \frac{4}{5}e^{5t} \\ -\frac{2}{5} + \frac{2}{5}e^{t} \end{pmatrix}$

21. **(a)** $\lambda = 0$ es el único eigenvalor.



(b) $\lambda = 0$ es el único eigenvalor.



23. **(a)** Eigenvalores: a, d.

(b) Eigenvectores: ejes x y y, respectivamente, si $a \neq d$.

(c) *Sugerencia:* Vea el ejercicio 14.

(d) *Sugerencia:* Cambie las flechas del inciso (c).

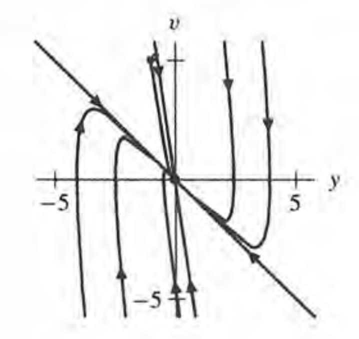
Sugerencias y respuestas para la sección 3.6

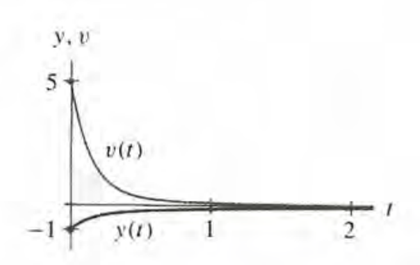
1. **(a)** $d^2y/dt^2 + 8dy/dt + 7y = 0$;
sistema: $dy/dt = v$, $dv/dt = -7y - 8v$.

(b) $\lambda_1 = -1$ con eigenvectores $\mathbf{V}_1 = (y_1, v_1)$ donde $v_1 = -y_1$; $\lambda_2 = -7$ con eigenvectores $\mathbf{V}_2 = (y_2, v_2)$ donde $v_2 = -7y_2$.

(c) Sobreamortiguado.

(d)



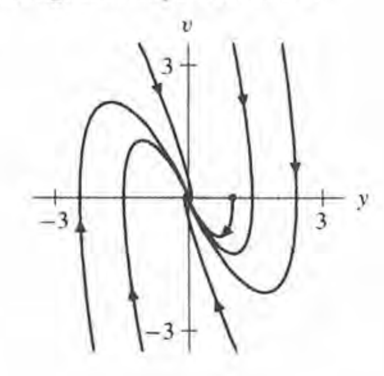


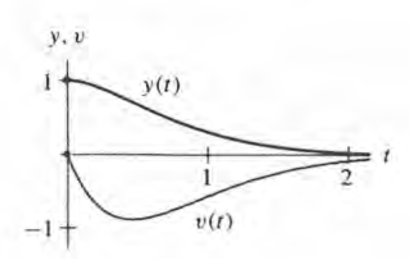
3. **(a)** $d^2y/dt^2 + 4dy/dt + 5y = 0$;
sistema: $dy/dt = v$, $dv/dt = -5y - 4v$

(b) $\lambda_1 = -2 + i$ con eigenvectores $\mathbf{V}_1 = (y_1, v_1)$ donde $v_1 = (-2 + i)y_1$; $\lambda_2 = -2 - i$ con eigenvectores $\mathbf{V}_2 = (y_2, v_2)$, donde $v_2 = (-2 - i)y_2$.

(c) Subamortiguado. El periodo es 2π.

(d)



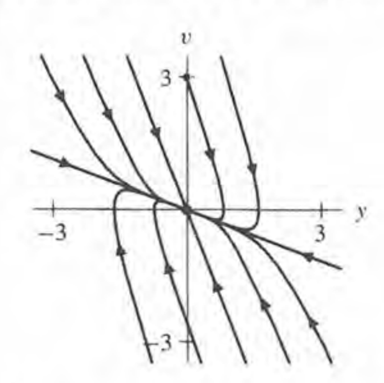


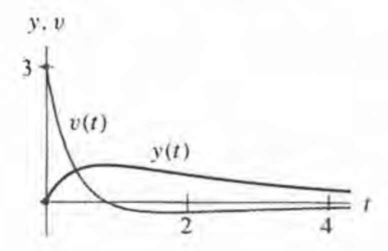
5. **(a)** $2d^2y/dt^2 + 3dy/dt + y = 0$;
$dy/dt = v$, $dv/dt = -y/2 - 3v/2$.

(b) $\lambda_1 = -1$ con eigenvectores $\mathbf{V}_1 = (y_1, v_1)$ donde $v_1 = -y_1$; $\lambda_2 = -1/2$ con eigenvectores $\mathbf{V}_2 = (y_2, v_2)$ donde $v_2 = -y_2/2$.

(c) Sobreamortiguado.

(d)



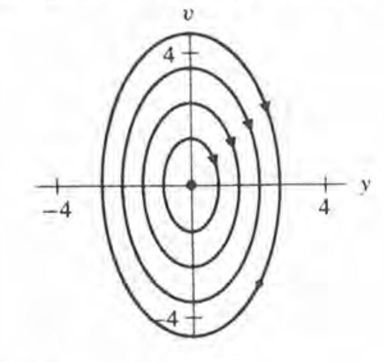


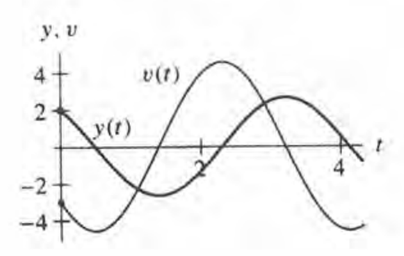
7. **(a)** $2d^2y/dt^2 + 3y = 0$;
$dy/dt = v$, $dv/dt = -3y/2$.

(b) $\lambda = \pm i\sqrt{3/2}$ con eigenvectores $\mathbf{V} = (y, v)$ que satisface $v = \pm i\sqrt{3/2}\,y$.

(c) No amortiguado con periodo natural $4\pi/\sqrt{6}$.

(d)





9. **(a)** $y(t) = k_1 e^{-7t} + k_2 e^{-t}$.
(b) $y(t) = -\frac{2}{3}e^{-7t} - \frac{1}{3}e^{-t}$.
(c) Vea las gráficas $y(t)$ y $v(t)$ para el ejercicio 1.

11. **(a)** $y(t) = k_1 e^{-2t} \cos t + k_2 e^{-2t} \operatorname{sen} t$.
(b) $y(t) = e^{-2t} \cos t + 2e^{-2t} \operatorname{sen} t$.
(c) Vea las gráficas $y(t)$ y $v(t)$ para el ejercicio 3.

13. **(a)** $y(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-t/2}$.
(b) $y(t) = -6e^{-t} + 6e^{-t/2}$.
(c) Vea las gráficas $y(t)$ y $v(t)$ para el ejercicio 5.

15. **(a)** $y(t) = k_1 \cos(\sqrt{3/2}\, t) + k_2 \operatorname{sen}(\sqrt{3/2}\, t)$.
(b) $y(t) = 2\cos(\sqrt{3/2}\, t) - \sqrt{6} \operatorname{sen}(\sqrt{3/2}\, t)$.
(c) Vea las gráficas $y(t)$ y $v(t)$ para el ejercicio 7.

17. *Sugerencia:* La tabla tendrá cuatro filas: para el caso no amortiguado, para el caso subamortiguado, para el caso críticamente amortiguado y para el caso sobreamortiguado.

19. Use el hecho de que un número complejo es cero si y sólo si sus partes real e imaginaria son cero.

21. La solución tenderá al equilibrio no más rápido que $e^{-\alpha t}$, donde $\alpha = b/2$ si $b^2 < 12$ y $\alpha = (b + \sqrt{b^2 - 12})/2$ si $b^2 > 12$.

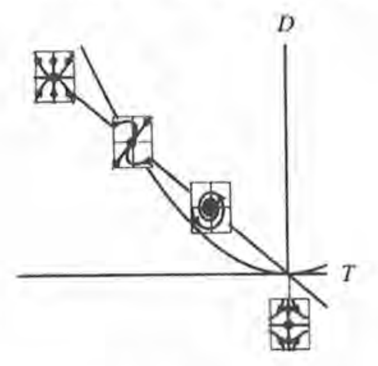
23. **(a)** $m d^2y/dt^2 - b_{mf} dy/dt + ky = 0$.
(b) $dy/dt = v$, $dv/dt = -(k/m)y + (b_{mf}/m)v$.
(c) *Sugerencia:* Modifique el análisis caso por caso de esta sección para reflejar el cambio en el signo del término dy/dt.

25. $m = 1/(2\pi^2)$.

Sugerencias y respuestas para la sección 3.7

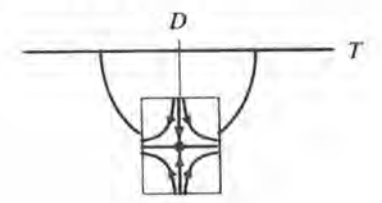
1. *Sugerencia:* Hay tres tipos en las secciones 3.2 y 3.3 y tres en la sección 3.4. Son los seis tipos más comunes. Los tipos restantes se analizan en la sección 3.5.

3. **(a)**



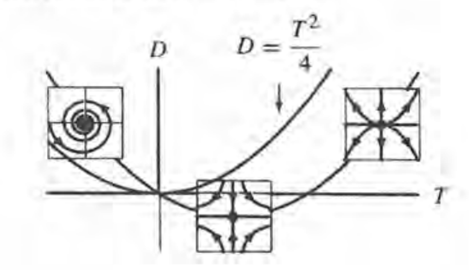
(b) Sumidero real: $a < -1$. Eigenvalores repetidos negativos: $a = -1$. Sumidero espiral: $-1 < a < 0$. Eigenvalores repetidos 0: $a = 0$. Punto de silla: $a > 0$.
(c) Bifurcaciones en $a = 0, -1$.

5. **(a)**



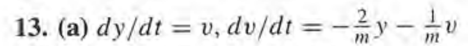
(b) Un eigenvalor cero: $a = \pm 1$. Punto de silla: $-1 < a < 1$.
(c) Bifurcaciones en $a = 1, -1$.

7. **(a)**



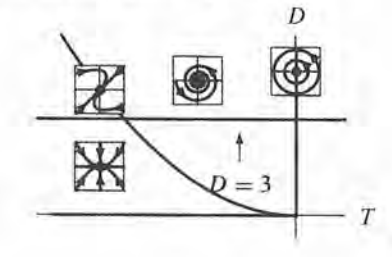
(b) Fuente real: $a > 1$. Eigenvalor cero: $a = 1$. Punto de silla: $0 < a < 1$. Eigenvalores repetidos 0: $a = 0$. Sumidero espiral: $a < 0$.
(c) Bifurcaciones en $a = 0$ y $a = 1$.

9. Los eigenvalores son $a \pm |b|$. Eigenvalor cero: $a = \pm b$. Eigenvalor repetido: $b = 0$, $a \neq 0$. Eigenvalor repetido cero: $a = b = 0$. Fuente real: $a > |b|$. Sumidero real: $-a > |b|$. Punto de silla en los otros casos.



11. **(a)** $dy/dt = v$, $dv/dt = -3y - bv$

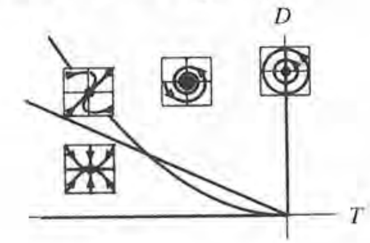
(b)



(c) Sobreamortiguado: $b > 2\sqrt{3}$. Críticamente amortiguado: $b = 2\sqrt{3}$. Subamortiguado: $0 < b < 2\sqrt{3}$. No amortiguado: $b = 0$.

13. **(a)** $dy/dt = v$, $dv/dt = -\frac{2}{m}y - \frac{1}{m}v$

(b)



(c) Sobreamortiguado: $0 < m < 1/8$. Críticamente amortiguado: $m = 1/8$. Subamortiguado: $m > 1/8$.

Sugerencias y respuestas para la sección 3.8

1. Diferencie $\mathbf{Y}_2(t)$ y $\mathbf{Y}_3(t)$ coordenada por coordenada para ver si el sistema de ecuaciones diferenciales se satisface.

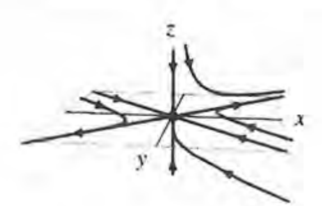
3. **(a)** No es linealmente independiente.

(b) Linealmente independiente.

(c) Linealmente independiente.

(d) Linealmente independiente.

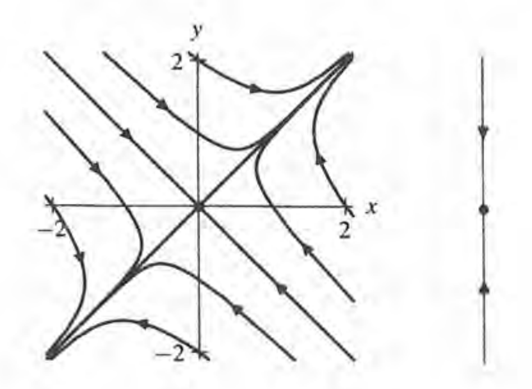
(d)



5. **(a)** $\pm 1, -5$.

(b) El sistema se desacopla en un sistema bidimensional en el plano x-y y en otro unidimensional en z.

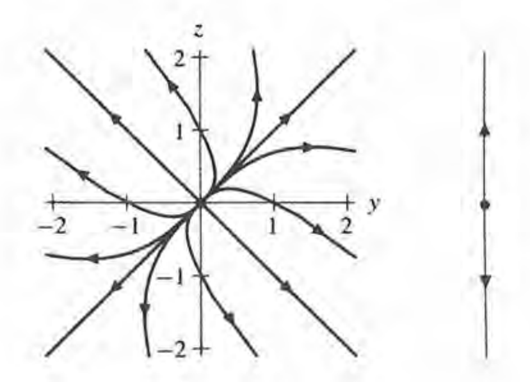
(c) Hay un sumidero sobre la línea fase z y un punto de silla en el plano fase x-y.



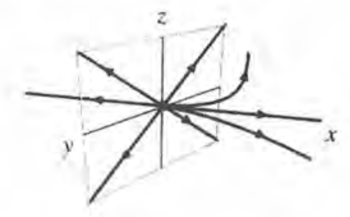
7. **(a)** 1, 3.

(b) El sistema se desacopla en un sistema bidimensional en el plano y-z y en otro unidimensional en x.

(c) Fuente sobre el eje x, fuente en el plano y-z.



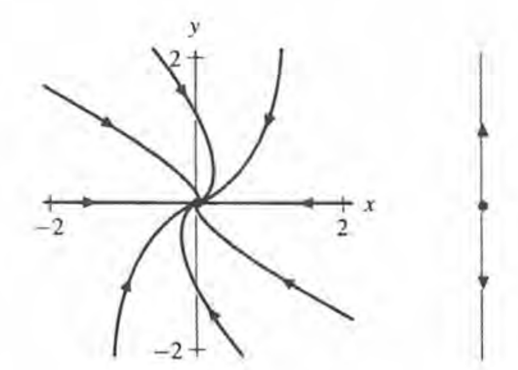
(d)



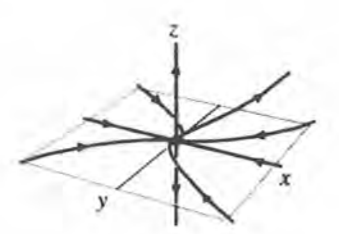
9. Usando el hecho de que $p(a + ib) = 0$, muestre que cada una de las partes real e imaginaria de $p(a - ib)$ son cero.

11. (a) -2, 1.

(b) fuente sobre el eje z, sumidero de eigenvalores repetidos en el plano x-y

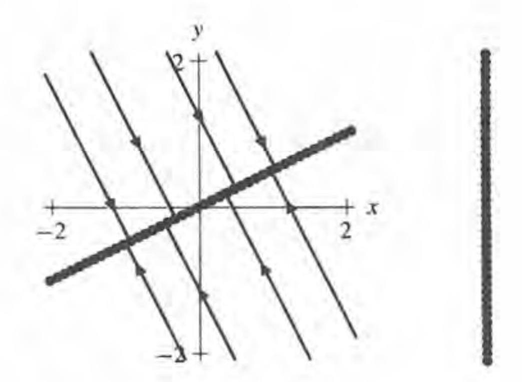


(c)



13. (a) 0, -5

(b) En el eje z todos son puntos de equilibrio; en el plano x-y hay una línea de puntos de equilibrio y todas las soluciones tienden a esta línea.



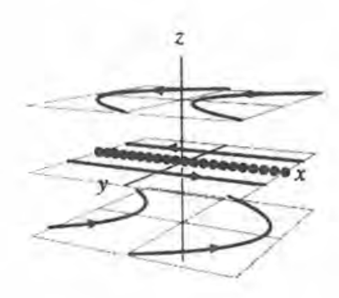
(c)



15. (a) $\lambda = 0$

(b) el eje x.

(c) $z(t)$ es una función constante y su valor se determina por la condición inicial. Para $z_0 = 0$, $y(t)$ es constante y las curvas solución se encuentran sobre líneas rectas paralelas al eje x. Para $y_0 > 0$, $x(t)$ se incrementa y para $y_0 < 0$, $x(t)$ es decreciente. Para $z_0 \neq 0$, $x(t)$ es cuadrática en y. Por tanto, las curvas solución que satisfacen la condición inicial $z(0) = z_0$ permanecen sobre el plano $z = z_0$ y se encuentran sobre una parábola.

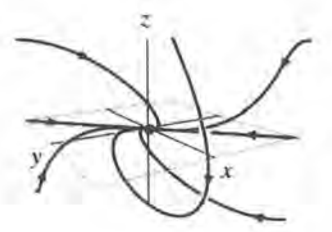


17. (a) -1

(b) $-2 \pm i$

(c) Sumidero espiral.

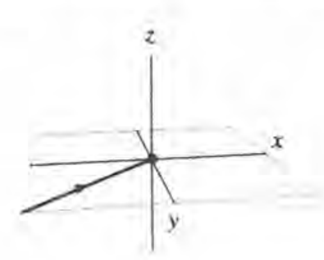
(d) *Sugerencia:* Encuentre el plano que contiene las partes real e imaginaria de un eigenvector para el eigenvalor complejo. Éste es el plano donde las soluciones se mueven en espiral. Además, sobre la línea $x = y$ y $z = 0$, las soluciones tienden directamente hacia el origen.



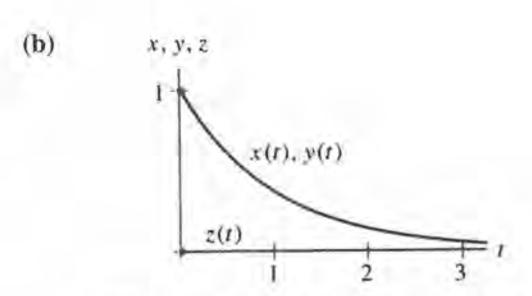
19. **(a)** Las ganancias de Genaro ayudan a que Pablo y Roberto también tengan ganancias (y necesitan toda la ayuda que puedan obtener).

(b) El estado de las ganancias de Pablo o de Roberto no afectan las ganancias de Genaro.

21. **(a)** *Sugerencia:* Si $z = 0$, $dz/dt = 0$, por lo que se tiene un problema bidimensional.



(b)



Las gráficas de $x(t)$ y $y(t)$ son idénticas y $z(t) = 0$ para toda t.

(c) Genaro continúa sólo recuperando lo que invierte mientras que las utilidades de Pablo y Roberto tienden hacia el punto de salida que indica tablas (permaneciendo siempre igual).

Sugerencias y respuestas para la sección 4.1

1. $y(t) = k_1e^{-2t} + k_2e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-t}$

3. $y(t) = k_1e^{-3t} + k_2e^{-4t} + \frac{3}{2}e^{-2t}$

5. $k_1e^{-2t}\cos 3t + k_2e^{-2t}\operatorname{sen} 3t - \frac{1}{3}e^{-2t}$

7. $y(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{6}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-t}$

9. $y(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}\cos 3t - \frac{1}{3}e^{-2t}$

11. **(a)** $y(t) = k_1e^{-t} + k_2e^{-3t} + \frac{4}{5}e^{-t/2}$

(b) $y(t) = -e^{-t} + \frac{1}{5}e^{-3t} + \frac{4}{5}e^{-t/2}$

(c) Todas las soluciones son aproximadamente iguales a $4e^{-t/2}/5$ para t grandes (por lo que todas tienden a cero).

13. **(a)** $y(t) = k_1e^{-t} + k_2e^{-3t} + \frac{1}{3}e^{-4t}$

(b) $y(t) = \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{3}e^{-4t}$

(c) Todas las soluciones tienden a cero; la mayor parte tiende a cero según e^{-t}.

15. **(a)** $y(t) = k_1e^{-2t}\cos 4t + k_2e^{-2t}\operatorname{sen} 4t + \frac{1}{16}e^{-2t}$

(b) $y(t) = -\frac{1}{16}e^{-2t}\cos 4t + \frac{1}{16}e^{-2t}$

(c) Todas las soluciones tienden a cero según e^{-2t} y todas, excepto una, oscilan con frecuencia $2/\pi$.

17. $y(t) = k_1e^{-t} + k_2te^{-t} + t^2e^{-t}/2$

19. **(a)** $y(t) = k_1e^{-2t} + k_2e^{-4t} + \frac{5}{8}$

(b) $y(t) = -\frac{5}{4}e^{-2t} + \frac{5}{8}e^{-4t} + \frac{5}{8}$

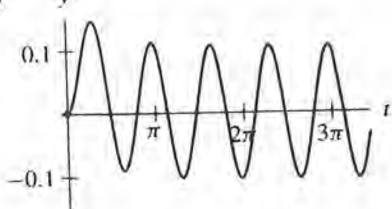
21. **(a)** $y(t) = k_1e^{-t}\cos 3t + k_2e^{-t}\operatorname{sen} 3t + 1$

(b) $y(t) = -e^{-t}\cos 3t - \frac{1}{3}e^{-t}\operatorname{sen} 3t + 1$

23. **(a)** $y(t) = k_1\cos 3t + k_2\operatorname{sen} 3t + \frac{1}{10}e^{-t}$

(b) $y(t) = -\frac{1}{10}\cos 3t + \frac{1}{30}\operatorname{sen} 3t + \frac{1}{10}e^{-t}$

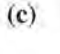
(c)

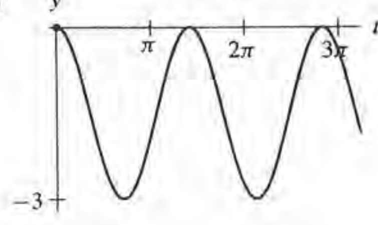


25. **(a)** $y(t) = k_1\cos\sqrt{2}\,t + k_2\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t - \frac{3}{2}$

(b) $y(t) = \frac{3}{2}\cos\sqrt{2}\,t - \frac{3}{2}$

(c)

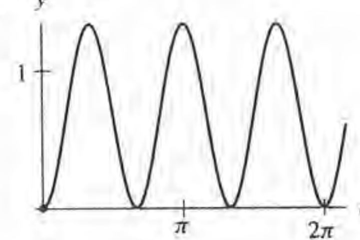




27. **(a)** $y(t) = k_1\cos 3t + k_2\operatorname{sen} 3t + \frac{2}{3}$

(b) $y(t) = -\frac{2}{3}\cos 3t + \frac{2}{3}$

(c)



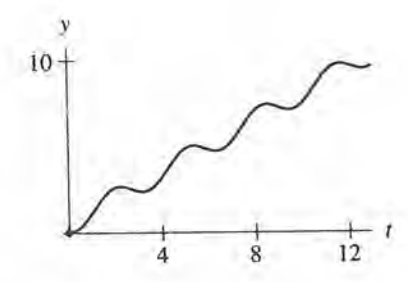
29. **(a)** $y(t) = k_1\operatorname{sen} 2t + k_2\cos 2t - \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{9}{8}$

(b) $y(t) = -\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t + \frac{7}{8}\cos 2t - \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{9}{8}$

31. **(a)** $y(t) = k_1\operatorname{sen} 2t + k_2\cos 2t + \frac{3}{4}t + \frac{1}{2}$

(b) $y(t) = -\frac{3}{8}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{3}{4}t + \frac{1}{2}$

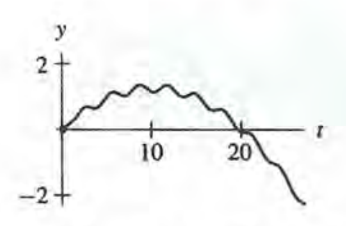
(c) La solución tiende a ∞.



33. **(a)** $y(t) = k_1\operatorname{sen} 2t + k_2\cos 2t - \frac{1}{80}t^2 + \frac{1}{4}t + \frac{1}{160}$

(b) $y(t) = -\frac{1}{8}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{160}\cos 2t - \frac{1}{80}t^2 + \frac{1}{4}t + \frac{1}{160}$

(c) La solución tiende a $-\infty$.



35. (a) $y(t) = k_1 e^{-3t} + k_2 e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{2}{3}$
(b) $y(t) = \frac{11}{6}e^{-3t} - 3e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{2}{3}$
(c) La solución tiende a 2/3.

37. (a) $y(t) = k_1 e^{-4t} + k_2 e^{-2t} - \frac{3}{16} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{3}e^{-t}$
(b) $y(t) = \frac{5}{48}e^{-4t} - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{3}{16} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{3}e^{-t}$
(c) La solución tiende a ∞.

39. (a) $y(t) = k_1 \cos 2t + k_2 \operatorname{sen} 2t + \frac{1}{4}t + \frac{1}{5}e^{-t}$.
(b) $y(t) = -\frac{1}{5}\cos 2t - \frac{1}{40}\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{4}t + \frac{1}{5}e^{-t}$.
(c) La solución tiende a ∞.

Sugerencias y respuestas para la sección 4.2

1. $y(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-t} + \frac{1}{10}\cos t + \frac{3}{10}\operatorname{sen} t$

3. $y(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-t} - \frac{3}{10}\cos t + \frac{1}{10}\operatorname{sen} t$

5. $y(t) = k_1 e^{-4t} + k_2 e^{-2t} + \frac{7}{85}\cos t + \frac{6}{85}\operatorname{sen} t$

7. $y(t) = k_1 e^{-2t}\cos 3t + k_2 e^{-2t}\operatorname{sen} 3t + \frac{27}{145}\cos 2t + \frac{24}{145}\operatorname{sen} 2t$

9. $y(t) = k_1 e^{-2t}\cos 4t + k_2 e^{-2t}\operatorname{sen} 4t - \frac{48}{320}\operatorname{sen} 2t + \frac{24}{320}\cos 2t$

11. $y(t) = \frac{2}{17}e^{-4t} - \frac{17}{85}e^{-2t} + \frac{7}{85}\cos t + \frac{6}{85}\operatorname{sen} t$

13. $y(t) = -\frac{3}{40}e^{-2t}\cos 4t + \frac{3}{80}e^{-2t}\operatorname{sen} 4t - \frac{48}{320}\operatorname{sen} 2t + \frac{24}{320}\cos 2t$.

15. (a) Una solución es $-\frac{8}{145}\cos 3t + \frac{9}{145}\operatorname{sen} 3t$.
(b) $A = 1/\sqrt{145}$ y $\phi = \arctan(9/8)$.

17. (ii).

19. (iv).

21. $y(t) = k_1 e^{-4t} + k_2 e^{-2t} + \frac{35}{85}\cos t + \frac{30}{85}\operatorname{sen} t$

23. (a) $y(t) = k_1 e^{-2t}\cos 4t + k_2 e^{-2t}\operatorname{sen} 4t + \frac{16}{260}e^{-t}\cos t + \frac{2}{260}e^{-t}\operatorname{sen} t$.
(b) Las soluciones tienden a cero.

25. $\phi = \arctan(-b/a)$ y $k = a/\cos\phi = -b/\operatorname{sen}\phi$.

Sugerencias y respuestas para la sección 4.3

1. $y(t) = k_1 \cos 3t + k_2 \operatorname{sen} 3t + \frac{1}{8}\cos t$

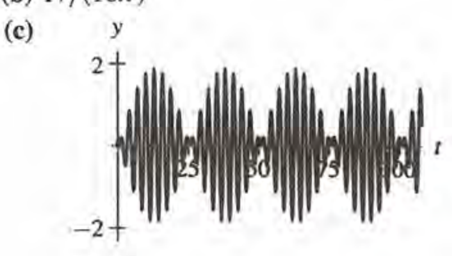
3. $y(t) = k_1 \cos 2t + k_2 \operatorname{sen} 2t - \frac{4}{15}\cos \frac{1}{2}t$

5. $y(t) = k_1 \cos \sqrt{3}\,t + k_2 \operatorname{sen}\sqrt{3}\,t - \frac{1}{6}\cos 3t$

7. $y(t) = -\frac{1}{8}\cos 3t + \frac{1}{8}\cos t$

9. $y(t) = -3\cos\sqrt{5}\,t + 3\cos 2t$

11. (a) $1/(16\pi)$
(b) $17/(16\pi)$
(c)



13. **(a)** $(\sqrt{5}-2)/(4\pi)$

(b) $(\sqrt{5}+2)/(4\pi)$

(c)



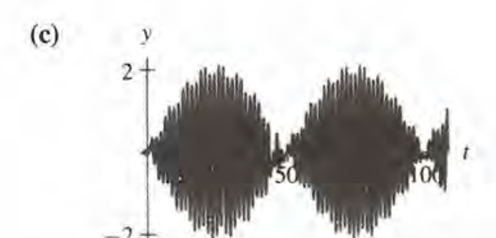
15. Ecuación (ii).

17. Ecuación (i).

19. **(a)** $y(t) = k_1 \cos\sqrt{15}\,t + k_2 \operatorname{sen}\sqrt{15}\,t - \cos 4t + \frac{1}{7}\operatorname{sen} t$

(b) $y(t) = \cos\sqrt{15}\,t - \frac{1}{7\sqrt{15}}\operatorname{sen}\sqrt{15}\,t - \cos 4t + \frac{1}{7}\operatorname{sen} t$

(c)



(d) *Sugerencia:* Use el hecho de que, si $y_1(t)$ es una solución de $d^2y/dt^2 + 15y = \cos 4t$ y $y_2(t)$ lo es de $d^2y/dt^2 + 15y = 2 \operatorname{sen} t$, entonces $y_1(t) + y_2(t)$ es una solución de la ecuación diferencial dada.

21. El ritmo de "Hey, Jude" tiene la misma frecuencia natural (o muy parecida) que el movimiento oscilatorio del estadio.

23. *Sugerencia:* La respuesta de amplitud máxima ocurre para $T = \frac{3}{2}$.

Sugerencias y respuestas para la sección 4.4

1. Frotando el dedo alrededor del borde del vaso, el músico hace vibrar a éste con su frecuencia natural y esta vibración produce el sonido de esa frecuencia. Con el agua en el vaso, la frecuencia y el tono pueden cambiarse. Empujando contra el vaso, varían la amplitud y el volumen del sonido.

3. **(a)** $\partial A/\partial\omega = \omega(2q - p^2 - 2\omega^2)/((q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2)^{3/2}$

(b) *Sugerencia:* Los puntos críticos de A como función de ω satisfacen $\omega = 0$ o $\omega^2 = q - p^2/2$.

5. *Sugerencia:* Use la regla de la cadena aplicada a $y_p(t+\theta)$.

Sugerencias y respuestas para la sección 4.5

1. **(a)** β se incrementa para esta modificación.

(b) El sistema parece más bien lineal.

3. **(a)** γ se incrementa.

(b) Para valores de y donde $c(y) \neq 0$, $|c(y)|$ aumenta.

5. *Sugerencia:* $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{\epsilon}{m}\dfrac{dy}{dt} - \dfrac{pa^2}{m}y = -g$

¿Qué representan ϵ, p, a, m y g?

7. *Sugerencia:* $m\dfrac{d^2y}{dt^2} + \epsilon\dfrac{dy}{dt} = -mg + \begin{cases} pa^2y, & \text{si } y \geq 0; \\ 0, & \text{si } y < 0. \end{cases}$

¿Qué representan ϵ, p, a, m y g?

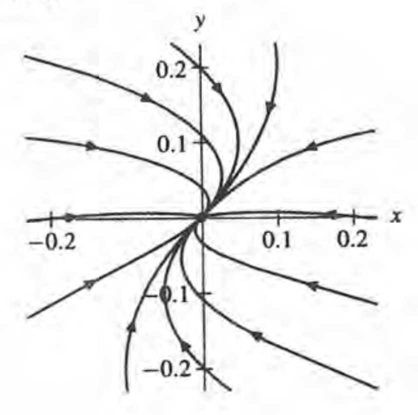
Sugerencias y respuestas para la sección 5.1

1. Los sistemas (i) y (iii) tienen el mismo "retrato local" cerca de (0, 0).

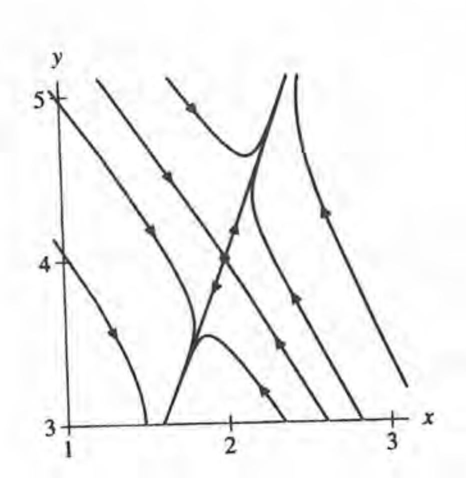
3. **(a)** El sistema linearizado en el origen es $dx/dt = -2x + y$, $dy/dt = -y$.

(b) Sumidero.

(c)



(d) El sistema linearizado en (2, 4) es $dx/dt = -2x + y$, $dy/dt = 4x - y$. Por tanto, (2, 4) es un punto de silla.



5. **(a)** $x(t) = x_0 e^{-t}$

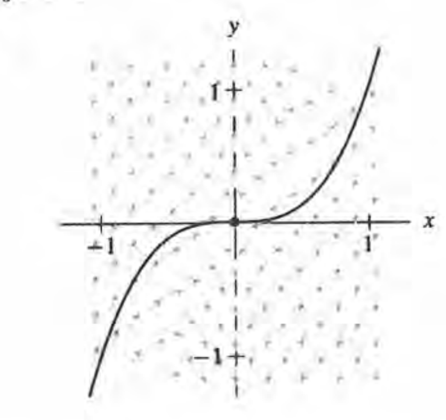
(b) $y(t) = x_0^3 e^{-3t} + (y_0 - x_0^3)e^t$

(c) $x(t) = x_0 e^{-t}$ y $y(t) = x_0^3\, e^{-3t} + (y_0 - x_0^3)e^t$.

(d) y_0 debe ser igual a x_0^3.

(e) x_0 debe ser 0.

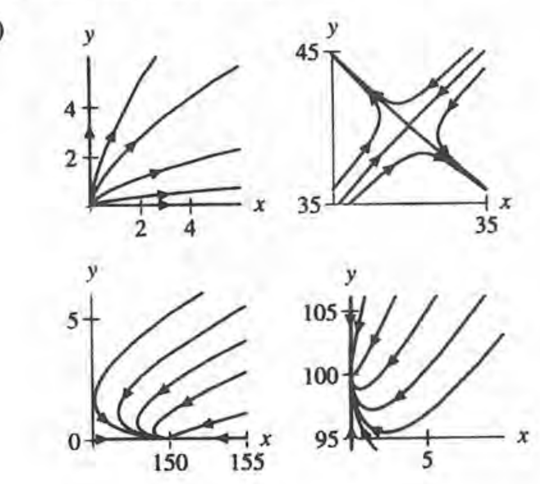
(f)



(g) Para el sistema no lineal, las soluciones tienden al origen a lo largo de la curva $y = x^3$. Para el sistema linearizado, las soluciones tienden al origen a lo largo del eje x.

7. **(a)** Puntos de equilibrio: (0, 0), (0, 100), (150, 0), (30, 40). Son fuente, sumidero, sumidero y punto de silla, respectivamente.

(b)



(c) Vea el inciso (a).

9. (a) Puntos de equilibrio: (0, 0), (0, 25), (100, 0), (75, 12.5). Son fuente, punto de silla, punto de silla y sumidero, respectivamente.

(b)

(c) Vea el inciso (a).

11. (a) Puntos de equilibrio: (0, 0), (0, 50), (40, 0). Son fuente, sumidero y punto de silla, respectivamente.

(b)

(c) Vea el inciso (a).

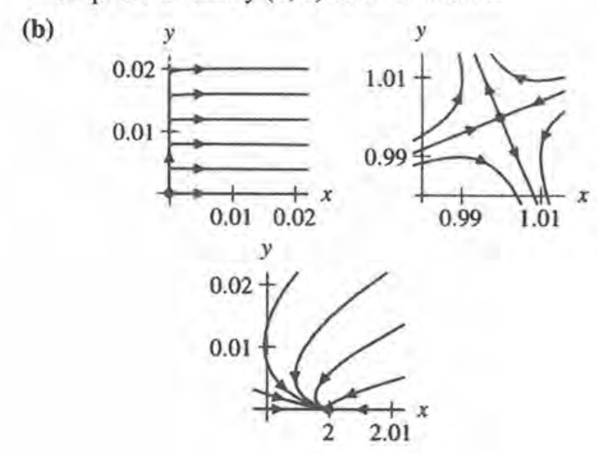
13. (a) Puntos de equilibrio: (0, 0), (0, 50), (60, 0), (30, 40), (234/5, 88/5). Son fuente, punto de silla, sumidero, sumidero y punto de silla, respectivamente.

(b)

(c) Vea el inciso (a).

15. (a) Puntos de equilibrio: (0, 0), (1, 1), (2, 0). El punto (0, 0) tiene un eigenvalor cero (vea el plano fase para determinar el comportamiento local). (1, 1) es un punto de silla y (2, 0) es un sumidero.

(b)



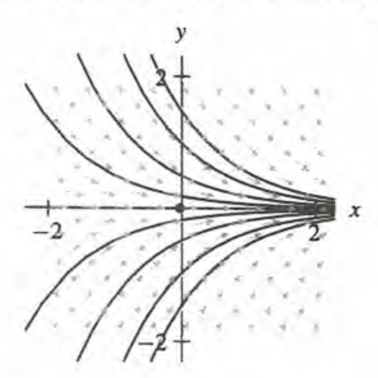
(c) Vea el inciso (a).

17. (a) $dx/dt = 0$, $dy/dt = -y$.

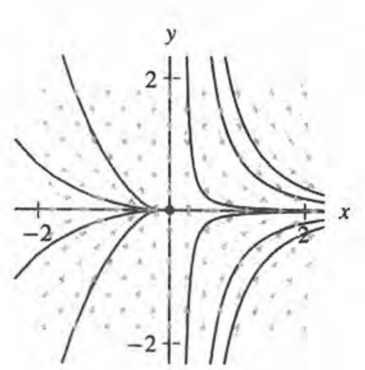
(b) Eigenvalores 0, -1 con eigenvectores (1, 0), (0, 1).

(c) $dx/dt = 0$, $dy/dt = y$.
(d) Eigenvalores 0, 1 con eigenvectores (0, 1), (1, 0).
(e) El punto de equilibrio (0, 0) es un sumidero y el punto (0, 1) parece ser un punto de silla.
(f) La ecuación para dx/dt es de "orden superior".

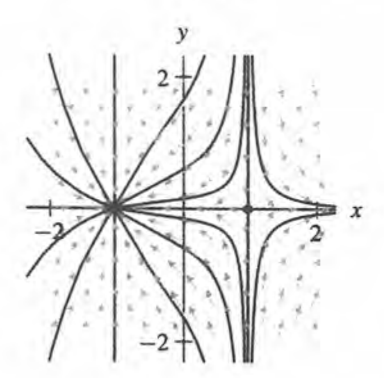
19. (a)



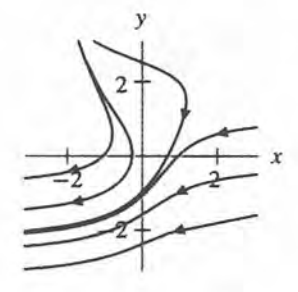
(b)



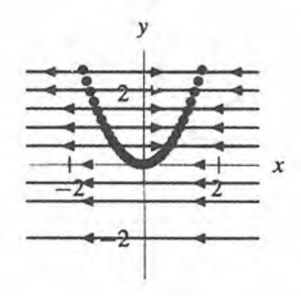
(c)



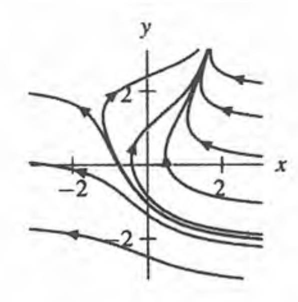
(c) Si $a < 0$, todas las soluciones decrecen en la dirección y ya que $dy/dt < 0$. Si $a > 0$, todas se incrementan en la dirección y ya que $dy/dt > 0$. Si $a = 0$, hay una curva de puntos de equilibrio localizados a lo largo de $y = x^2$.



Plano fase para $a < 0$



Plano fase para $a = 0$

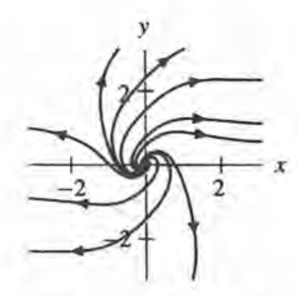


Plano fase para $a > 0$

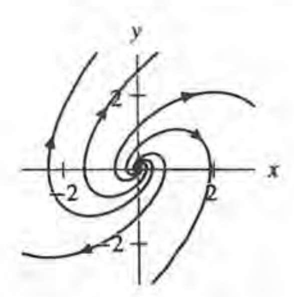
21. (a) Si $a \neq 0$, no hay puntos de equilibrio. Si $a = 0$, la curva $y = x^2$ consiste enteramente de puntos de equilibrio.
(b) $a = 0$.

23. (a) (0, 0), $(\pm 1/\sqrt{a}, \pm 1/\sqrt{a})$.
(b) $a = 0$.
(c) Si $a < 0$, sólo hay un punto de equilibrio en el origen y es una fuente espiral. Si $a > 0$, el sistema tiene dos puntos de equilibrio adicionales en

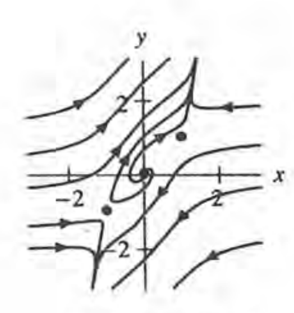
$(\pm 1/\sqrt{a}, \pm 1/\sqrt{a})$. Esos puntos de equilibrio vienen del infinito cuando a crece a través de 0.



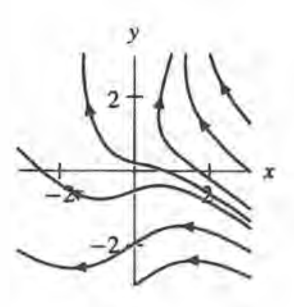
Plano fase para $a < 0$



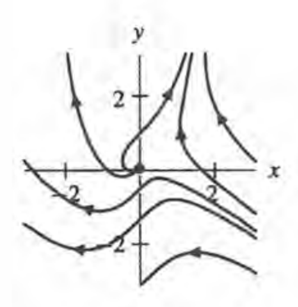
Plano fase para $a = 0$



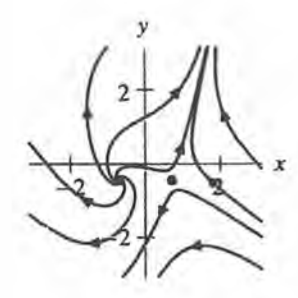
Plano fase para $a > 0$



Plano fase para $a < 0$



Plano fase para $a = 0$

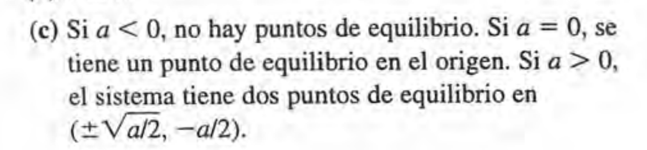


Plano fase para $a > 0$



25. (a) $(\pm\sqrt{a/2}, -a/2)$

(b) $a = 0$



(c) Si $a < 0$, no hay puntos de equilibrio. Si $a = 0$, se tiene un punto de equilibrio en el origen. Si $a > 0$, el sistema tiene dos puntos de equilibrio en $(\pm\sqrt{a/2}, -a/2)$.

27. (a) Si X y Y no están presentes en la isla, entonces ninguno emigra a la isla.

(b) Son grandes y positivos.

(c) Son negativas.

(d) Fuente o punto de silla.

(e) *Sugerencia:* Vea el capítulo 3.

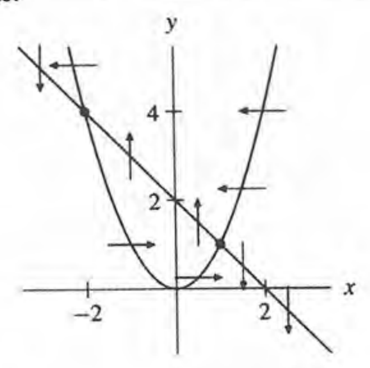
29. (a) En (0, 0), $\partial f/\partial x$ es grande y $\partial g/\partial y$ es pequeña.

(b) En (0, 0), $\partial f/\partial y$ es negativa con un gran valor absoluto y $\partial g/\partial x = 0$.

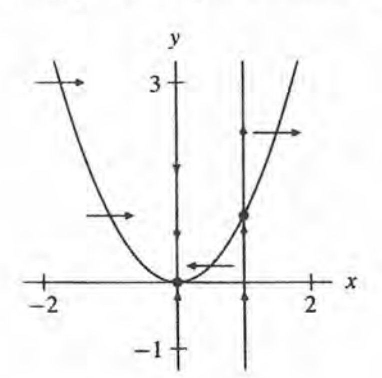
(c) Fuente.

Sugerencias y respuestas para la sección 5.2

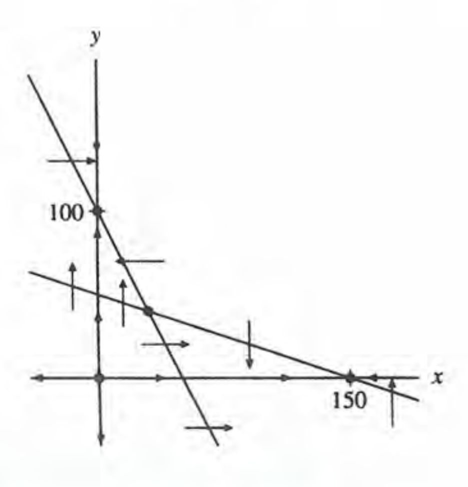
1. Puntos de equilibrio: (1, 1) y (−2, 4). Las tres soluciones se dirigen hacia abajo y hacia la derecha sin límite.



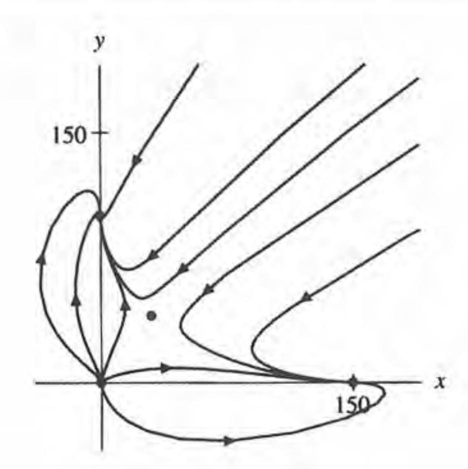
3. Puntos de equilibrio: (0, 0) y (1, 1). Las soluciones con condiciones iniciales (a) y (b) se mueven hacia el punto de equilibrio (0, 0), mientras que la solución con condición inicial (c) se mueve hacia abajo por la línea $x = 1$ hacia el punto de equilibrio en (1, 1).



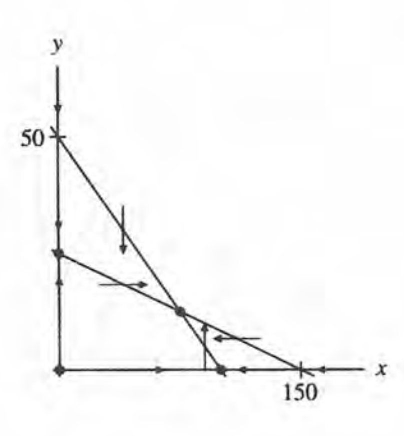
5. (a)



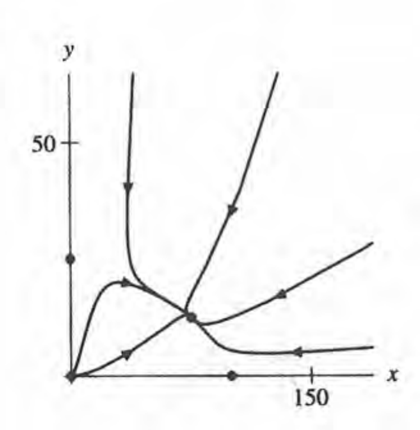
(b)



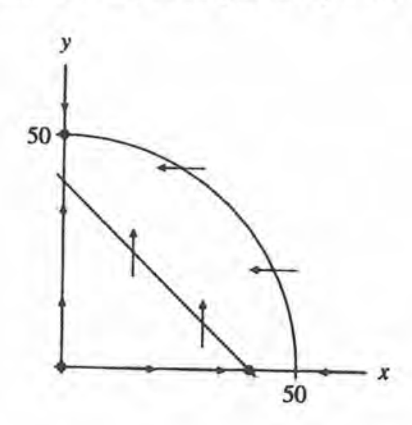
7. (a)



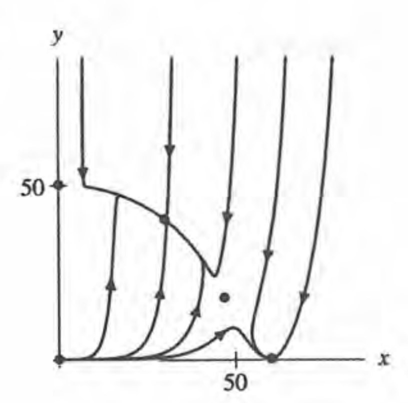
(b)



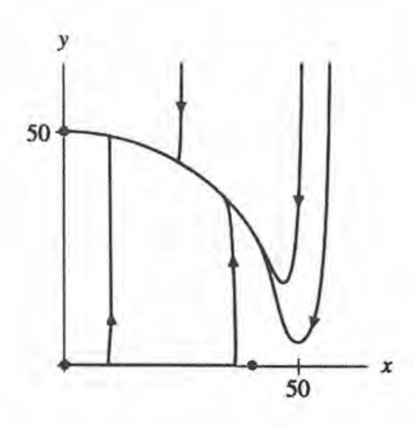
9. (a)



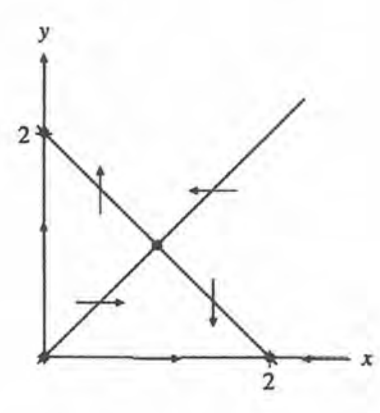
(b)



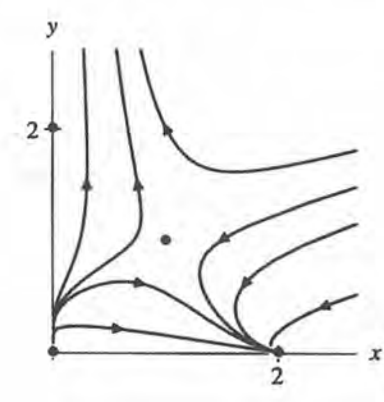
(b)



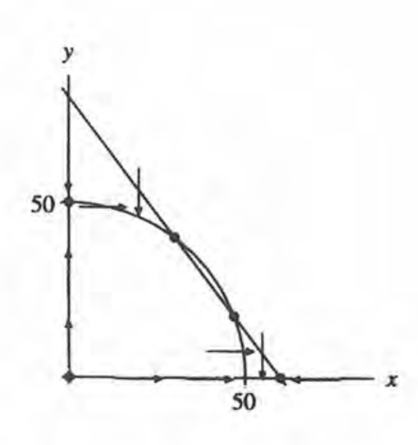
13. (a)



(b)



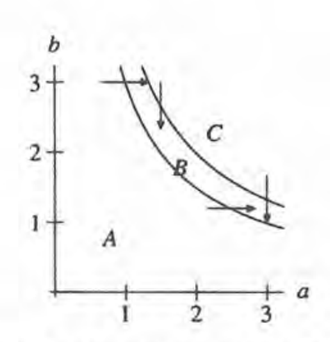
11. (a)



15. (a) Cambie los signos frente a B y D.

(b) Las nulclinales son pares de líneas rectas. Los puntos (0, 0), (0, F/E) y (C/A, 0) son puntos de equilibrio. Debemos tener $AE - BD > 0$ para que haya un punto de equilibrio con x y y positivas.

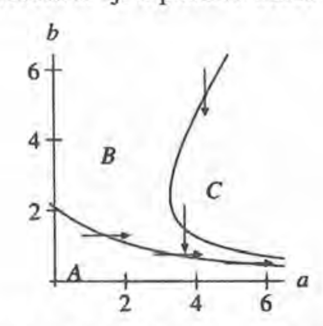
17. **(a)**



(b) En la región A, el campo vectorial señala hacia arriba a la derecha. En la región B, señala hacia abajo a la derecha. En la región C, el campo vectorial señala hacia abajo a la izquierda.

(c) Un vez en la región B, una solución no puede salir de ahí. Conforme pasa el tiempo, esas soluciones son asintóticas al eje x positivo desde arriba.

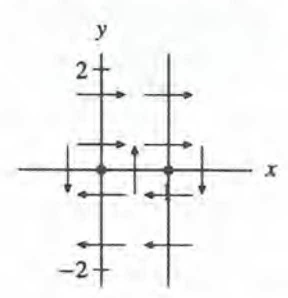
19. **(a)**



(b) En la región A, el campo vectorial señala hacia arriba a la derecha. En la región B, señala hacia abajo y hacia la derecha. En la región C, el campo vectorial apunta hacia abajo a la izquierda.

(c) Una vez en la región B, una solución no puede salir de ahí. Conforme pasa el tiempo, esas soluciones son asintóticas al eje x positivo desde arriba.

21.



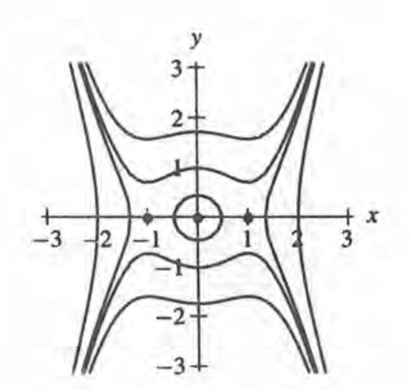
23. El sistema linearizado en (0, 0) es $dx/dt = y$ y $dy/dt = x$. El sistema linearizado en (1, 0) es $dx/dt = y$ y $dy/dt = -x$. No sabemos si el punto de equilibrio en (1, 0) es un centro no lineal. Vea la sección 5.3.

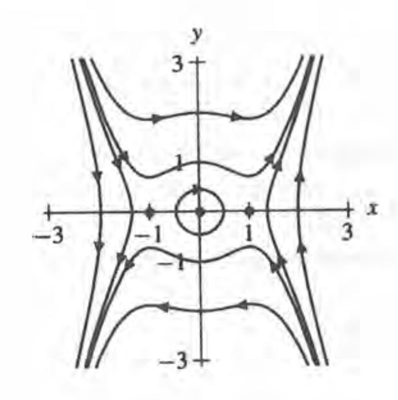
Sugerencias y respuestas para la sección 5.3

1. **(a)** *Sugerencia:* Calcule $\partial H/\partial x$ y $\partial H/\partial y$. Luego compárelas.

(b) (0, 0) es un mínimo local, $(\pm 1, 0)$ son puntos silla.

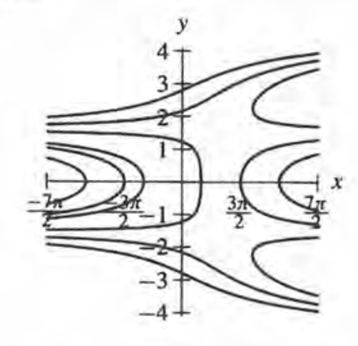
(c) (0, 0) es un centro, $(\pm 1, 0)$ son puntos silla conectados por órbitas separatrices.



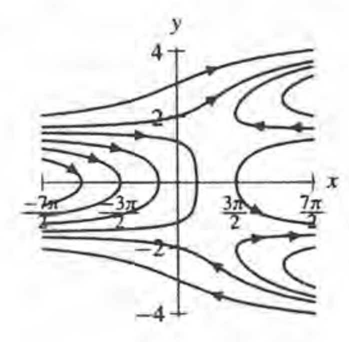


3. (a) *Sugerencia:* Calcule $\partial H/\partial x$ y $\partial H/\partial y$. Luego compárelas.

(b)



(c) Los puntos de equilibrio ocurren en puntos de la forma $(\pi - 4n\pi, -\frac{\pi}{2} + 2n\pi)$ y $(\pi + 4n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi)$, donde n es un entero.



5. No, más largo.

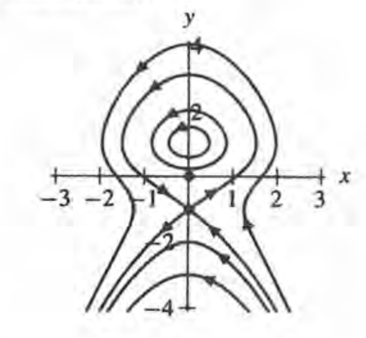
7. (a) Multiplique por $\sqrt{2}$.
   (b) $\pi/\sqrt{gl}$.

9. Sí, $H(x, y) = xy - y^3$.

11. No es hamiltoniano.

13. (b) y (c) no pueden ser hamiltonianos.

15. (a) No es hamiltoniano.
   (b)



   (c) Sí.
   (d) $H(x, y) = -y + 2 \arctan y - x^2/2$.
   (e) Al cambiar la longitud de los vectores no se modifica el campo de direcciones, por lo que los planos fase de los dos sistemas son los mismos.

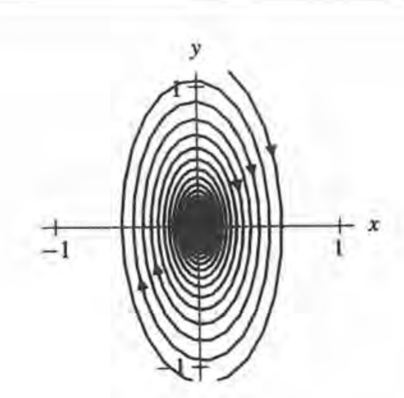
17. Si $y > 2$, $H(x, y) = -x^2/2+2y+y^2/2+3 \ln(y-2)$;
    si $y < 2$, $H(x, y) = -x^2/2+2y+y^2/2+3 \ln(2-y)$.

19. *Sugerencia:* Para $a \neq 0$, el sistema tiene dos puntos de equilibrio, pero para $a = 0$, tiene sólo uno.

Sugerencias y respuestas para la sección 5.4

1. (a) Sea $(x(t), y(t))$ una solución y diferencie $L(x(t), y(t))$ con respecto a t.
   (b) Los conjuntos de nivel son círculos.
   (c) Todas las soluciones tienden hacia el origen cuando t crece.

3. (a) Los eigenvalores son $-0.05 \pm i\sqrt{15.99}/2$.



(b) Sea $(x(t), y(t))$ la solución con $x(0) = -1$, $y(0) = 1$ y calcule la derivada de $L(x(t), y(t))$ en $t = 0$ con respecto a t.

(c) Sea $(x(t), y(t))$ cualquier solución y calcule la derivada de $K(x(t), y(t))$ con respecto a t.

5. El reloj se adelanta.

7. $m > b\sqrt{l}\,/\,(2\sqrt{g})$.

9. *Sugerencia:* Las amplitudes de las soluciones cerca de $(0, 0)$ decrecen según $e^{-tb/(2m)}$.

11. **(a)** $(0, 0)$ es una fuente espiral, $(\pi, 0)$ es un punto de silla.

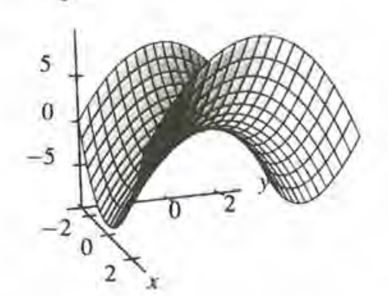
(b) *Sugerencia:* El retrato fase se parece a la del péndulo amortiguado, excepto que las soluciones se mueven en espiral hacia afuera.

(c) Oscila con amplitud ascendente.

13. **(a)** $dx/dt = 2x$, $dy/dt = -2y$.

(b) Punto de silla.

(c)



(d) *Sugerencia:* Los ejes son las líneas de eigenvectores.

15. **(a)** Los eigenvalores son 1 y -1.

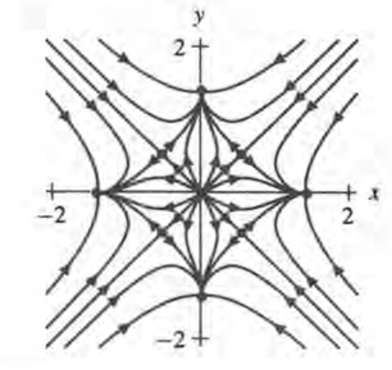
(b) Los eigenvalores son -2 y -1.

(c) *Sugerencia:* $(0, 1)$ es un eigenvector para el eigenvalor -1.

(d) Las matrices jacobianas son las mismas.

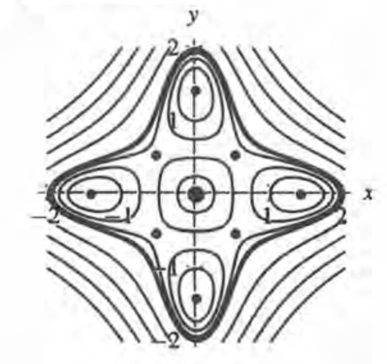
17. **(a)**
$$\frac{dx}{dt} = 2x - x^3 - 6xy^2$$
$$\frac{dy}{dt} = 2y - y^3 - 6x^2y.$$

(b)



(c) Cuatro peces muertos.

(d)



(e) S es negativa si x o y son demasiado grandes.

19. **(a)** *Sugerencia:* Las derivadas parciales mixtas son iguales.

(b) $\partial f/\partial y \neq \partial g/\partial y$.

21. Si $(y(t), v(t))$ es una solución del segundo sistema, calcule $d(H(y(t), v(t))/dt$.

Sugerencias y respuestas para la sección 5.5

1. **(a)**
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Eigenvalores 1, 2, -1 y eigenvectores $(0, 0, 1)$, $(1, -3, 0)$ y $(1, 0, 0)$, respectivamente.

(c) Punto de silla.

(d) *Sugerencia:* El sistema linearizado se desacopla.

(e) Las soluciones con $y = z = 0$ se mueven hacia el punto de equilibrio. Todas las otras se alejan.

3. **(a)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(b) Los eigenvalores son 1, 0 y -1 y los eigenvectores son (1, 0, 0), (0, 1, 1) y (0, 0, 1), respectivamente.

(c) El sistema linearizado tiene una línea de puntos de equilibrio y no tiene nombre.

(d) *Sugerencia:* Las ecuaciones x y y, z se desacoplan.

(e) Las soluciones con $x = 0$ se mueven hacia un punto de equilibrio, y aquellas con $x \neq 0$ se desplazan en la dirección de x creciente.

5. **(a)** *Sugerencia:* Iguale $y = 0$ y observe el sistema de ecuaciones; luego ensaye $x = 0$ y $z = 0$.

(b) *Sugerencia:* ¿Cuál es la conexión entre lobos y árboles si los alces están extintos?

7. **(a)** (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1), y $((\zeta + 1)(2\zeta + 1), \zeta/(2\zeta + 1), (2\zeta + 2)/(2\zeta + 1))$.

(b) Cuando ζ decrece, x_0 crece, y_0 decrece y z_0 aumenta.

(c) *Sugerencia:* Compare cómo ζ entra en la ecuación para dz/dt con el sistema en la sección.

Sugerencias y respuestas para la sección 5.6

1. Gráfica (ii).

3. Gráfica (i).

5. Gráfica (iii).

7. Gráfica (iv).

9. **(a)** $y(t) = -\frac{\sqrt{3}}{30} \operatorname{sen} \sqrt{3}t + \cos \sqrt{3}t + \operatorname{sen} \frac{1}{10}t$.

(b) Sólo los términos correspondientes a la solución homogénea afectan el mapa de Poincaré.

(c) La misma, sólo que más larga.

(d) *Sugerencia:* No hay puntos de silla para el oscilador (no forzado) armónico.

Sugerencias y respuestas para la sección 6.1

1. $\mathscr{L}[f] = 3/s$.
3. $\mathscr{L}[h] = -10/s^3$.
5. *Sugerencia:* Use la fórmula $\mathscr{L}[dy/dt] = s\mathscr{L}[y] - y(0)$.
7. e^{3t}.
9. $(2e^{-5t/3})/3$.
11. $5/3$.
13. $5e^{2t} - 3e^t$.
15. **(a)** $\mathscr{L}[dy/dt] = s\mathscr{L}[y] - y(0)$ y
$\mathscr{L}[-y + e^{-2t}] = -\mathscr{L}[y] + 1/(s+2)$.
(b) $\mathscr{L}[y] = (2s+5)/((s+1)(s+2))$.
(c) $y(t) = 3e^{-t} - e^{-2t}$.
17. **(a)** $\mathscr{L}[dy/dt + 7y] = s\mathscr{L}[y] - y(0) + 7\mathscr{L}[y]$
$\mathscr{L}[1] = 1/s$.
(b) $\mathscr{L}[y] = (3s+1)/(s(s+7))$.
(c) $y(t) = 20e^{-7t}/7 + 1/7$.
19. **(a)** $\mathscr{L}[dy/dt + 9y] = s\mathscr{L}[y] - y(0) + 9\mathscr{L}[y]$
$\mathscr{L}[2] = 2/s$.
(b) $\mathscr{L}[y] = (-2s+2)/(s(s+9))$.
(c) $y(t) = -20e^{-9t}/9 + 2/9$.
21. **(a)** $\mathscr{L}[dy/dt + y] = s\mathscr{L}[y] - y(0) + \mathscr{L}[y]$
$\mathscr{L}[e^{-2t}] = 1/(s+2)$.
(b) $\mathscr{L}[y] = (s+3)/((s+1)(s+2))$.
(c) $y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$.
23. **(a)** $\mathscr{L}[dy/dt] = s\mathscr{L}[y] - y(0)$ y
$\mathscr{L}[-y + t^2] = -\mathscr{L}[y] + 2/s^3$.
(b) $\mathscr{L}[y] = (2 + s^3)/(s^3(s+1))$.
(c) $y(t) = t^2 - 2t + 2 - e^{-t}$.
25. $-2e^{-3t}/5 + ce^{2t}$ donde $c = y(0) + 2/5$.
27. *Sugerencia:* ¿Qué necesita hacer con $\mathscr{L}[y^2]$?

Sugerencias y respuestas para la sección 6.2

1. **(a)** $g_a(t) = 1 - u_a(t)$
(b) $\mathscr{L}[g_a] = (1 - e^{-as})/s$
3. $(1 - e^{-as})/as^2$
5. $u_3(t)\left(e^{2(t-3)} - e^{(t-3)}\right)$
7. $u_1(t)\left(e^{4(t-1)} - e^{-2(t-1)/3}\right)$
9. $y(t) = -2e^{-9t} + \frac{1}{9}u_5(t) - \frac{1}{9}u_5(t)e^{-9(t-5)}$
11. $y(t) = e^{-t} + u_2(t)\left(e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)}\right)$
13. $y(t) = u_1(t)\left((t-2) + e^{-(t-1)}\right) + 2e^{-t}$
15. **(a)** $\mathscr{L}[dy/dt] = s\mathscr{L}[y] - y(0)$ y
$\mathscr{L}[-y + u_a(t)] = -\mathscr{L}[y] + e^{-as}/s$
(b) $\mathscr{L}[y] = y(0)/(s+1) + e^{-as}/(s(s+1))$
(c) $y(t) = u_a(t)\left(1 - e^{-(t-a)}\right) + y(0)e^{-t}$
17. $\mathscr{L}[w] = (1 - e^{-s})/(s(1 + e^{-s}))$
19. **(a)** $\mathscr{L}[y] = (1 - e^{-s})/(s(s+1)(1 + e^{-s}))$
(b) La función $w(t)$ es alternativamente 1 y -1. Cuando $u(t) = 1$, la solución decae exponencialmente hacia $y = 1$. Cuando $u(t)$ cambia a -1, la solución decae entonces hacia $y = -1$.

Sugerencias y respuestas para la sección 6.3

1. $\mathscr{L}[\text{sen}\,\omega t] = \omega/(s^2 + \omega^2)$.
3. $\mathscr{L}[e^{at}\,\text{sen}\,\omega t] = \omega/(\omega^2 + (s-a)^2)$.
5. *Sugerencia:* Tome la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación y despeje $\mathscr{L}[y]$.
7. $\mathscr{L}[f] = (s^2 - \omega^2)/(\omega^2 + s^2)^2$.
9. $\mathscr{L}[f] = 2/(s-a)^3$.

11. $(s + 1)^2 + 3^2$.

13. $(s + 1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2$.

15. $(1/3)e^{-t}$ sen ^{3t}.

17. $2e^{-t/2}\cos(\sqrt{3}t/2) + (4/\sqrt{3})e^{-t/2}$ sen $(\sqrt{3}t/2)$.

19. Igual que para exponenciales reales.

21. *Sugerencia:* Recuerde que $e^{at}\cos\omega t$ es la parte real de $e^{(a+ib)t}$.

23. $(1/3)e^{-t}$ sen $3t$.

25. $2e^{-t/2}\cos(\sqrt{3}t/2) + (4/\sqrt{3})e^{-t/2}$ sen $(\sqrt{3}t/2)$.

27. **(a)** $\mathcal{L}[d^2y/dt^2 + 4y] = (s^2 + 4)\mathcal{L}[y] + 2s$
$\mathcal{L}[\cos 2t] = s/(s^2 + 4)$.
(b) $\mathcal{L}[y] = (-2s^3 - 7s)/(s^4 + 8s^2 + 16)$.
(c) $y(t) = -2\cos 2t + (t/4)$ sen $2t$.

29. **(a)** $\mathcal{L}[d^2y/dt^2 + 3y] = (s^2 + 3)\mathcal{L}[y] + 2$.
$\mathcal{L}[u_4(t)\cos(5(t-4))] = se^{-4s}/(s^2 + 25)$.
(b) $\mathcal{L}[y] = -2/(3+s^2)+e^{-4s}s/((s^2+3)(s^2+25))$.
(c) $y(t) = -2\text{sen}(\sqrt{3}t)/\sqrt{3} + u_4(t)\cos(\sqrt{3}(t-4)) - \cos(5(t-4)))/22$.

31. **(a)** $\mathcal{L}[d^2y/dt^2 + 3y] = (s^2 + 3)\mathcal{L}[y] - 2s$
$\mathcal{L}[\omega] = (1-e^{-s})/s^2$.
(b) $\mathcal{L}[y] = 2s/(s^2+3) + (1 - e^{-s})/(s^2(s^2+3))$.
(c) $y(t) = 2\cos(\sqrt{3}t) + (t/3) - \text{sen}(\sqrt{3}t)/(3\sqrt{3}) + u_1(t)((1/3) - (t/3) + \text{sen}(\sqrt{3}(t-1))/(3\sqrt{3}))$.

33. **(a)** $y(t) = 2\cos 3t + t(\text{sen } 3t)/60$.
(b) *Sugerencia:* La frecuencia de forzamiento es la frecuencia natural y no hay amortiguamiento.

35. **(a)** $\mathcal{L}[y] = (s+20)/(s^2 + 20s + 200) + (1 - e^{-s})/((1 + e^{-s})s(s^2 + 20s + 200))$.
(b) El periodo natural es $\pi/5$ y el amortiguamiento envía las soluciones a cero según e^{-5t}. La respuesta forzada tiene periodo 2 y amplitud 1/200.

Sugerencias y respuestas para la sección 6.4

1. *Sugerencia:* Recuerde la regla de L'Hôpital: diferencie el numerador y el denominador con respecto a Δt.

3. $y(t) = e^{-t}\cos 2t + e^{-t}$ sen $2t + (1/2)u_3(t)e^{-(t-3)}$ sen$(2(t-3))$.

5. $y(t) = u_1(t)e^{-(t-1)}\text{sen}(\sqrt{2}(t-1))/\sqrt{2} - (3/\sqrt{2})u_4(t)e^{-(t-4)}\text{sen}(\sqrt{2}(t-4))$.

7. **(a)** $\mathcal{L}[\delta_a] = e^{-as}$.
$s\mathcal{L}[u_a] - u_a(0) = s(e^{-as}/s) - 0 = e^{-as}$.
(b) Esta relación sugiere que $du_a/dt = \delta_a$.
(c) Aproxime $u_a(t)$ con funciones continuas lineales por tramos y tome sus derivadas.

9. **(a)** $\mathcal{L}[y] = (1/(s^2 + 2))\sum_{n=1}^{\infty} e^{-ns}$.
(b) $y(t) = (1/\sqrt{2})\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\,\text{sen}(\sqrt{2}\,(t-n))$.
(c) *Sugerencia:* No es un forzamiento resonante.

Sugerencias y respuestas para la sección 6.5

1. $1 - e^{-t}$.

3. $u_2(t)$ sen $(t-2)$.

5. $\cos t - \cos 2t$.

7. $p = 4$, $q = 5$.

9. **(a)** $a(s + p)\,\mathcal{L}[\zeta]$.
(b) $b\mathcal{L}[\zeta]$.
(c) $(\mathcal{L}[f] + a(s+p)+b)\mathcal{L}[\zeta]$.

11. **(a)** $\mathcal{L}[y_1] = \mathcal{L}[f_1]/(s^2 + ps + q)$.
(b) *Sugerencia:* Calcule ambas y compárelas.
(c) *Sugerencia:* Despeje $\mathcal{L}[y_2]$.

Sugerencias y respuestas para la sección 6.6

1. **(a)** $\mathcal{L}[y] = (2s + 2)/(s^2 + 2s + 2) + 4/((s^2 + 4s + 20)(s^2 + 2s + 2))$.
(b) Los polos están en $s = -2 \pm 4i$ y en $s = -1 \pm i$.
(c) Como los polos tienen parte real negativa, las soluciones decrecen a cero (según e^{-t}). Y puesto que los polos son complejos, las soluciones oscilan (con periodos 2π y $\pi/2$).

3. **(a)** $\mathcal{L}[y] = (\cos(4)s + \text{sen}(4) - se^{-4s})/((s^2 + s + 8)(s^2 + 1))$.
(b) Los polos son $s = \pm i$ y $s = -1/2 \pm i(\sqrt{31}/2$.
(c) *Sugerencia:* El forzamiento "se apaga" en el tiempo $t = 4$.

5. **(a)** $\mathcal{L}[y] = (s + 1)/(s^2 + 16)$.
(b) $(s = \pm 4i$.
(c) La solución es periódica y no decae.

7. **(a)** $\mathcal{L}[y] = (s + 3)/(s^2 + 2s + 1)$.
(b) Los polos están en $s = -1$.
(c) El comportamiento de una ecuación lineal de segundo orden con doble polo debe corresponder a un sistema de primer orden con un eigenvalor doble.

9. **(a)** $\mathcal{L}[y] = (s + 1)/(s^2 + 20s + 200) + (1 - e^{-s})/(s(1 + e^{-s})(s^2 + 20s + 200))$.
(b) Los polos son $s = -10 \pm 10i$, $s = 0$ y $s = (2n + 1)\pi$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
(c) *Sugerencia:* La respuesta natural se muere rápidamente, por lo que la solución oscila entre la respuesta forzada para forzamiento $+1$ y forzamiento -1.

Sugerencias y respuestas para la sección 7.1

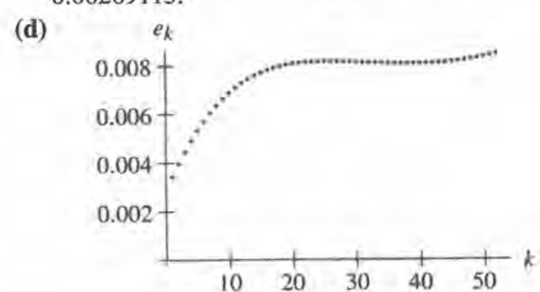
1. **(a)** $y(t) = 1/(1+t^2)$
(b) $y_{20} \approx 0.19334189$
(c) $e_{20} \approx 0.0066581009$
(d) $y_{1000} \approx 0.19987415, \ldots, y_{6000} \approx 0.19997904$
(e) $e_{100} \approx 0.0012709461$, $e_{200} \approx 0.00063198471$, $e_{300} \approx 0.00042055770, \ldots$, $e_{6000} \approx .000020955836$
(f) $K \approx 0.126731$

3. **(a)** $y(t) = e^{t^2/2}$
(b) $y_{20} \approx 2.51066$
(c) $e_{20} \approx 0.20762$
(d) $y_{1000} \approx 2.71376, \ldots, y_{6000} \approx 2.71753$
(e) $e_{100} \approx 0.0444901$, $e_{200} \approx 0.0224467, \ldots$, $e_{6000} \approx 0.000754848$
(f) $K \approx 4.47023$

5. **(a)** $y(t) = (11/9)e^{3t} + t/3 - 2/9$
(b) $y_{20} \approx 20.1147$
(c) $e_{20} \approx 4.54544$
(d) $y_{1000} \approx 24.5501, \ldots, y_{6000} \approx 24.6417$
(e) $e_{100} \approx 1.05955$, $e_{200} \approx 0.540843, \ldots$, $e_{6000} \approx 0.0183987$
(f) $K \approx 107.125$

7. **(a)** $M_1 = 8t^2y^3 - 2y^2$, $M_2 = -4ty$
(b) El error estimado es 0.00039984000 mientras que el error real es aproximadamente 0.00039984006.
(c) El error estimado es 0.00079744230 mientras que el error real es alrededor de 0.00079744409.
(d) Los errores tercero y cuarto estimados son 0.0011896358 y 0.0015733200. Los errores reales tercero y cuarto son 0.0011896455 y 0.0015733534.
(e) Compare sus gráficas con las figuras 7.5 y 7.6 en la sección 7.1.

9. No podemos comparar nuestra estimación del error verdadero puesto que no sabemos cómo calcularlo para esta ecuación diferencial. (No podemos encontrar una solución de forma cerrada.)
(a) $M_1 = (y + t \operatorname{sen} ty) \cos ty$, $M_2 = t \cos t\text{-}y$
(b) El error estimado en el primer paso es 0.00134894.
(c) El error estimado en el segundo paso es 0.00269115.
(d)



11. *Sugerencia:* Para los incisos (a)−(c), remítase a las figuras 7.3 y 7.4. Para los incisos (d) y (e), use la desigualdad en el inciso (c). Para el inciso (f), recuerde las sumas geométricas del cálculo. Los incisos (g)−(i) son sólo álgebra. La expresión $M_1(e^{M_2(t_n-t_0)} - 1)/(2M_2)$ es una constante en el inciso (i) una vez que la función $f(t, y)$ y el intervalo son dados. En otras palabras, $C = M_1/(2M_2)(e^{M_2(t_n-t_0)} - 1)$. Los límites que contribuyen a C no dependen de n.

Sugerencias y respuestas para la sección 7.2

1.

Resultados del método de Euler mejorado

k	t_k	y_k
0	0.0	3.0000
1	0.5	8.2500
2	1.0	21.3750
3	1.5	54.1875
4	2.0	136.2187

3.

Resultados del método de Euler mejorado

k	t_k	y_k
0	0.0	2.000
1	0.5	2.813
2	1.0	6.618
3	1.5	129.001
4	2.0	17310268.856

5.

Resultados del método de Euler mejorado.

k	t_k	y_k
0	0.0	4.00
1	1.0	1.50
2	2.0	-3.66
3	3.0	-259.96

Un pequeño análisis cualitativo indica que esos resultados no son útiles (vea el ejercicio 6).

7.

Resultados del método de Euler mejorado.

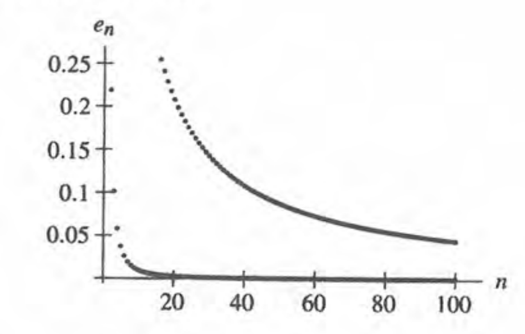
k	t_k	y_k
0	0.0	2.00000
1	0.5	3.13301
2	1.0	4.01452
3	1.5	4.80396
4	2.0	5.54124

9. **(a)** La solución analítica es $y(t) = 1 - e^{-t}$.
(b) $y_4 \approx 0.627471$, $e_4 \approx .00464959$.
(c) Use $n = 28$ pasos. Entonces $e_{28} \approx 0.00008$.

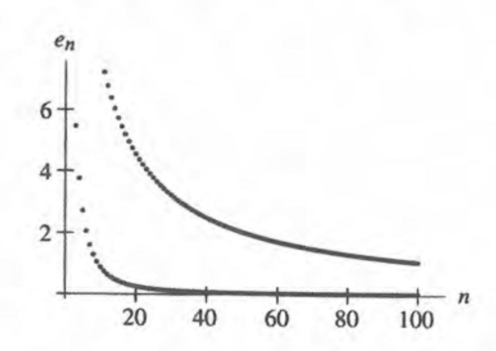
11. **(a)** La solución analítica es $y(t) = 1/(t + 2)$.
(b) $y_4 \approx 0.252281$, $e_4 \approx 0.002281$.
(c) Use $n = 20$ pasos. Entonces $e_{20} \approx 0.00008$.

13. **(a)** 53 pasos.
(b) $y_{53} = 0.200095$
(c) $e_{53} = 0.000095$

15.



17.



Sugerencias y respuestas para la sección 7.3

1.

Resultados del Runge–Kutta

t_k	y_k
0.0	3.000
0.5	8.979
1.0	25.173
1.5	69.030
2.0	187.811

3.

Resultados del Runge–Kutta

t_k	y_k	t_k	y_k
0.0	0.00000	3.0	2.99645
0.5	1.82290	3.5	2.99882
1.0	2.70058	4.0	2.99961
1.5	2.90368	4.5	2.99987
2.0	2.96803	5.0	2.99996
2.5	2.98935		

5.

Resultados del Runge–Kutta

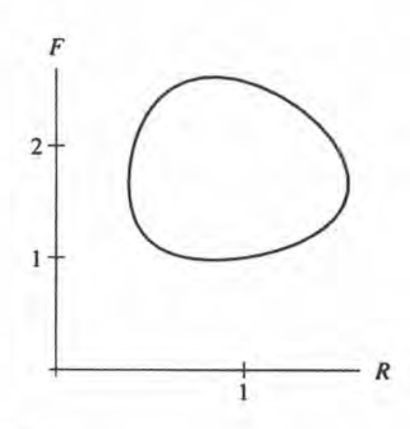
t_k	y_k
1.0	2.00000
1.5	3.10456
2.0	3.98546
2.5	4.77554
3.0	5.51352

7. (a)

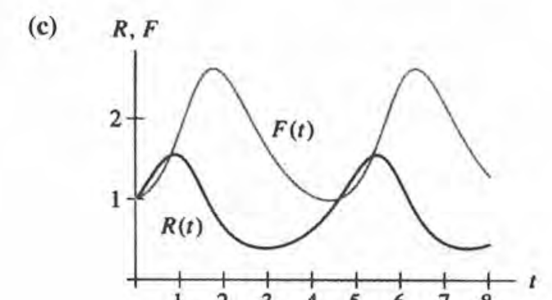
Resultados del Runge–Kutta para el sistema depredador-presa.

t_k	R_k	F_k
0	1.000000	1.00000
1	1.504120	1.91806
2	0.641301	2.48192
3	0.416812	1.62154
4	0.636774	1.08434

(b)



(c)



Sugerencias y respuestas para la sección 7.4

1. Usando simple precisión, obtenemos $y(1) \approx 0.941274$. Para asegurarse de ir por el camino correcto: $y_2 \approx 0.941885$, $y_4 \approx 0.924849$, $y_8 \approx 0.94101$.

3. Usando simple precisión, obtenemos $y(2) \approx 1.25938$. Para asegurarse de ir por el camino correcto: $y_2 \approx 1.331857$, $y_4 \approx 1.256846$, $y_8 \approx 1.259110$.

Sugerencias y respuestas para la sección 8.1

1. La órbita tiende a ser fija.

3. La órbita tiende a infinito.

5. La órbita es de periodo 2.

7. La órbita tiende a ser fija.

9. Puntos fijos: $x = 1$.
Puntos de periodo 2: todos los números reales excepto $x = 1$.

11. No hay puntos fijos o puntos de periodo 2.

13. Puntos fijos: $x = 0$.
Puntos de periodo 2: ninguno.

15. Para puntos fijos, $x = 0, -3$. Para puntos periódicos de periodo 2, $x = (-1 \pm \sqrt{5})/2$.

17. Hay un punto que es fijo y ningún punto de periodo 2.

19. Hay un punto fijo en $x = 0$ y todos los demás son de periodo dos.

21. Hay un punto fijo en $x = 2$ y ningún otro punto periódico.

23. La órbita de cualquier número real es una órbita periódica de periodo 2, excepto $x = 2$, que es fijo.

25. Tiende a ser fijo.

27. Tiene periodo 3.

29. Tiende a ser fijo.

31. El periodo de la órbita es 5.

33. Es un punto fijo.

35. Tiende a ser fijo.

37. Para $c = 1/4$, hay un punto fijo. Para $c < 1/4$, hay dos. Para $c > 1/4$, no hay puntos fijos.

39. Para $c \geq -3/4$, no hay puntos de periodo 2 y para $c < -3/4$, hay dos puntos de periodo 2.

Sugerencias y respuestas para la sección 8.2

1. Los puntos fijos $x = 0, 3$ son repulsores.

3. $x = 0$ es atractor.

5. $x = 0$ es atractor.

7. $x = 0$ es repulsor y $x = \pm\pi/2$ son atractores.

9. $x = \pm 1$ son neutros.

11. No hay puntos fijos.

13. El periodo es 2 y la órbita es atractora.

15. El periodo es 5 y el ciclo es repulsor.

17. El periodo es 2 y el ciclo es neutro.

19. Los puntos fijos son $x = \pm 1$ y son neutros.

21. El punto fijo es $x = 0$ y es repulsor.

23. El punto fijo es $x = 0$ y es repulsor.

25. El punto fijo es atractor.

27. Hay un número infinito de puntos fijos y todos son repulsores.

29. Todos los ciclos son repulsores. Note que $|(T^n)'(x_0)| = 4^n$.

Sugerencias y respuestas para la sección 8.3

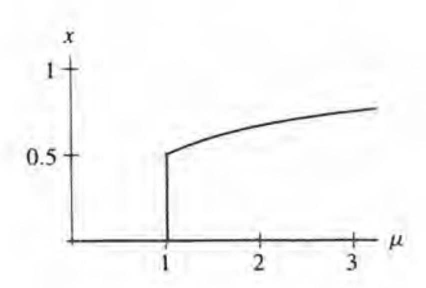
1. Es una bifurcación tangente. Para $-\alpha$ suficientemente pequeña, el punto fijo $x = \sqrt{-\alpha}$ es repulsor y el otro punto fijo $x = -\sqrt{-\alpha}$ es atractor. Para $\alpha = 0$, $x = 0$ es neutro.

3. Ésta es una bifurcación de tenedor. Para α ligeramente menor que o igual a 1, el punto fijo es atractor. Para $\alpha > 1$, aparecen dos puntos fijos adicionales y son atractores. El origen resulta un punto fijo repulsor.

5. Ésta es una bifurcación tangente. Hay sólo un punto fijo neutro para $\alpha = -1/4$, y hay dos de ellos para α ligeramente mayor que $-1/4$. Uno es repulsor y el otro atractor.

7. La bifurcación no es ninguna de las anteriores. Si $\alpha = 0$, todo se mapea a cero, lo que es un punto fijo. Si $0 < |\alpha| < 1$, entonces el origen es un punto fijo atractor y $x = (1 - \alpha)/\alpha$ es un punto fijo repulsor.

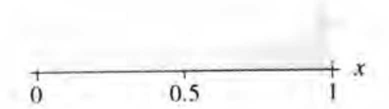
9. Si $\mu < 1$, el origen es el único punto fijo. En $\mu = 1$, todo punto que satisface $x \leq 1/2$ es un punto fijo. Si $\mu > 1$, hay dos puntos fijos.



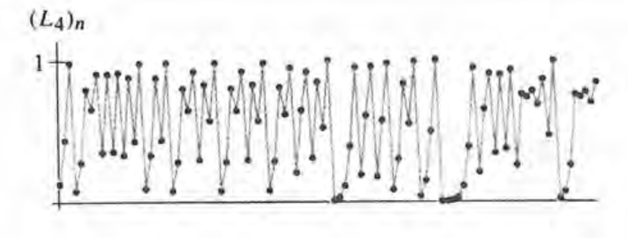
11. *Sugerencia:* La función $F_c(x)$ es una parábola con mínimo en $x = 0$ y $F_c(0) = c$. La función $F_c^2(x)$ es una cuártica con máximo local en $x = 0$. Trate de observar $F_c^2(x)$ de cabeza cerca de $x = 0$.

Sugerencias y respuestas para la sección 8.4

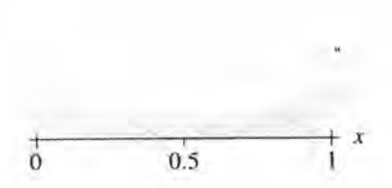
1.



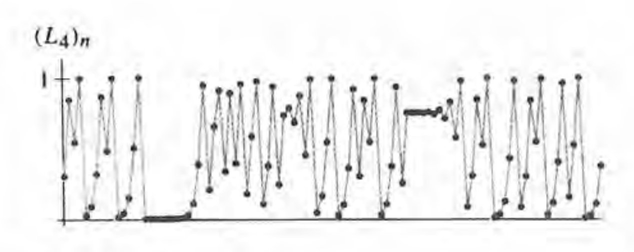
H tograma para 0.3.



Serie de tiempo para 0.3.



Histograma para 0.3001.



Serie de tiempo para 0.3001.

3. $T^n(p/2^n) = 0$.

5. Cada uno de los intervalos $[i/2^n, (i + 1)/2^n]$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 2$, contiene un punto fijo de T^n.

7. Los puntos que tienden a ser fijos tienen la forma $p/2^n$ para cualquier entero p entre cero y $2^n - 1$.

9. T^n tiene $2^n - 1$ puntos fijos.

11. Haga una lista de todas las posibles cadenas de 0 y 1 y luego únalos para formar el desarrollo binario de x_0.

13. Note que T^n tiene un punto fijo en cada intervalo de la forma $[i/2^n, (i + 1)/2^n]$, por lo que hay 2^n puntos fijos para T^n.

Sugerencias y respuestas para el Apéndice A

1. $y(t) = ke^t - e^{-2t}$.

3. $y(t) = ke^t - \frac{3}{2}e^{-t}$.

5. $y(t) = ke^{-2t} + \frac{3}{7}e^{t/3}$; tome $k = 4/7$ para la solución del problema de valor inicial.

7. $y(t) = ke^{2t} - \frac{3}{4}e^{-2t}$; tome $k = 43/4$ para la solución del problema de valor inicial.

9. Tiende a una solución que satisface $-\frac{1}{2} < y(t) < 1$.

11. Tiende a $y = 3$.

13. La conjetura $a \cos 3t$ conduce a términos que contienen $\cos 3t$ y $\operatorname{sen} 3t$ a la izquierda.

15. Simplemente inserte $y_h(t)$, $y_1(t)$ y $y_2(t)$ en sus respectivas ecuaciones y sume.

17. $y(t) = ke^{-2t} + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}e^{4t}$; para la solución del problema de valor inicial tome $k = -5/12$.

19. $y(t) = ke^{-3t} + \frac{3}{13}\cos 2t + \frac{2}{13}\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{6}e^{3t} - e^{-4t}$; para la solución del problema de valor inicial tome $k = 47/78$.

21. **(a)** $a_1 = 1, a_2 = -2$
(b) $y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$

23. **(a)** $a_1 = 1, a_2 = -2$
(b) $y(t) = te^{-2t}$

ÍNDICE

N

O

P

R

S

T

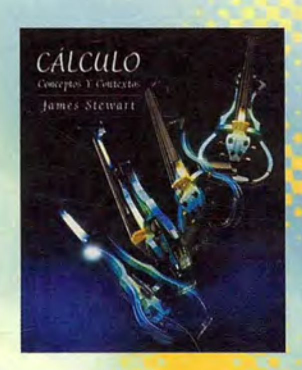
V

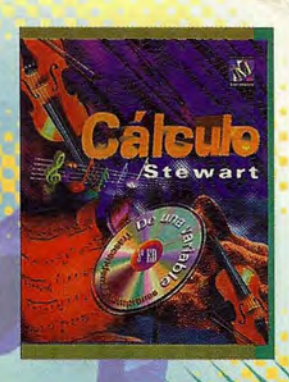
W

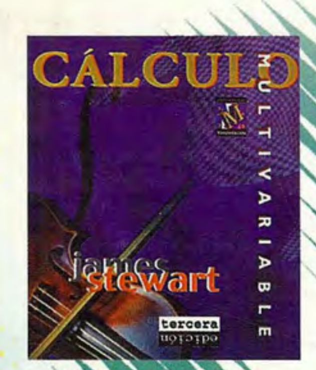
X

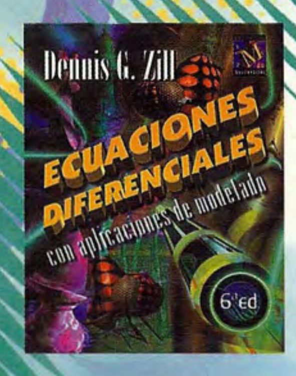
Esta obra se terminó de imprimir y encuadernar
en octubre de1999 en
Encuadernación Ofgloma, S.A.
Rosa Blanca núm. 12,
Col. Santiago Acahualtepec,
México D.F.

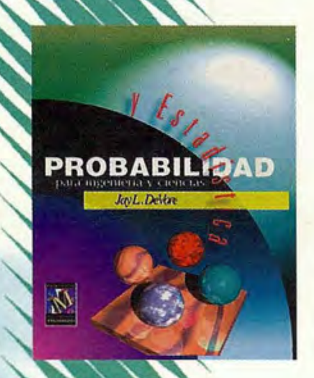
Matemáticas
CON PODER

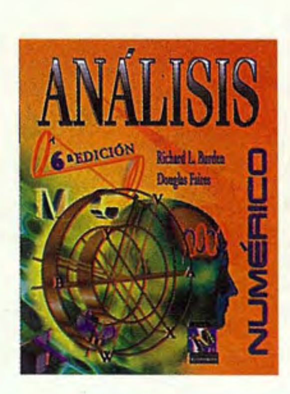














MÉXICO Y AMÉRICA CENTRAL
Tel. (525)281-2906
Fax (525)281-2656
Séneca 53, Col. Polanco,
E-mail:clientes@mail.internet.com.mx
México, D.F.,C.P. 11560

EL CARIBE
Tel. (787)758-7580
Fax (787)758-7573
E-mail:102154.1127@compuserve.com
Hato Rey, PUERTO RICO

AMÉRICA DEL SUR
Tel./Fax (5411)4777-0960
E-mail:sdeluque@ba.net
Buenos Aires, ARGENTINA

ESPAÑA
Tel. (3491)446-3350
Fax (3491)445-6218
E-mail:itesparaninfo.pedidos@mad.servicom.es
Madrid, ESPAÑA


ISBN 968-7529-63-6
9 789687 529639